Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

Concours Fermat 2011

(11e année – Secondaire V)

le jeudi 24 février 2011

Solutions

1. On a : $\dfrac{2+3\times 6}{23+6} = \dfrac{2+18}{29} = \dfrac{20}{29}$

Réponse : (D)

2. Si $y = 77$, alors : $\dfrac{7y+77}{77} = \dfrac{7y}{77} + \dfrac{77}{77} = \dfrac{7(77)}{77} + 1 = 7 + 1 = 8$

Réponse : (A)

3. Le rectangle a une aire de 192 et une base de 24. Puisque $192 \div 24 = 8$, il a une hauteur de 8. Il a donc un périmètre de $2 \times 24 + 2 \times 8$, ou 64.

Réponse : (A)

4. Puisque $\sqrt{n+9} = 25$, alors $n + 9 = 25^2$, ou $n + 9 = 625$.
Donc $n = 616$.

Réponse : (D)

5. Puisque le triangle PRS est équilatéral, ses angles mesurent tous 60°. Donc $\angle RSP = 60^\circ$.
Puisque $QS = QT$, le triangle QST est isocèle. Donc $\angle TSQ = \angle STQ = 40^\circ$.
Puisque RST est un angle plat, alors $\angle RSP + \angle PSQ + \angle TSQ = 180^\circ$.
Donc $60^\circ + x^\circ + 40^\circ = 180^\circ$, d'où $x = 180 - 60 - 40$, ou $x = 80$.

Réponse : (C)

6. Puisque la somme de trois entiers consécutifs est égale à 27, les entiers sont 8, 9 et 10. (On peut le démontrer de façon algébrique en nommant les entiers x, $x + 1$ et $x + 2$, puis en résolvant l'équation $x + (x + 1) + (x + 2) = 27$.)
Leur produit est égal à $8 \times 9 \times 10$, ou 720.

Réponse : (C)

7. Le nombre qui est à mi-chemin entre deux nombres est la moyenne de ces deux nombres.
Le nombre qui est à mi-chemin entre $\frac{1}{10}$ et $\frac{1}{12}$ est donc égal à :

$$\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{12}) = \tfrac{1}{2}(\tfrac{12}{120} + \tfrac{10}{120}) = \tfrac{1}{2}(\tfrac{22}{120}) = \tfrac{11}{120}$$

Réponse : (D)

8. Le secteur qui représente le pourcentage d'élèves qui préfèrent les biscuits a un angle de 90°. Le secteur représente donc $\frac{1}{4}$ du disque. Donc, 25 % des élèves préfèrent les biscuits.
Le pourcentage des élèves qui préfèrent les sandwichs est donc égal à $100\,\% - 30\,\% - 25\,\% - 35\,\%$, ou 10 %.
Puisqu'il y a 200 élèves en tout et que 10 % de 200 est égal à $\frac{1}{10}$ de 200, c'est-à-dire à 20, il y a 20 élèves qui préfèrent les sandwichs.

Réponse : (B)

9. L'ensemble S contient 25 multiples de 2, soit les entiers pairs.
Lorsqu'on a enlevé ces nombres, il ne reste plus dans l'ensemble S que les entiers impairs de 1 à 49. L'ensemble S ne contient plus que 25 nombres, car on en a enlevé 25.
On doit aussi enlever les multiples de 3 de l'ensemble S.
Puisque S ne contient plus que des entiers impairs, il faut enlever les multiples impairs de 3 situés entre 1 et 49, soit 3, 9, 15, 21, 27, 33, 39 et 45. Il y en a 8.
Il reste 17 entiers dans l'ensemble S, car $25 - 8 = 17$.

Réponse : (D)

10. *Solution 1*
On a $QR = 2 + 9$. Puisque $PQRS$ est un carré, alors $PQ = QR = SR = PS = 11$.
La hauteur du rectangle ombré est égale à celle du rectangle supérieur gauche (6) moins celle du rectangle supérieur droit (2). Elle est donc égale à 4.
La largeur du rectangle ombré est égale à celle du rectangle supérieur droit (8) moins celle du rectangle inférieur droit ($11 - 10 = 1$). Elle est donc égale à 7.
Le rectangle ombré a donc une aire de 4×7, ou 28.

