Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

Concours Fryer 2011

le mercredi 13 avril 2011

Solutions

1. (a) Puisque le 5^e terme est 14 et que la raison est 3, alors le 6^e terme est égal à $14 + 3$, ou 17. De même, le 7^e terme est égal à $17 + 3$, ou 20.

   (b) Chaque terme, après le premier, est 3 de plus que le terme à sa gauche.
   Pour se rendre du 1^{er} terme au 31^e terme, il faut avancer 30 fois vers la droite.
   Donc, le 31^e terme est 30×3 de plus que le 1^{er} terme. Il est donc égal à $2 + 30(3)$, ou 92.

   (c) Selon le travail de la partie (b), on cherche combien de fois il faut ajouter 3 à 2 pour donner 110. Or, de 2 à 110, il y a une augmentation de 108.
   Puisque $108 \div 3 = 36$, il faut ajouter 36 fois le nombre 3 à 2 pour obtenir 110, c'est-à-dire que $2 + 36 \times 3 = 110$.
   On a donc ajouté 36 termes à la suite, après le premier terme, pour obtenir le dernier terme, 110. Il y a donc 37 termes dans la suite.

   (d) De 2 à 1321, il y a une augmentation de 1319.
   Est-il possible d'ajouter le nombre 3 un certain nombre de fois pour obtenir une augmentation totale de 1319 ?
   Or, $1319 \div 3 = 439\frac{2}{3}$. Puisque 1319 d'est pas un multiple de 3, il est impossible d'ajouter le nombre 3 un certain nombre de fois pour obtenir une augmentation totale de 1319.
   Donc, le nombre 1321 ne peut pas paraître dans la suite.

2. (a) (i) Puisque $AB = AC$, le triangle ABC est isocèle. Donc, la hauteur AD coupe la base BC en son milieu et on a donc $BD = DC = \frac{14}{2}$, ou $BD = DC = 7$.
   Puisque $\angle ADB = 90°$, le triangle ADB est rectangle.
   D'après le théorème de Pythagore, $25^2 = AD^2 + 7^2$, ou $AD^2 = 25^2 - 7^2$, ou $AD^2 = 576$. Puisque $AD > 0$, alors $AD = \sqrt{576}$, ou $AD = 24$.

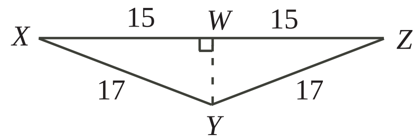
   (ii) L'aire du triangle ABC est égale à $\frac{1}{2} \times BC \times AD$, ou $\frac{1}{2} \times 14 \times 24$, ou 168.

   (b) (i) D'après la description, le triangle ADB subit une rotation de centre D et de 90° dans le sens contraire des aiguilles d'une montre pour devenir le triangle PDQ.
   De même le triangle ADC subit une rotation de centre D et de 90° dans le sens des aiguilles d'une montre pour devenir le triangle RDQ.
   Pendant ces rotations, les longueurs de côtés ne changent pas. Donc $PD = AD = 24$ et $RD = AD = 24$.
   Puisque P, D et R sont alignés, alors $PR = PD + RD$, d'où $PR = 24 + 24$, ou $PR = 48$.

   (ii) *Solution 1*
   Lorsqu'on fait subir au triangle ADC une rotation de 90° de centre D, le côté DC devient la hauteur DQ du triangle PQR.
   Donc $DQ = DC = 7$.
   L'aire du triangle PQR est égale à $\frac{1}{2} \times PR \times DQ$, ou $\frac{1}{2} \times 48 \times 7$, ou 168.

   Solution 2
   D'après la partie (a), l'aire du triangle ABC est égale à 168.
   Puisque la hauteur AD coupe la base en son milieu, alors les triangles ABD et ADC ont chacun une aire de 84.
   Pendant les rotations, les triangles ADB et ADC ne changent pas.
   Le triangle ABD devient le triangle PQD et le triangle ACD devient le triangle RQD.
   Les triangles PQD et RQD ont donc chacun une aire de 84.
   L'aire du triangle PQR est égale à la somme de l'aire de ces triangles. Elle est donc égale à 168.

(c) Puisque $XY = YZ$, le triangle XYZ est isocèle.
Au point Y, on trace la hauteur YW.
La hauteur YW coupe la base XZ en son milieu. Donc $XW = WZ = 15$.



