Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

Concours Euclide 2011

le mardi 12 avril 2011

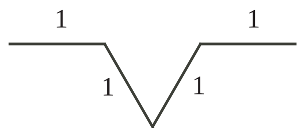
Solutions

1. (a) Puisque $(x+1)+(x+2)+(x+3) = 8+9+10$, alors $3x+6 = 27$, d'où $3x = 21$, ou $x = 7$.

   (b) Puisque $\sqrt{25+\sqrt{x}} = 6$, alors le carré du membre de gauche est égal au carré du membre de droite. Donc $25+\sqrt{x} = 36$, d'où $\sqrt{x} = 11$.
   Puisque $\sqrt{x} = 11$, alors $x = 121$.
   On vérifie : $\sqrt{25+\sqrt{121}} = \sqrt{25+11} = \sqrt{36} = 6$

   (c) Puisque le point $(a, 2)$ est le point d'intersection des droites d'équations $y = 2x - 4$ et $y = x + k$, les coordonnées de ce point doivent vérifier les deux équations.
   D'après la première équation, on a $2 = 2a - 4$, d'où $2a = 6$, ou $a = 3$.
   Les coordonnées $(3, 2)$ vérifient aussi l'équation $y = x + k$. Donc $2 = 3 + k$, d'où $k = -1$.

2. (a) Puisque le carré a des côtés de longueur 3 et qu'on a enlevé de chaque côté un triangle équilatéral ayant des côtés de longueur 1, alors les deux parties qui restent de chaque côté du carré ont chacune une longueur de 1.
   De plus, les deux côtés de chaque triangle équilatéral ont une longueur de 1, comme l'indique la figure suivante.



   Chacun des 16 segments qui forment la figure a donc une longueur de 1. La figure a donc un périmètre de 16.

   (b) Puisque $DC = DB$, le triangle CDB est isocèle et $\angle DBC = \angle DCB = 15°$.
   Donc $\angle CDB = 180° - \angle DBC - \angle DCB$, d'où $\angle CDB = 150°$.
   Les trois angles au point D forment un angle plein. Donc :

$$\angle ADC = 360° - \angle ADB - \angle CDB = 360° - 130° - 150° = 80°$$

   (c) D'après le théorème de Pythagore dans le triangle EAD, on a $EA^2 + AD^2 = ED^2$, ou $12^2 + AD^2 = 13^2$. Puisque $AD > 0$, $AD = \sqrt{169-144}$, ou $AD = 5$.
   D'après le théorème de Pythagore dans le triangle ACD, on a $AC^2 + CD^2 = AD^2$, ou $AC^2 + 4^2 = 5^2$. Puisque $AC > 0$, $AC = \sqrt{25-16}$, ou $AC = 3$.
   (On aurait pu déterminer la longueur de AD et celle de AC en reconnaissant les triangles rectangles remarquables 3-4-5 et 5-12-13.)
   D'après le théorème de Pythagore dans le triangle ABC, on a $AB^2 + BC^2 = AC^2$, ou $AB^2 + 2^2 = 3^2$. Puisque $AB > 0$, $AB = \sqrt{9-4}$, ou $AB = \sqrt{5}$.

3. (a) *Solution 1*
   Pour que la valeur de $15 - \dfrac{y}{x}$ soit aussi grande que possible, il faut soustraire le moins possible de 15. On veut donc que $\dfrac{y}{x}$ prenne une valeur aussi petite que possible.
   Or, le numérateur et le dénominateur sont positifs. La fraction prend sa valeur minimale lorsque le numérateur est aussi petit que possible et que le dénominateur est aussi grand que possible.
   Puisque $2 \le x \le 5$ et $10 \le y \le 20$, on choisit donc $x = 5$ et $y = 10$.
   La valeur maximale de $15 - \dfrac{y}{x}$ est donc égale à $15 - \dfrac{10}{5}$, ou 13.