Solution 2
On a $QR = 2 + 9$. Puisque $PQRS$ est un carré, alors $PQ = QR = SR = PS = 11$.
Le carré a donc une aire de 11^2, ou 121.
Puisque $PQ = 11$, le rectangle supérieur gauche a une base de $11 - 8$, ou 3. Puisqu'il a une hauteur de 6, son aire est égale à 3×6, ou 18.
Puisque $PS = 11$, le rectangle inférieur gauche a une hauteur de $11 - 6$, ou 5. Puisqu'il a une base de 10, son aire est égale à 5×10, ou 50.
Puisque $SR = 11$, le rectangle inférieur droit a une base de $11 - 10$, ou 1. Puisqu'il a une hauteur de 9, son aire est égale à 1×9, ou 9.
Le rectangle supérieur droit a une aire de 8×2, ou 16.
L'aire du rectangle ombré est égale à l'aire du carré $PQRS$ moins celle des quatre rectangles non ombrés. Elle est donc égale à $121 - 18 - 50 - 9 - 16$, ou 28.

Réponse : (B)

11. Après avoir acheté 7 boules de gomme, il est possible que Xavier ait reçu 2 boules rouges, 2 boules bleues, 1 boule noire et 2 boules vertes.
Il ne pourrait pas avoir plus de boules sans avoir au moins 3 boules d'une même couleur.
Si Xavier achète une boule de plus, ce sera une boule bleue, verte ou rouge.
Quel que soit le résultat, il aura au moins 3 boules d'une même couleur.
Pour résumer, si Xavier achète 7 boules de gomme, il n'est pas certain d'avoir 3 boules d'une même couleur, mais s'il achète 8 boules de gomme, il est certain d'avoir au moins 3 boules d'une même couleur.
Donc, pour s'assurer de recevoir 3 boules d'une même couleur, Xavier doit acheter un minimum de 8 boules.

Réponse : (E)

12. *Solution 1*
La parabole est symétrique par rapport à son axe de symétrie.
Puisqu'elle coupe l'axe des abscisses en $x = -1$ et en $x = 4$, l'axe de symétrie a pour équation $x = \frac{-1+4}{2}$, ou $x = \frac{3}{2}$.
Or, le point $(3, w)$ est à $\frac{3}{2}$ unité de l'axe de symétrie. Son ordonnée w est donc la même que celle du point qui est à $\frac{3}{2}$ unité à gauche de l'axe de symétrie, soit celle du point $(0, 8)$.
Donc $w = 8$.
(On aurait pu remarquer que $x = 3$ est 1 unité à la gauche de l'abscisse à l'origine de droite et que l'ordonnée du point $(3, w)$ est la même que celle du point dont l'abscisse est 1 unité à la droite de l'abscisse à l'origine de gauche.)

Solution 2

Puisque la parabole a pour abscisses à l'origine -1 et 4, elle a une équation de la forme $y = a(x + 1)(x - 4)$, a étant un nombre non nul quelconque.

Puisque le point $(0, 8)$ est situé sur la parabole, alors $8 = a(1)(-4)$, d'où $a = -2$.

La parabole a donc pour équation $y = -2(x + 1)(x - 4)$.

Puisque le point $(3, w)$ est situé sur la parabole, alors $w = -2(4)(-1)$, d'où $w = 8$.

Réponse : (E)

13. Puisque Xavier, Yolande et Zinedine ont un total de 50 \$ et que le rapport de la quantité d'argent de Xavier à la quantité totale de Yolande et de Zinedine est de 3 : 2, alors Xavier a $\frac{3}{5}$ du total, soit $\frac{3}{5} \times 50$ \$, ou 30 \$.

Donc, Yolande et Zinedine se partagent 50 \$ − 30 \$, ou 20 \$.