Puisque $\angle YWX = 90°$, le triangle YWX est rectangle.
D'après le théorème de Pythagore, on a $17^2 = YW^2 + 15^2$, d'où $YW^2 = 64$. Puisque $YW > 0$, alors $YW = 8$.
On renverse le processus de la partie (b). On fait subir au triangle XWY une rotation de centre W et de $90°$ dans le sens des aiguilles d'une montre et au triangle ZWY une rotation de centre W et de $90°$ dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. On obtient un autre triangle de même aire.
Le nouveau triangle a deux côtés de longueur 17 (puisqu'ils sont formés des côtés XY et ZY) et un côté dont la longueur est le double de celle de YW (puisque la nouvelle base est formée de deux fois YW), soit 2×8, ou 16.

3. (a)

Nombre de deux chiffres	1re étape	2e étape	3e étape
68	$6 \times 8 = 48$	$4 \times 8 = 32$	$3 \times 2 = 6$

En commençant par le nombre 68, il faut 3 étapes pour obtenir un nombre de un chiffre.

(b) Si on aboutit au nombre 8, le nombre précédent doit être formé de deux chiffres ayant un produit de 8. Les paires de facteurs possibles de 8 sont 1×8 et 2×4.
Les nombres possibles de deux chiffres ayant un produit de 8 sont donc 18, 81, 24 et 42.
On considère maintenant les paires de facteurs possibles de 18, 81, 24 et 42.
Les paires de facteurs possibles de 18 sont 1×18, 2×9 et 3×6.
Puisque les facteurs 1 et 18 ne peuvent pas former deux chiffres, les nombres possibles de deux chiffres ayant un produit de 18 sont 29, 92, 36 et 63.
Les paires de facteurs possibles de 81 sont 1×81, 3×27 et 9×9.
Le seul nombre possible de deux chiffres ayant un produit de 81 est 99.
Les paires de facteurs possibles de 24 sont 1×24, 2×12, 3×8 et 4×6.
Les nombres possibles de deux chiffres ayant un produit de 24 sont donc 38, 83, 46 et 64.
Les paires de facteurs possibles de 42 sont 1×42, 3×14 et 6×7.
Les nombres possibles de deux chiffres ayant un produit de 42 sont donc 67 et 76.
Le tableau suivant résume la situation.

Nombre de deux chiffres	1re étape	2e étape
29, 92, 36, 63	18	8
99	81	8
38, 83, 46, 64	24	8
67, 76	42	8

Donc, les nombres de deux chiffres qui aboutissent au nombre 8 après 2 étapes sont 29, 92, 36, 63, 99, 38, 83, 46, 64, 67 et 76.

(c) Si on aboutit au nombre 4, le nombre précédent doit être formé de deux chiffres ayant un produit de 4. Les paires de facteurs possibles de 4 sont 1×4 et 2×2.
Les nombres possibles de deux chiffres ayant un produit de 4 sont 14, 41 et 22.
On considère maintenant les paires de facteurs possibles de 14, 41 et 22.
Les paires de facteurs possibles de 14 sont 1×14 et 2×7.
Les nombres possibles de deux chiffres ayant un produit de 14 sont 27 et 72.
La seule paire de facteurs possibles de 41 est 1×41. Puisque les facteurs 41 et 1 ne peuvent pas former deux chiffres, il n'y a aucun nombre possible de deux chiffres ayant un produit de 41.
Les paires de facteurs possibles de 22 sont 1×22 et 2×11.
Il n'y a donc aucun nombre possible de deux chiffres ayant un produit de 22.
Le tableau suivant résume la situation. On le lit de droite à gauche, puisqu'on procède à rebours.

Nombre de deux chiffres	Étape précédente	Avant-dernière étape	Dernière étape
	27	14	4
	72	14	4
	aucun	41	4
	aucun	22	4

On continue à rebours en déterminant les nombres de deux chiffres ayant un produit de 27 ou de 72. Les résultats se trouvent dans le tableau suivant.

Nombre de deux chiffres	1re étape	2e étape	3e étape
39, 93	27	14	4
89, 98	72	14	4

Puisqu'il n'existe aucun nombre de deux chiffres dont le produit est égal à 39, 93, 89 ou 98, il est impossible de continuer à rebours. La liste est donc complète.
Donc, les nombres de deux chiffres qui aboutissent au nombre 4 sont 14, 41, 22, 27, 72, 39, 93, 89 et 98.