Solution 2
Puisque y est positif et que $2 \leq x \leq 5$, alors $15 - \dfrac{y}{x} \leq 15 - \dfrac{y}{5}$ pour tout x dans l'intervalle $2 \leq x \leq 5$.
Puisque $10 \leq y \leq 20$, alors $15 - \dfrac{y}{5} \leq 15 - \dfrac{10}{5}$ pour tout y dans l'intervalle $10 \leq y \leq 20$.
Donc pour tout x et tout y dans ces intervalles, on a $15 - \dfrac{y}{x} \leq 15 - \dfrac{10}{5}$, ou $15 - \dfrac{y}{x} \leq 13$.
La valeur maximale est donc égale à 13 (que l'on obtient lorsque $x = 5$ et $y = 10$).

(b) *Solution 1*
On additionne les deux équations, membre par membre, pour obtenir

$$(f(x) + g(x)) + (f(x) - g(x)) = (3x + 5) + (5x + 7),$$

ou $2f(x) = 8x + 12$, d'où $f(x) = 4x + 6$.
Puisque $f(x) + g(x) = 3x + 5$, alors $g(x) = 3x + 5 - f(x)$, d'où $g(x) = 3x + 5 - (4x + 6)$, ou $g(x) = -x - 1$.
(On peut aussi déterminer $g(x)$ en soustrayant les deux équations, membre par membre, puis en utilisant la deuxième des équations données.)
Puisque $f(x) = 4x + 6$, alors $f(2) = 14$.
Puisque $g(x) = -x - 1$, alors $g(2) = -3$.
Donc $2f(2)g(2) = 2 \times 14 \times (-3)$, ou $2f(2)g(2) = -84$.

Solution 2
Puisque les fonctions f et g vérifient les deux équations pour toutes les valeurs de x, on pose $x = 2$ pour obtenir :

$$\begin{aligned} f(2) + g(2) &= 11 \\ f(2) - g(2) &= 17 \end{aligned}$$

On additionne les deux équations, membre par membre, pour obtenir $2f(2) = 28$, ou $f(2) = 14$.
Puisque $f(2) + g(2) = 11$, alors $g(2) = 11 - f(2)$. Donc $g(2) = 11 - 14$, ou $g(2) = -3$.
(On peut aussi déterminer $g(2)$ en soustrayant les deux équations, membre par membre, puis en utilisant la deuxième des équations données.)
Donc $2f(2)g(2) = 2 \times 14 \times (-3)$, ou $2f(2)g(2) = -84$.

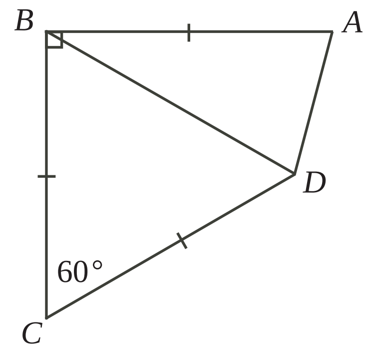
4. (a) On considère le choix de trois nombres à la fois.
Voici les ensembles possibles qui peuvent être choisis :

$\{1, 2, 3\}$ $\{1, 2, 4\}$ $\{1, 2, 5\}$ $\{1, 3, 4\}$ $\{1, 3, 5\}$ $\{1, 4, 5\}$ $\{2, 3, 4\}$ $\{2, 3, 5\}$ $\{2, 4, 5\}$ $\{3, 4, 5\}$

Dans chaque cas, les trois nombres ont été placés en ordre croissant, comme on doit le faire selon l'énoncé.
Il y a donc 10 ensembles possibles de trois nombres qui peuvent être choisis.
Parmi ces ensembles, 4 forment une suite arithmétique, soit $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 3, 5\}$, $\{2, 3, 4\}$ et $\{3, 4, 5\}$.
Donc, la probabilité pour que les trois nombres choisis forment une suite arithmétique est égale à $\frac{4}{10}$, ou $\frac{2}{5}$.

(b) *Solution 1*

On joint les points B et D.