Or, on sait que Yolande a 4 \$ de plus que Zinedine. On doit donc séparer les 20 \$ en deux parties de manière que l'une soit 4 \$ de plus que l'autre. Donc, Yolande a 12 \$ et Zinedine a 8 \$.

Donc, Zinedine a 8 \$.

Réponse : (B)

14. La moyenne de deux multiples de 4 doit être paire. En effet, soit $4m$ et $4n$ les deux entiers pairs, m et n étant des entiers quelconques. Leur moyenne est donc égale à $\frac{1}{2}(4m + 4n)$, ce qui est égal à $2m + 2n$, ou $2(m + n)$. Or, cette dernière expression est 2 fois un entier, ce qui représente un nombre pair.

Chacune des autres expressions peut donner un entier impair à l'occasion. Par exemple :

(A) La moyenne de 2 et de 4 est égale à 3, ce qui n'est pas un entier pair.

(B) La moyenne de 3 et de 7 est égale à 5, ce qui n'est pas un entier pair.

(C) La moyenne de 1 et de 9 est égale à 5, ce qui n'est pas un entier pair.

(E) La moyenne de 2, 3 et 4 est égale à 3, ce qui n'est pas un entier pair.

La bonne réponse est donc (D).

Réponse : (D)

15. Puisque m et n sont des entiers consécutifs strictement positifs et que $n^2 - m^2 > 20$, alors n est supérieur à m. On pose donc $n = m + 1$.

Puisque $n^2 - m^2 > 20$, alors $(m + 1)^2 - m^2 > 20$, ou $m^2 + 2m + 1 - m^2 > 20$, ou $2m > 19$, ou $m > \frac{19}{2}$. Puisque m est un entier, alors $m \geq 10$.

On cherche la valeur minimale de $n^2 + m^2 = (m + 1)^2 + m^2 = 2m^2 + 2m + 1$ lorsque $m \geq 10$.

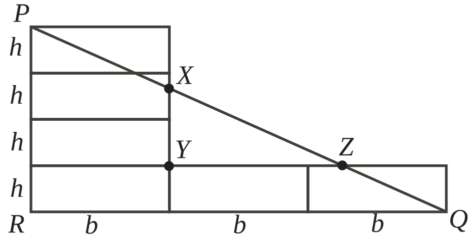
L'expression $2m^2 + 2m + 1$ admet une valeur minimale lorsque $m = 10$. (En effet, les deux premiers termes augmentent à mesure que m augmente.)

La valeur minimale est donc égale à $2(10^2) + 2(10) + 1$, ou 221.

Réponse : (E)

16. *Solution 1*

Soit R le coin inférieur gauche. On a donc :



Puisque la figure est formée de rectangles, alors XY est parallèle à PR. Donc $\angle YXZ = \angle RPQ$.

De plus, YZ est parallèle à RQ. Donc $\angle XZY = \angle PQR$.

Les triangles PRQ et XYZ sont donc semblables.
Donc $\dfrac{RQ}{PR} = \dfrac{YZ}{XY}$.
Or $YZ = 2XY$, $RQ = 3b$ et $PR = 4h$.
Donc $\dfrac{3b}{4h} = \dfrac{2XY}{XY}$, d'où $\dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{b}{h} = 2$, ou $\dfrac{h}{b} = \dfrac{3}{8}$.

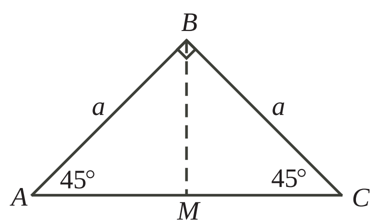
Solution 2
Somme dans la Solution 1, R représente le coin inférieur gauche.
Puisque $YZ = 2XY$, le segment XZ a une pente de $\dfrac{XY}{YZ} = \dfrac{XY}{2XY}$, ou $\dfrac{1}{2}$.
Puisque $PR = 4h$ et $RQ = 3b$, le segment PQ a une pente de $\dfrac{PR}{RQ}$, ou $\dfrac{4h}{3b}$.
Puisque le segment XZ fait partie du segment PQ, les deux segments ont la même pente. Donc $\dfrac{4h}{3b} = \dfrac{1}{2}$, d'où $\dfrac{h}{b} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{4}$, ou $\dfrac{h}{b} = \dfrac{3}{8}$.

