Concours Fryer 2011 (9^e année – Sec. III)

le mercredi 13 avril 2011

1. Une *suite arithmétique* est une suite dont chaque terme, après le premier, est obtenu en ajoutant au terme précédent une valeur constante d, appelée raison arithmétique. Par exemple, $2, 5, 8, 11, 14$ sont les cinq premiers termes d'une suite arithmétique ayant pour raison $d = 3$.

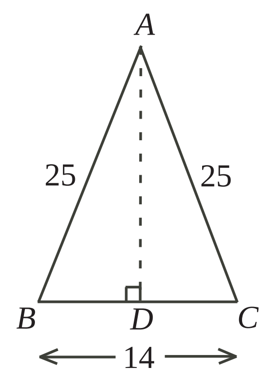
   (a) Déterminer les 6^e et 7^e termes de la suite ci-dessus.

   (b) Quel est le 31^e terme de cette suite ?

   (c) Si le dernier terme de cette suite était 110, combien y aurait-il de termes dans la suite ?

   (d) Si la suite continuait, le nombre 1321 paraîtrait-il dans la suite ? Expliquer sa réponse.

2. Dans tout triangle isocèle ABC dont $AB = AC$, la hauteur AD coupe la base BC en son milieu D de manière que $BD = DC$.



   (a) (i) Dans le triangle ABC ci-contre, $BC = 14$ et $AB = AC = 25$. Déterminer la longueur de la hauteur AD.

   (ii) Déterminer l'aire du triangle ABC.

   (b) On coupe le triangle précédent ABC le long de sa hauteur, de A jusqu'à D (Figure 1).
   On fait subir à chaque triangle qui en résulte une rotation de 90° de centre D jusqu'à ce que les points B et C se rencontrent au-dessous du point D (Figure 2).
   On obtient ainsi un nouveau triangle que l'on nomme PQR (Figure 3).

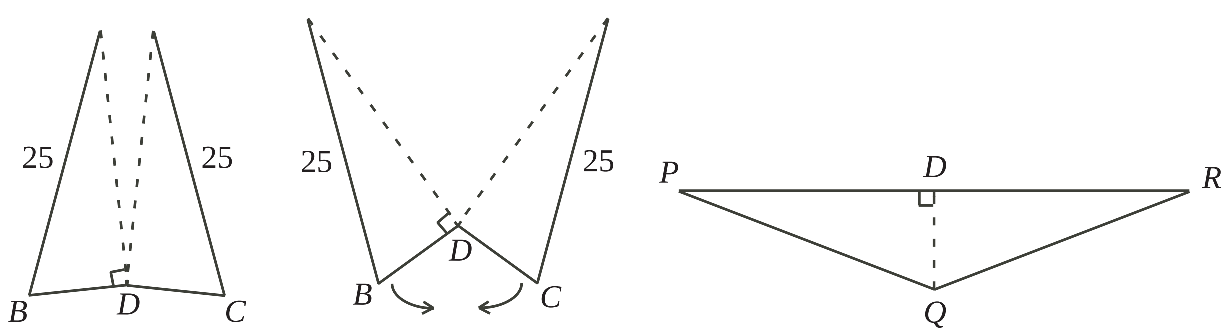
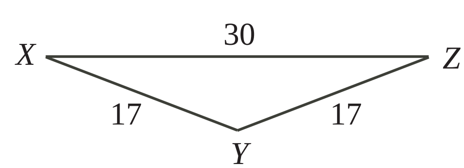


Figure 1 Figure 2 Figure 3

   (i) Déterminer la longueur de la base PR du triangle PQR.

   (ii) Déterminer l'aire du triangle PQR.

   (c) Il existe deux triangles isocèles différents dont les longueurs de côtés sont des entiers et dont l'aire est égale à 120. Un de ces triangles, le triangle XYZ, est indiqué ci-contre.
   Déterminer les longueurs des trois côtés du deuxième triangle.



3. On commence par n'importe quel entier positif de deux chiffres dont on multiplie les chiffres. Si le produit qui en résulte est un nombre de deux chiffres, on recommence. À force de répéter cette procédure, on aboutit éventuellement à un nombre de un chiffre. On cesse lorsqu'on obtient un nombre de un chiffre.

   Par exemple :

Nombre de deux chiffres	1re étape	2e étape	3e étape	
97	$9 \times 7 = 63$	$6 \times 3 = 18$	$1 \times 8 = 8$	On aboutit au nombre 8 après 3 étapes.
48	$4 \times 8 = 32$	$3 \times 2 = 6$		On aboutit au nombre 6 après 2 étapes.
50	$5 \times 0 = 0$			On aboutit au nombre 0 après 1 étape.

   (a) On commence par le nombre 68. Déterminer le nombre d'étapes qu'il faut pour obtenir un nombre de un chiffre.

   (b) Déterminer tous les nombres de deux chiffres qui aboutissent au nombre 8 après 2 étapes.

   (c) Déterminer tous les nombres de deux chiffres qui aboutissent au nombre 4.

   (d) Déterminer un nombre de deux chiffres qui aboutit à un nombre de un chiffre après 4 étapes.

4. Chaque jour, Ian dépense 1,72 $ chez Jim Bortons pour une tasse de thé. Il prend l'argent de son bocal de monnaie. Au début de l'année, il y a exactement 365 pièces de 2 $ (chacune vaut 200 ¢) et aucune autre pièce dans le bocal. Ian paie et la caissière ou le caissier rend la monnaie selon les règles suivantes :

   – Ian prend toujours l'argent de son bocal.
   – Ian offre une somme d'au moins 1,72 $.
   – La somme que Ian offre est toujours le plus proche possible du prix de la tasse de thé.
   – La monnaie lui est toujours rendue avec le plus petit nombre possible de pièces de monnaie.
   – La monnaie reçue est placée dans le bocal de monnaie.
   – Les pièces utilisées peuvent être de 1 ¢, 5 ¢, 10 ¢, 25 ¢ ou 200 ¢.

   (a) Combien d'argent Ian aura-t-il dans son bocal après 365 jours ?

   (b) Quel est le nombre maximal de pièces de 25 ¢ qu'il peut y avoir dans le bocal à n'importe quel moment ?

   (c) Combien y a-t-il de pièces de chaque sorte dans le bocal après 277 jours ?