On considère le triangle CBD.
Puisque $CB = CD$, alors $\angle CBD = \angle CDB = \frac{1}{2}(180° - \angle BCD)$,
d'où $\angle CBD = \frac{1}{2}(180° - 60°)$, ou $\angle CBD = 60°$.
Le triangle BCD est donc équilateral, d'où $BD = BC = CD = 6$.
On considère le triangle DBA.
On a $\angle DBA = 90° - \angle CBD$. Donc $\angle DBA = 90° - 60°$, ou $\angle DBA = 30°$.
Puisque $BD = BA = 6$, alors $\angle BDA = \angle BAD = \frac{1}{2}(180° - \angle DBA)$.
Donc $\angle BDA = \angle BAD = \frac{1}{2}(180° - 30°)$, ou $\angle BDA = \angle BAD = 75°$.
On calcule la longueur de AD.

<u>1re méthode</u>

D'après la loi des sinus dans le triangle DBA, on a $\dfrac{AD}{\sin(\angle DBA)} = \dfrac{BA}{\sin(\angle BDA)}$.
Donc $AD = \dfrac{6\sin(30°)}{\sin(75°)}$, d'où $AD = \dfrac{6 \times \frac{1}{2}}{\sin(75°)}$, ou $AD = \dfrac{3}{\sin(75°)}$.

<u>2e méthode</u>

Au point B, on abaisse une perpendiculaire BP à AD. Puisque le triangle BDA est isocèle, P est le milieu de AD. Donc $AD = 2AP$.
Or, BP est aussi la bissectrice de l'angle DBA. Donc $\angle ABP = 15°$.
De plus, $AP = BA\sin(\angle ABP)$, d'où $AP = 6\sin(15°)$.
Donc $AD = 2AP$, d'où $AD = 12\sin(15°)$.

<u>3e méthode</u>

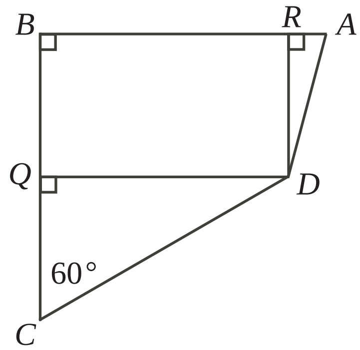
On utilise la loi du cosinus dans le triangle DBA :

$$\begin{aligned} AD^2 &= AB^2 + BD^2 - 2(AB)(BD)\cos(\angle ABD) \\ &= 6^2 + 6^2 - 2(6)(6)\cos(30°) \\ &= 72 - 72(\tfrac{\sqrt{3}}{2}) \\ &= 72 - 36\sqrt{3} \end{aligned}$$

Puisque $AD > 0$, alors $AD = \sqrt{36(2-\sqrt{3})}$, ou $AD = 6\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

Solution 2

Au point D, on abaisse des perpendiculaires respectives DQ et DR à BC et à BA.



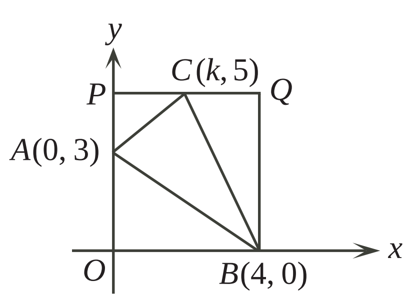
Donc $CQ = CD\cos(\angle DCQ)$, d'où $CQ = 6\cos(60°)$, ou $CQ = 6 \times \frac{1}{2}$, ou $CQ = 3$.
De plus, $DQ = CD\sin(\angle DCQ)$, d'où $DQ = 6\sin(60°)$, ou $DQ = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$, ou $DQ = 3\sqrt{3}$.
Puisque $BC = 6$ et que $BQ = BC - CQ$, alors $BQ = 6 - 3$, ou $BQ = 3$.
Puisque le quadrilatère $BQDR$ a trois angles droits, son quatrième angle doit aussi être droit. Il s'agit donc d'un rectangle.
Donc $RD = BQ = 3$ et $RB = DQ = 3\sqrt{3}$.
Puisque $AB = 6$, alors $AR = AB - RB$, d'où $AR = 6 - 3\sqrt{3}$.
Puisque le triangle ARD est rectangle en R, on a, par le théorème de Pythagore (puisque $AD > 0$) :

$$AD = \sqrt{RD^2 + AR^2} = \sqrt{3^2 + (6-3\sqrt{3})^2} = \sqrt{9 + 36 - 36\sqrt{3} + 27} = \sqrt{72 - 36\sqrt{3}}$$