Réponse : (C)

17. Puisque $3^{2x} = 64$ et que $3^{2x} = (3^x)^2$, alors $(3^x)^2 = 64$, d'où $3^x = \pm 8$.
Puisque $3^x > 0$, alors $3^x = 8$.
Or $3^{-x} = \dfrac{1}{3^x}$. Donc $3^{-x} = \dfrac{1}{8}$.

Réponse : (E)

18. On parlera des étapes suivantes : Étape 0 (1 carré), Étape 1 (2 triangles), Étape 2 (4 triangles), Étape 3 (8 triangles), and Étape 4 (16 triangles).
On cherche la longueur du plus grand côté d'un des 16 triangles de l'Étape 4.
À l'Étape 1, on a deux triangles isocèles rectangles ayant des cathètes de longueur 4.
De façon générale, soit un triangle isocèle rectangle ABC avec des cathètes AB et CB de longueur a. Il s'agit d'un triangle remarquable 45°-45°-90° et son hypoténuse a donc une longueur de $\sqrt{2}a$.
On abaisse une perpendiculaire BM au point B.



Puisque le triangle ABC est isocèle, BM est une hauteur et une médiane, de même que la bissectrice de l'angle ABC. M est donc le milieu de AC.
Les triangles AMB et CMB sont donc des triangles remarquables 45°-45°-90° congruents. Le plus grand côté de chaque triangle a une longueur de a.
Or, le plus grand côté du triangle précédent a une longueur de $\sqrt{2}a$. Donc, la longueur du côté le plus long des nouveaux triangles est égale à la longueur du côté le plus long du triangle précédent divisé par $\sqrt{2}$.
On utilise ce résultat général à chaque étape du problème.
À l'Étape 1, le côté le plus long a une longueur de $4\sqrt{2}$.
Donc, à l'Étape 2, le côté le plus long a une longueur de $\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$, ou 4.
À l'Étape 3, le côté le plus long a une longueur de $\frac{4}{\sqrt{2}}$, ou $\frac{2\sqrt{2}\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$, ou $2\sqrt{2}$.
À l'Étape 4, le côté le plus long a une longueur de $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$, ou 2.

Réponse : (B)

19. Soit r le rayon du grand cercle.
On joint O à P. Donc $OP = OS = r$.
Puisque Q est le milieu de PR et que $PR = 12$, alors $PQ = 6$.
Puisque $OS = r$ et $QS = 4$, alors $OQ = r - 4$.
Puisque le triangle OPQ est rectangle en Q, alors selon le théorème de Pythagore, on a :

$$\begin{aligned} OQ^2 + PQ^2 &= OP^2 \\ (r-4)^2 + 6^2 &= r^2 \\ r^2 - 8r + 16 + 36 &= r^2 \\ 52 &= 8r \\ r &= \tfrac{52}{8} \end{aligned}$$

Le rayon du grand cercle a donc une longueur de $\frac{52}{8}$, ou 6,5.

Réponse : (C)

20. Puisque $b = ar$, $c = ar^2$ et que a, b et c ont un produit de 46 656, alors $a(ar)(ar^2) = 46\,656$, ou $a^3r^3 = 46\,656$, ou $(ar)^3 = 46\,656$, d'où $ar = \sqrt[3]{46\,656}$, ou $ar = 36$.
Donc $b = ar = 36$.
Puisque a, b et c ont une somme de 114, alors $a+c = 114-b$, d'où $a+c = 114-36$, ou $a+c = 78$.