(d) On peut procéder à rebours de façon systématique à partir de chaque nombre de un chiffre, de 0 à 9.
On peut utiliser les résultats précédents qui donnent tous les nombres qui aboutissent à 4 ou qui aboutissent à 8 en 2 étapes.
Par exemple, dans la partie (b), il y a 11 nombres qui aboutissent à 8 après 2 étapes.
Trois de ces nombres nous permettent de continuer à rebours, soit 36, 63 et 64.
Or, le nombre 63 nous permet de reculer d'une étape seulement, soit avec 79 ou 97.
De même, le nombre 64 nous permet de reculer d'une seule étape, soit avec 88.
Le nombre 36 nous permet de reculer d'une étape en obtenant 49, 94 et 66. De plus, le nombre 49 nous permet de reculer d'une autre étape en obtenant 77. Donc, le nombre 77 nous permet d'aboutir à 8 en 4 étapes, comme le montre le tableau suivant.

Nombre de deux chiffres	1re étape	2e étape	3e étape	4e étape
77	$7 \times 7 = 49$	$4 \times 9 = 36$	$3 \times 6 = 18$	$1 \times 8 = 8$

On invite la lectrice ou le lecteur à démontrer que 77 est le seul nombre de deux chiffres qui aboutit à un nombre de un chiffre après 4 étapes.
Pourquoi n'y a-t-il aucun nombre de deux chiffres qui aboutit à un nombre de un chiffre après 5 étapes ?

4. (a) Au début de l'année, Ian a exactement 365 pièces de 2 \$ dans son bocal, soit une somme de 365×2 \$, ou 730 \$.
Après 365 jours, il a dépensé $365 \times 1{,}72$ \$, ou 627,80 \$.
Il y aura donc 730 \$ − 627,80 \$, ou 102,20 \$ dans le bocal après 365 jours.

(b) Puisqu'il y a 365 pièces de 2 \$ dans le bocal au départ, Ian peut toujours utiliser une de ces pièces au besoin, à condition de respecter les règles. Il paiera avec une pièce de 2 \$ aussi longtemps qu'il n'aura pas accumulé au moins 1,72 \$ en monnaie reçue.
Lorsque Ian paie avec une pièce de 2 \$, il reçoit 0,28 \$ en monnaie, c'est-à-dire 1 pièce de 25 ¢ et 3 pièces de 1 ¢, car le thé coûte 1,72 \$.
Le 1er jour, il paie avec une pièce de 2 \$ et il reçoit 1 pièce de 25 ¢ et 3 pièces de 1 ¢.
Le 2e jour, il paie avec une pièce de 2 \$ et il reçoit 1 pièce de 25 ¢ et 3 pièces de 1 ¢.
Il en est de même jusqu'au 7e jour, car même après 6 jours, Ian n'aura reçu en monnaie que $6 \times 0{,}28$ \$, soit 1,68 \$. Cette monnaie est formée de 6 pièces de 25 ¢ et de 18 pièces de 1 ¢. À la fin du 7e jour, Ian aura donc reçu 7 pièces de 25 ¢ et 21 pièces de 1 ¢ en monnaie, soit une somme de 1,96 \$.
On a donc démontré que le nombre maximal de pièces de 25 ¢ qu'il y aura dans le bocal à n'importe quel moment est au moins 7.
Or, à chaque fois qu'il y a 7 pièces de 25 ¢ dans le bocal, il y a au moins 1,75 \$ en petites pièces dans le bocal. Le lendemain, Ian remettrait donc au plus 1,75 \$ pour sa tasse de thé et recevrait au plus 3 pièces de 1 ¢ de monnaie. Le nombre de pièces de 25 ¢ dans le bocal n'augmenterait donc pas.
Donc, le nombre maximal de pièces de 25 \$ qu'il peut y avoir dans le bocal à n'importe quel moment est 7.

(c) Dans la partie (b), on a vu que lorsque Ian paie avec une pièce de 2 \$, il reçoit 1 pièce de 25 ¢ et 3 pièces de 1 ¢ en monnaie.
Puisque cette situation se présente assez souvent, on dira qu'il s'agit d'une *journée typique*.
Une journée typique se présente lorsqu'il y a moins de 1,72 \$ en petite monnaie dans le bocal et que Ian doit donc présenter une pièce de 2 \$ pour payer son thé.
Dans le tableau suivant, on présente le nombre de pièces de chaque sorte qu'il y a dans le bocal à la fin de la journée. Pour condenser, on a omis certaines journées typiques.
Or, on sait qu'à chaque journée typique, Ian paie en remettant une pièce de 2 \$ et qu'il reçoit comme monnaie 1 pièce de 25 ¢ et 3 pièces de 1 ¢.