On peut aussi écrire $AD = \sqrt{36(2-\sqrt{3})}$, ou $AD = 6\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

5. (a) Soit n le nombre initial et N le nombre obtenu lorsqu'on renverse l'ordre des chiffres. Puisqu'on cherche le plus grand entier n, on suppose que $n > 0$.
On veut que l'augmentation, de n à N, soit égale à 75 % de la valeur de n. Il faut donc que N soit égal à 175 % de n, c'est-à-dire que $N = \frac{7}{4}n$.
Soit a le chiffre des dizaines du nombre n et b le chiffre des unités. Donc $n = 10a + b$.
Or, b est le chiffre des dizaines du nombre N et a est le chiffre des unités. Donc $N = 10b+a$.
On veut que $10b + a = \frac{7}{4}(10a + b)$, ou $4(10b + a) = 7(10a + b)$. Donc $40b + 4a = 70a + 7b$, ou $33b = 66a$, ou $b = 2a$.
Donc, n'importe quel entier $n = 10a + b$ dont les chiffres vérifient $b = 2a$ satisfait à la condition donnée.
Puisque a et b sont des chiffres, on a $b < 10$, d'où $a < 5$. Les valeurs possibles de n sont 12, 24, 36 et 48.
Le plus grand des nombres est 48.

(b) On inscrit le triangle dans un rectangle en traçant une droite horizontale au point C et une droite verticale au point B. Ces droites se coupent en Q. La droite horizontale coupe l'axe des ordonnées en P.



P a la même ordonnée que C, soit 5. P a donc pour coordonnées $(0, 5)$.
Q a la même abscisse que B et la même ordonnée que C. Q a donc pour coordonnées $(4, 5)$.
Le rectangle $OPQB$ mesure donc 4 sur 5. Il a une aire de 4×5, ou 20.
Or, le rectangle est formé de quatre triangles. La somme de leur aire est donc égale à 20.
On considère chacun de ces triangles :

- Le triangle ABC a une aire de 8 (donné).
- Le triangle AOB est rectangle en O. Il a une base OB de 4 et une hauteur OA de 3. Il a donc une aire de $\frac{1}{2} \times 4 \times 3$, ou 6.
- Le triangle APC est rectangle en P. Il a une base PC de longueur k et une hauteur AP de longueur $5 - 3$, ou 2. Il a donc une aire de $\frac{1}{2} \times k \times 2$, ou k.
- Le triangle CQB est rectangle en Q. Il a une base CQ de longueur $4-k$ et une hauteur QB de longueur $5 - 0$, ou 5. Il a donc une aire de $\frac{1}{2} \times (4 - k) \times 5$, ou $10 - \frac{5}{2}k$.

Puisque la somme de ces aires est égale à 20, alors $8 + 6 + k + 10 - \frac{5}{2}k = 20$, ou $4 = \frac{3}{2}k$, d'où $k = \frac{8}{3}$.

6. (a) *Solution 1*

Soit d km la distance du point A au point B.
Soit v_c la vitesse à laquelle le radeau est déplacé par le courant lorsque Serge ne rame pas, v_r la vitesse à laquelle le radeau avance lorsque Serge rame sans courant, et v_{r+c} la vitesse à laquelle le radeau avance lorsque Serge rame avec le courant.
Lorsque Serge rame avec le courant, le radeau met 18 minutes pour se rendre de A à B. Donc $v_{r+c} = \dfrac{d}{18}$ km/min.
Le radeau met 30 minutes pour se rendre de A à B lorsqu'il se laisse transporter par le courant sans que Serge ne rame. Donc $v_c = \dfrac{d}{30}$ km/min.
Or $v_r = v_{r+c} - v_c = \dfrac{d}{18} - \dfrac{d}{30} = \dfrac{5d}{90} - \dfrac{3d}{90} = \dfrac{2d}{90} = \dfrac{d}{45}$ km/min.
Serge pourrait donc parcourir les d km de A à B en ramant, sans courant, à une vitesse de $\dfrac{d}{45}$ km/min. Il mettrait donc 45 minutes pour déplacer le radeau de A à B en ramant sans courant.