Réponse : (A)

21. Dans le tableau de forme triangulaire, la rangée r contient r entiers.
Donc dans un tableau de n rangées, le nombre de nombres dans le tableau est égal à :

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n$$

Cette somme est toujours égale à $\frac{1}{2}n(n+1)$.
(Si cette formule n'est pas connue, on peut essayer de la démontrer !)
On peut conclure que le dernier nombre de la rangée n est égal à $\frac{1}{2}n(n+1)$.
Pour déterminer la rangée dans laquelle le nombre 400 est situé, on déterminera la plus petite valeur de n pour laquelle $\frac{1}{2}n(n+1) \geq 400$, ou $n(n+1) \geq 800$.
La valeur de n doit être près de $\sqrt{800}$, ou 28,28 ...
Si $n = 28$, alors $n(n+1) = 812$.
Si $n = 27$, alors $n(n+1) = 756$.
Donc, 400 est situé dans la 28^e^ rangée. Or, le dernier nombre de la rangée 27 est égal à $\frac{1}{2}(27 \times 28)$, ou 378. Le dernier nombre de la rangée 28 est égal à $\frac{1}{2}(28 \times 29)$, ou 406.
La rangée qui contient le nombre 400 commence donc par le nombre 379 et se termine par le nombre 406. On cherche la somme des nombres de cette rangée.
Cette somme est égale à la somme des entiers de 1 à 406 moins la somme des entiers de 1 à 378.
Puisque la somme des entiers de 1 à m est égale à $\frac{1}{2}m(m+1)$, alors la somme des entiers de 379 à 406 est égale à $\frac{1}{2}(406)(407) - \frac{1}{2}(378)(379)$, ou 10 990.

Réponse : (A)

22. Puisque $\dfrac{p+q^{-1}}{p^{-1}+q} = 17$, alors $\dfrac{p+\dfrac{1}{q}}{\dfrac{1}{p}+q} = 17$, ou $\dfrac{\dfrac{pq+1}{q}}{\dfrac{1+pq}{p}} = 17$ ou $\dfrac{p(pq+1)}{q(pq+1)} = 17$.
Puisque p et q sont des entiers strictement positifs, alors $pq+1 > 0$. Le facteur commun $(pq+1)$ n'étant pas nul, on peut simplifier l'équation pour obtenir $\dfrac{p}{q} = 17$, ou $p = 17q$.

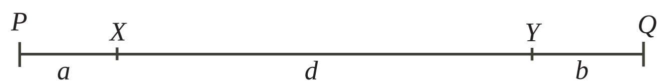
Puisque p et q sont des entiers strictement positifs, alors $q \geq 1$.
Puisque $p + q \leq 100$, alors $17q + q \leq 100$, ou $18q \leq 100$, ou $q \leq \frac{100}{18}$, ou $q \leq 5\frac{5}{9}$.
Puisque q est un entier strictement positif, alors $q \leq 5$.
Selon ces deux restrictions, on a $1 \leq q \leq 5$. Il y a donc 5 valeurs possibles et 5 couples possibles.
(On peut vérifier que les couples (p, q) possibles sont $(17, 1)$, $(34, 2)$, $(51, 3)$, $(68, 4)$ et $(85, 5)$.)

Réponse : (E)

23. On remarque que l'on peut changer des personnes l'une pour l'autre. Il n'est pas important de spécifier qui marche et qui se promène en moto. On nomme les trois personnes A, D et E.
Le point de départ est nommé P et le point d'arrivée est nommé Q.
Voici une stratégie dans laquelle les trois personnes avancent à tous moments et arrivent au point P en même temps :

A et D montent en moto, tandis que E marche.
A et D se rendent en moto à un point Y situé avant le point Q.
A laisse D et retourne en moto, tandis que D et E marchent vers le point Q.
A rencontre E au point X.
E monte sur la moto et avec A, se déplace vers le point Q de manière à arriver au point Q en même temps que D.
Le point Y est choisi de manière que A, D et E arrivent en même temps au point Q.

Soit a km la distance de P à X, d km la distance de X à Y et b km la distance de Y à Q.



Pendant que E marche de P à X à une vitesse de 6 km/h, A se déplace en moto de P à Y et de retour jusqu'à X à une vitesse de 90 km/h. Or, la distance de P à X est de a km, tandis que la distance de P à Y, puis de Y à X est de $(a + d + d)$ km, ou $(a + 2d)$ km.
Puisque E et A mettent le même temps pour effectuer ces trajets, alors $\dfrac{a}{6} = \dfrac{a + 2d}{90}$, d'où $15a = a + 2d$, ou $7a = d$.