Pièce	Jour 7	Jour 8	Jour 14	Jour 15	Jour 21	Jour 22	Jour 28	Jour 29	Jour 35	Jour 36	Jour 42	Jour 43	Jour 49	Jour 50
2 \$	358	358	352	352	346	346	340	340	334	334	328	328	322	322
25 ¢	7	0	6	0	6	0	6	0	6	0	6	0	6	0
1 ¢	21	24	42	20	38	16	34	12	30	8	26	4	22	0

En guise d'explication, on voit que les jours 9 à 13, 16 à 20, et ainsi de suite sont des journées typiques.
À chacune de ces journées typiques, le nombre de pièces de 2 \$ diminue de 1, le nombre de pièces de 25 ¢ augmente de 1 et le nombre de pièces de 1 ¢ augmente de 3.
On voit qu'à partir du jour 8, chaque 7e jour n'est pas une journée typique. Donc, les jours 8, 15, 22, 29, 36, 43 et 49, il y a au moins 1,72 \$ en petite monnaie qui peut être utilisée au lieu d'une pièce de 2 \$ pour payer le thé.
Toutes les journées absentes du tableau sont des journées typiques.
Après 50 jours, Ian a utilisé 43 pièces de 2 \$ $(365-322 = 43)$ et il ne reste que des pièces de 2 \$ dans le bocal. Il s'agit de la première journée, depuis le début, où le bocal ne contient que des pièces de 2 \$.

Puisque le lendemain, jour 51, on recommence avec un bocal qui ne contient que des pièces de 2 \$, le même cycle de pièces remises et de pièces reçues se reproduira à tous les 50 jours.
Donc après 250 jours, Ian aura utilisé 215 pièces de 2 \$ ($5 \times 43 = 215$) et le bocal contiendra 150 pièces de 2 \$ ($365 - 215 = 150$) et aucune autre pièce.
Donc le 277ᵉ jour, le bocal contiendra le même nombre de pièces de 25 ¢ et de 1 ¢ que le 27ᵉ jour.
D'après le tableau ci-dessus, il y a 6 pièces de 25 ¢ et 34 pièces de 1 ¢ le 28ᵉ jour.
Puisque le 28ᵉ jour est une journée typique, il y avait donc 5 pièces de 25 ¢ et 31 pièces de 1 ¢ le 27ᵉ jour.
De plus, il y a 341 pièces de 2 \$ dans le bocal le 27ᵉ jour.
Donc Ian a utilisé 24 pièces de 2 \$ dans les 27 premières journées ($365 - 341 = 24$).
À cause de la régularité qui se répète à tous les 50 jours, 24 pièces de 2 \$ seront utilisées à partir de la 251ᵉ journée jusqu'à la fin de la 277ᵉ journée.
Puisqu'il y a 150 pièces de 2 \$ dans le bocal après 250 jours, il y a 126 pièces de 2 \$ dans le bocal après 277 jours ($150 - 24 = 126$).
Après 277 jours, il y a 126 pièces de 2 \$, 5 pièces de 25 ¢ et 31 pièces de 1¢ dans le bocal.

On peut vérifier si cette réponse est raisonnable.
Après 277 jours, Ian a dépensé 476,44 \$ ($277 \times 1{,}72 = 476{,}44$).
Il doit donc rester 253,56 \$ dans le bocal ($730 - 476{,}44 = 253{,}56$).
D'après la réponse, la quantié d'argent dans le bocal est égale à $126 \times 2{,}00\,\$ + 5 \times 0{,}25\,\$ + 31 \times 0{,}01\,\$$, ou 253,56 \$.
Cela nous confirme que notre réponse est probablement correcte.

Il est sage de constater qu'au départ, Ian a des pièces de 2 \$ (ou de 200 ¢) et que le prix du thé est de 172 ¢.
On peut vérifier que le plus petit commun multiple de 200 et de 172 est 8600.
Comment peut-on utiliser ce plus petit commun multiple pour déterminer le nombre de jours qu'il faut pour que le bocal retourne à sa condition initiale où il ne contient que des pièces de 2 \$?