Solution 2

Soit d km la distance du point A au point B, r km/h la vitesse du courant et s km/h la vitesse à laquelle Serge peut déplacer le radeau en ramant sans courant.
Puisque le courant met 30 minutes (ou $\dfrac{1}{2}$ h) pour déplacer le radeau de A à B, alors $\dfrac{d}{r} = \dfrac{1}{2}$.
Lorsque Serge rame avec le courant, la vitesse du radeau est égale à la vitesse du courant plus celle à laquelle le radeau se déplace lorsque Serge rame sans courant, soit $(s + r)$ km/h.
Puisque le radeau met 18 minutes (ou $\dfrac{3}{10}$ h) pour se rendre de A à B lorsque Serge rame avec le courant, alors $\dfrac{d}{r + s} = \dfrac{3}{10}$.

Le temps qu'il faut pour déplacer le radeau de A à B en ramant sans courant est égal à $\dfrac{d}{s}$ h.

Puisque $\dfrac{d}{r}=\dfrac{1}{2}$, alors $\dfrac{r}{d}=2$.

Puisque $\dfrac{d}{r+s}=\dfrac{3}{10}$, alors $\dfrac{r+s}{d}=\dfrac{10}{3}$.

Donc $\dfrac{s}{d}=\dfrac{r+s}{d}-\dfrac{r}{d}$, d'où $\dfrac{s}{d}=\dfrac{10}{3}-2$, ou $\dfrac{s}{d}=\dfrac{4}{3}$.

Donc $\dfrac{d}{s}=\dfrac{3}{4}$. Serge mettrait donc $\dfrac{3}{4}$ d'heure, ou 45 minutes, pour déplacer le radeau de A à B en ramant sans courant.

Solution 3

Soit d km la distance du point A au point B, r km/h la vitesse du courant et s km/h la vitesse à laquelle Serge peut déplacer le radeau en ramant sans courant.

Puisque le courant met 30 minutes (ou $\dfrac{1}{2}$ h) pour déplacer le radeau de A à B, alors $\dfrac{d}{r}=\dfrac{1}{2}$.

Lorsque Serge rame avec le courant, la vitesse du radeau est égale à la vitesse du courant plus celle à laquelle le radeau se déplace lorsque Serge rame sans courant, soit $(s+r)$ km/h.

Puisque le radeau met 18 minutes (ou $\dfrac{3}{10}$ h) pour se rendre de A à B lorsque Serge rame avec le courant, alors $\dfrac{d}{r+s}=\dfrac{3}{10}$, ou $d=\frac{3}{10}(r+s)$.

Puisque $d=\frac{1}{2}r$ et $d=\frac{3}{10}(r+s)$, alors $\frac{1}{2}r=\frac{3}{10}(r+s)$, d'où $5r=3r+3s$, ou $s=\frac{2}{3}r$.

Pour déplacer le radeau de A à B en ramant sans courant, Serge mettrait, $\dfrac{d}{s}$ heures, c'est-à-dire $\dfrac{\frac{1}{2}r}{\frac{2}{3}r}$ h, ou $\dfrac{3}{4}$ h, ou 45 minutes.

(b) Premièrement, on remarque que $a\neq 0$. (Si $a=0$, l'équation $y=a(x-2)(x-6)$ deviendrait $y=0$, ce qui est l'équation de l'axe des abscisses.)

Deuxièmement, quelle que soit la valeur de a ($a\neq 0$), la parabole a pour abscisses à l'origine 2 et 6. Elle coupe donc l'axe des abscisses aux points $(2,0)$ et $(6,0)$. Soit $K(2,0)$ et $L(6,0)$. On a donc $KL=4$.