Pendant que D marche de Y à Q à une vitesse de 6 km/h, A se rend de Y à X et de X à Q à une vitesse de 90 km/h.
Or, la distance de Y à Q est de b km, tandis que la distance de Y à X et de X à Q est de $(d + d + b)$ km, ou $(b + 2d)$ km.
Puisque D et A mettent le même temps pour effectuer ces trajets, alors $\dfrac{b}{6} = \dfrac{b + 2d}{90}$, d'où $15b = b + 2d$, ou $7b = d$.

Donc $d = 7a = 7b$. On peut conclure que $b = a$.
La distance totale de P à Q est égale à $(a + d + b)$ km, ou $(a + 7a + a)$ km, ou $9a$ km.
Or, on sait que cette distance est de 135 km. Donc $9a = 135$, ou $a = 15$.
On rappelle que A se déplace de P à Y à X à Q, une distance de $[(a + 7a) + 7a + (7a + a)]$ km, ou $23a$ km.
Puisque $a = 15$ km et que A se déplace à une vitesse de 90 km/h, le temps qu'elle met pour effectuer cette stratégie est égal à $\frac{23 \times 15}{90}$ h, ou $\frac{23}{6}$ h, ou environ 3,83 h.
Puisque cette stratégie prend 3,83 h, alors la plus petite valeur possible de t ne peut dépasser 3,83 h. Peux-tu expliquer pourquoi il s'agit bien de la plus petite valeur possible de t ?

Si on n'avait pas pensé à la stratégie précédente, on aurait pu penser à la suivante :

A et D montent en moto, tandis que E marche.
A et D se rendent jusqu'au point Q.
A laisse D au point Q et retourne rencoutrer E qui marche toujours.
D laisse E monter sur la moto et les deux se rendent à Q. (D se repose au point Q.)

Cette stratégie met 4,125 h, ce qui est supérieur au temps requis par la stratégie précédente, car D ne bouge pas pendant un certain temps.

Réponse : (A)

24. Les six sommes possibles sont $w+x$, $w+y$, $w+z$, $x+y$, $x+z$ et $y+z$.
Puisque $x<y$, alors $w+x<w+y$.
Puisque $w<x$, alors $w+y<x+y$.
Puisque $y<z$, alors $x+y<x+z$.
Puisque $x<y$, alors $x+z<y+z$.
On a donc $w+x<w+y<x+y<x+z<y+z$.
Cette inégalité contient toutes les sommes possibles à l'exception de $w+z$.
Or puisque $y<z$ et $w<x$, alors $w+y<w+z<x+z$, mais on ne peut savoir laquelle des expressions $x+y$ et $w+z$ est la plus grande.
On sait donc que $w+x$ est toujours la plus petite somme et que $w+y$ est toujours la deuxième plus petite somme. On sait aussi que les troisième et quatrième plus petites sommes sont $w+z$ et $x+y$ dans un ordre quelconque.
Donc $w+x=1$ et $w+y=2$. De plus, $w+z=3$ et $x+y=4$ ou bien $w+z=4$ et $x+y=3$.
D'après les deux premières équations, on a $(w+y)-(w+x)=2-1$, d'où $y-x=1$.

<u>1er cas : $w+z=3$ et $x+y=4$</u>
Puisque $y-x=1$ et $x+y=4$, on obtient par addition $2y=5$, ou $y=\frac{5}{2}$.
Puisque $w+y=2$, alors $w=2-y$, d'où $w=2-\frac{5}{2}$, ou $w=-\frac{1}{2}$.
Puisque $w+z=3$, alors $z=3-w$, d'où $z=3-(-\frac{1}{2})$, ou $z=\frac{7}{2}$.
Puisque $x+y=4$, alors $x=4-y$, d'où $x=4-\frac{5}{2}$, ou $x=\frac{3}{2}$.
On a donc $w=-\frac{1}{2}$, $x=\frac{3}{2}$, $y=\frac{5}{2}$ et $z=\frac{7}{2}$.
On peut vérifier que les six sommes sont $1,2,3,4,5,6$ et qu'elles sont toutes différentes.

<u>2e cas : $w+z=4$ et $x+y=3$</u>
Puisque $y-x=1$ et $x+y=3$, on obtient par addition $2y=4$, ou $y=2$.
Puisque $w+y=2$, alors $w=2-y$, d'où $w=2-2$, ou $w=0$.
Puisque $w+z=4$, alors $z=4-w$, d'où $z=4-0$, ou $z=4$.
Puisque $x+y=3$, alors $x=3-y$, d'où $x=3-2$, ou $x=1$.
On a donc $w=0$, $x=1$, $y=2$ et $z=4$.
On peut vérifier que les six sommes sont $1,2,3,4,5,6$ et qu'elles sont toutes différentes.

Les deux valeurs possibles de z sont donc 4 et $\frac{7}{2}$.
Leur somme est égale à $4+\frac{7}{2}$, ou $\frac{15}{2}$.

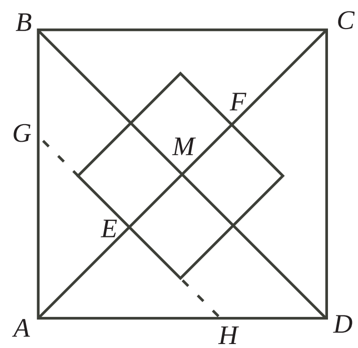
Réponse : (D)

25. On obtient la plus petite hauteur possible de la pyramide lorsque ses quatre faces latérales touchent les cercles qui forment les bases du cylindre. (On peut imaginer que l'apex (le sommet opposé à la base) de la pyramide était plutôt élevé et qu'on le baisse graduellement. Éventuellement, chaque face latérale toucherait une des extrémités circulaires du cylindre. L'apex de la pyramide ne pourrait pas baisser davantage sans qu'une partie du cylindre ne soit à

l'extérieur de la pyramide. La pyramide aurait donc atteint la hauteur minimale.) On détermine donc cette hauteur.

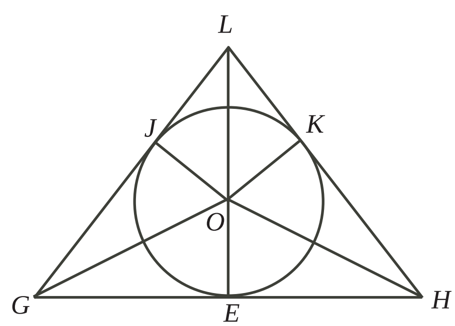
Soit $ABCD$ la base carré de la pyramide et T son apex.
On trace les diagonales AC et BD de la base. Soit M leur point d'intersection. Ce point est donc le centre de la base
Puisque la base a des côtés de longueur 20, alors $AC = BD = 20\sqrt{2}$.
Puisque les diagonales se coupent en leur milieu, alors $AM = BM = CM = DM = 10\sqrt{2}$.
On sait que T est situé directement au-dessus de M.
Soit t la hauteur de la pyramide. Donc $t = TM$. On veut déterminer la valeur de t.

On suppose que l'axe central du cylindre est situé au-dessus de AC.
Puisque le milieu de cet axe central est situé au-dessus de M, alors l'axe central s'étend de part et d'autre de M sur une distance de 5.
Soit E et F les points sur AC aux extrémités du cylindre. Puisque $AM = CM = 10\sqrt{2}$ et que $EM = MF = 5$, alors $AE = CF = 10\sqrt{2} - 5$.



Vu du dessus, le cylindre a l'apparence d'un carré, car il a une hauteur et un diamètre de 10.