Troisièmement, puisque la parabole a pour abscisses à l'origine 2 et 6, alors par symétrie, le sommet de la parabole a pour abscisse $\frac{1}{2}(2+6)$, ou 4. L'axe de symétrie de la parabole a donc pour équation $x=4$.

Puisque l'axe de symétrie de la parabole est vertical, alors si la parabole coupe les deux côtés verticaux du carré, les points d'intersection seront à la même hauteur. De même, si la parabole coupe le côté horizontal supérieur du carré, les points d'intersection seront à la même hauteur. Dans chaque cas, les points d'intersection seront à la même distance de l'axe de symétrie qui a pour équation $x=4$.

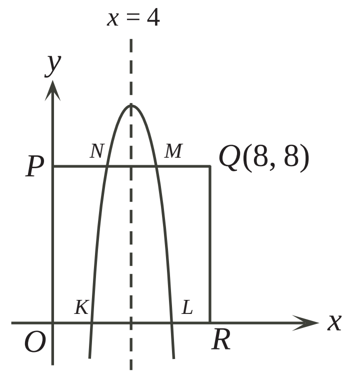
Quatrièmement, on rappelle qu'un trapèze dont les bases ont pour longueurs a et b a une aire égale à $\frac{1}{2}h(a+b)$, h étant la hauteur.

On considère trois cas.

1$^{\text{er}}$ cas : $a < 0$

La parabole est ouverte vers le bas.

Puisque la parabole coupe le carré en quatre points, elle doit couper PQ aux points M et N. (Elle ne peut pas couper les côtés verticaux du carré, puisque en montant, les points de la parabole se rapprochent de l'axe de symétrie.)



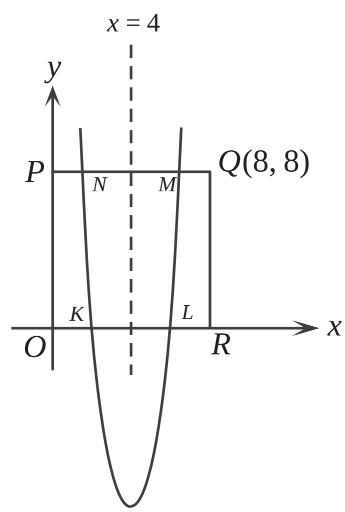
Puisque la parabole est ouverte vers le bas, on a $MN < KL = 4$.

Puisque la hauteur du trapèze est la même que celle du carré, soit 8, alors l'aire du trapèze, qui est égale à $\frac{1}{2}h(KL + MN)$, doit être inférieure à $\frac{1}{2}(8)(4 + 4)$, ou 32.

Puisque l'aire doit être égale à 36, ce cas n'est pas possible.

2$^{\text{e}}$ cas : $a > 0$; M et N situés sur PQ

Il s'agit de la situation suivante :



Le trapèze a une hauteur de 8 ; $KL = 4$; M est le symétrique de N par rapport à l'axe de symétrie d'équation $x = 4$.

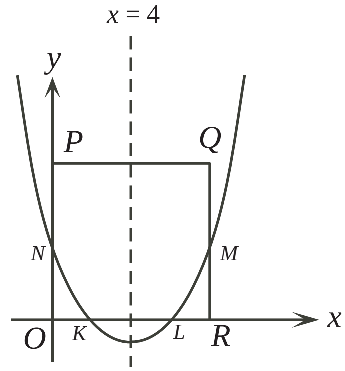
Puisque le trapèze a une aire de 36, alors $\frac{1}{2}h(KL + MN) = 36$, d'où $\frac{1}{2}(8)(4 + MN) = 36$, ou $4 + MN = 9$, ou $MN = 5$.

M et N sont donc situés à $\frac{5}{2}$ unités de l'axe de symétrie. N a donc pour coordonnées $(\frac{3}{2}, 8)$.

Puisque ce point est sur la parabole, ses coordonnées vérifient l'équation $y = a(x-2)(x-6)$. Donc $8 = a(\frac{3}{2} - 2)(\frac{3}{2} - 6)$, d'où $8 = a(-\frac{1}{2})(-\frac{9}{2})$, ou $8 = \frac{9}{4}a$, ou $a = \frac{32}{9}$.

<u>3e cas : $a > 0$; M et N sont situés sur QR et PO respectivement</u>

Il s'agit de la situation suivante :



On a $KL = 4$ et $MN = 8$. De plus, M et N ont la même ordonnée.

Puisque le trapèze a une aire de 36, alors $\frac{1}{2}h(KL + MN) = 36$, d'où $\frac{1}{2}h(4 + 8) = 36$, ou $6h = 36$, ou $h = 6$.

N a donc pour coordonnées $(0, 6)$.

Puisque ce point est sur la parabole, ses coordonnées vérifient l'équation $y = a(x-2)(x-6)$. Donc $6 = a(0 - 2)(0 - 6)$, ou $6 = 12a$, ou $a = \frac{1}{2}$.

Les valeurs possibles de a sont donc $\frac{32}{9}$ et $\frac{1}{2}$.

7. (a) *Solution 1*

On considère une population de 100 personnes de 75 ans.

Les chances pour que ces 100 personnes vivent au moins 10 ans de plus sont de 50 %. Donc dans 10 ans, il restera 50 personnes (50 % de 100 personnes). Elles auront 85 ans.

Les chances pour que les 100 mêmes personnes vivent au moins 15 ans de plus sont de 20 %. Donc dans 15 ans, il restera 20 personnes. Elles auront 90 ans.

Les chances pour qu'une personne de 80 ans vive au moins 10 ans de plus sont de 25 %, ou de $\frac{1}{4}$. Donc, $\frac{1}{4}$ des personnes de 80 ans vivront jusqu'à 90 ans. Puisque 20 des 100 personnes initiales vivront jusqu'à 90 ans, il y en a 80 (4 fois plus) qui vivront jusqu'à 80 ans.

Pour résumer, parmi les 100 personnes de 75 ans, il y en aura 80 qui seront vivantes à l'âge de 80 ans, 50 qui seront vivantes à l'âge de 85 ans et 20 qui seront vivantes à l'âge de 90 ans.

Puisque 50 des 80 personnes vivantes à l'âge de 80 ans seront encoure vivantes à l'âge de 85 ans, la probabilité pour qu'une personne de 80 ans vive au moins 5 ans de plus est de $\frac{50}{80}$, ou $\frac{5}{8}$, ou 62,5 %.

Solution 2

Soit p la probabilité pour qu'une personne de 75 ans vive jusqu'à l'âge de 80 ans, q la probabilité pour qu'une personne de 80 ans vive jusqu'à l'âge de 85 ans et r la probabilité pour qu'une personne de 85 ans vive jusqu'à l'âge de 90 ans.

On cherche la valeur de q.

Pour qu'une personne de 75 ans vive au moins 10 ans de plus, elle doit vivre 5 ans de plus (jusqu'à l'âge de 80 ans), puis 5 ans de plus (jusqu'à l'âge de 85 ans). La probabilité pour que cela se produise est égale à pq. Or dans l'énoncé, on dit que cette probabilité est égale à 50 %, ou 0,5. Donc $pq = 0{,}5$.

Pour qu'une personne de 75 ans vive au moins 15 ans de plus, elle doit vivre 5 ans de plus (jusqu'à l'âge de 80 ans), puis 5 ans de plus (jusqu'à l'âge de 85 ans) et 5 ans de plus

(jusqu'à l'âge de 90 ans). La probabilité pour que cela se produise est égale à pqr. Or dans l'énoncé, on dit que cette probabilité est égale à 20 %, ou 0,2. Donc $pqr = 0{,}2$
De même, la probabilité pour qu'une personne de 80 ans vive 10 ans de plus est de 25 %. Donc $qr = 0{,}25$.
Puisque $pqr = 0{,}2$ et $pq = 0{,}5$, alors $r = \dfrac{pqr}{pq}$, d'où $r = \dfrac{0{,}2}{0{,}5}$, ou $r = 0{,}4$.
Puisque $qr = 0{,}25$ et $r = 0{,}4$, alors $q = \dfrac{qr}{r}$, d'où $q = \dfrac{0{,}25}{0{,}4}$, ou $q = 0{,}625$.
Donc, la probabilité pour qu'une personne de 80 ans vive au moins 5 ans de plus est de 0,625, ou 62,5 %.