On imagine le plan vertical qui contient la base du cylindre au point E. Ce plan coupe la pyramide pour former un triangle :

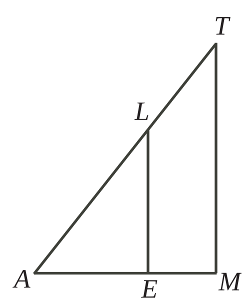


Soit L le point où le plan coupe l'arête AT et soit G et H les points respectifs où le plan coupe AB et AD. Ces points G et H correspondent à ceux de la première figure.
Puisque $\angle BAM = 45°$ et que la base du cylindre est perpendiculaire à la diagonale de la base carrée, alors le triangle GEA est isocèle et rectangle (tout comme le triangle HEA). Donc $GE = HE = AE = 10\sqrt{2} - 5$.
Soit O le centre de la base du cylindre.
On sait que les segments GL et HL sont situés sur les faces latérales respectives ABT et ADT de la pyramide.
Puisque ces faces ABT et ADT touchent le cercle qui forme la base du cylindre, GL et HL sont tangents à ce cercle aux points respectifs J et K.
On joint O aux points G, H et L.

De plus, on joint O aux points J, K et E. Les segments OJ, OK et OE sont des rayons du cercle qui forme la base. Chacun a donc une longueur de 5.
Puisque le cercle est tangent à des faces de la pyramide à ces points, chacun des segments OJ, OK et OE est perpendiculaire à un côté du triangle GHL.
On cherche la longueur de LE.
Puisque GE et GJ sont des tangentes à un cercle menées d'un même point, alors $GJ = GE = 10\sqrt{2} - 5$.
Soit $LE = h$. Donc $LO = h - 5$. Soit $LJ = x$.
Les triangles LJO et LEG sont semblables, puisqu'ils sont rectangles et qu'ils partagent un angle aigu L.
Donc $\dfrac{LJ}{JO} = \dfrac{LE}{EG}$, d'où $\dfrac{x}{5} = \dfrac{h}{10\sqrt{2}-5}$, ou $x = \dfrac{5h}{10\sqrt{2}-5}$, ou $x = \dfrac{h}{2\sqrt{2}-1}$.
Puisque les triangles sont semblables, on a aussi $\dfrac{LG}{GE} = \dfrac{LO}{OJ}$.
Donc $\dfrac{x + (10\sqrt{2}-5)}{10\sqrt{2}-5} = \dfrac{h-5}{5}$, ou $x + (10\sqrt{2}-5) = (2\sqrt{2}-1)(h-5)$.
On reporte $x = \dfrac{h}{2\sqrt{2}-1}$ dans cette dernière équation pour obtenir :

$$\begin{aligned}
\frac{h}{2\sqrt{2}-1} + (10\sqrt{2}-5) &= (2\sqrt{2}-1)(h-5) \\
h + 5(2\sqrt{2}-1)^2 &= (2\sqrt{2}-1)^2(h-5) \\
h + 5(2\sqrt{2}-1)^2 &= (9-4\sqrt{2})h - 5(2\sqrt{2}-1)^2 \\
10(2\sqrt{2}-1)^2 &= (8-4\sqrt{2})h \\
h &= \frac{10(2\sqrt{2}-1)^2}{8-4\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Pour déterminer la valeur de t, on considère le triangle AMT.



On sait que E est situé sur AM et que L est situé sur AT.
De plus, TM est perpendiculaire à AM et LE est perpendiculaire à AE. Les triangles AEL et AMT sont donc semblables.
Donc $\dfrac{TM}{AM} = \dfrac{LE}{AE}$, ou $\dfrac{t}{10\sqrt{2}} = \dfrac{h}{10\sqrt{2}-5}$. Donc :

$$t = \frac{10\sqrt{2}}{5(2\sqrt{2}-1)} \cdot \frac{10(2\sqrt{2}-1)^2}{8-4\sqrt{2}} = \frac{20\sqrt{2}(2\sqrt{2}-1)}{8-4\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}(2\sqrt{2}-1)}{2-\sqrt{2}} \approx 22{,}07$$

Parmi les choix de réponse, la plus petite hauteur possible de la pyramide est plus près de 22,1.

Réponse : (B)