(b) D'après les lois des logarithmes, l'équation donnée est équivalente à
$2^{2\log_{10} x} = 3(2 \cdot 2^{\log_{10} x}) + 16$, ou $(2^{\log_{10} x})^2 = 6 \cdot 2^{\log_{10} x} + 16$.
Posons $u = 2^{\log_{10} x}$. L'équation devient $u^2 = 6u + 16$, ou $u^2 - 6u - 16 = 0$.
On factorise pour obtenir $(u - 8)(u + 2) = 0$, d'où $u = 8$ ou $u = -2$.
Puisque $2^a > 0$ pour tout nombre réel a, alors $u > 0$. On rejette donc $u = -2$.
On a donc $u = 8$, ou $2^{\log_{10} x} = 8$, d'où $\log_{10} x = 3$.
Donc $x = 1000$.

8. (a) On détermine d'abord le premier nombre de la 50e rangée.
Puisque les nombres de la 1re colonne forment une suite arithmétique avec une raison de 3, alors le 50e nombre de la 1re colonne (c.-à-d. le premier nombre de la 50e rangée) est égal à $4 + 49(3)$, ou 151.
On détermine ensuite la raison de la suite arithmétique formée par les nombres de la 50e rangée en déterminant le 2e nombre de la 50e rangée.
Puisque les nombres de la 2e colonne forment une suite arithmétique avec une raison de 5, alors le 50e nombre de la 2e colonne (c.-à-d. le 2e nombre de la 50e rangée) est égal à $7 + 49(5)$, ou 252.
La suite arithmétique formée par les nombres de la 50e rangée a donc une raison égale à $252 - 151$, ou 101.
Le 40e nombre de la 50e rangée (c.-à-d. le nombre situé dans la 50e rangée et dans la 40e colonne) est donc égal à $151 + 39(101)$, ou 4090.

(b) On utilise la même méthode que dans la partie (a).
On détermine d'abord le premier nombre de la $R^{\text{ième}}$ rangée.
Puisque les nombres de la 1re colonne forment une suite arithmétique avec une raison de 3, alors le $R^{\text{ième}}$ nombre de la 1re colonne (c.-à-d. le premier nombre de la $R^{\text{ième}}$ rangée) est égal à $4 + (R - 1)(3)$, ou $4 + 3R - 3$, ou $3R + 1$.
On détermine ensuite la raison de la suite arithmétique formée par les nombres de la $R^{\text{ième}}$ rangée en déterminant le 2e nombre de la $R^{\text{ième}}$ rangée.
Puisque les nombres de la 2e colonne forment une suite arithmétique avec une raison de 5, alors le $R^{\text{ième}}$ nombre de la 2e colonne (c.-à-d. le 2e nombre de la $R^{\text{ième}}$ rangée) est égal à $7 + (R - 1)(5)$, ou $7 + 5R - 5$, ou $5R + 2$.
La suite arithmétique formée par les nombres de la $R^{\text{ième}}$ rangée a donc une raison égale à $(5R + 2) - (3R + 1)$, ou $2R + 1$.
Donc, le $C^{\text{ième}}$ nombre de la $R^{\text{ième}}$ rangée (c.-à-d. le nombre situé dans la $R^{\text{ième}}$ rangée et dans la $C^{\text{ième}}$ colonne) est égal à :

$$3R + 1 + (C - 1)(2R + 1) = 3R + 1 + 2RC + C - 2R - 1 = 2RC + R + C$$

(c) Soit N un terme du tableau, situé dans la $R^{\text{ième}}$ rangée et dans la $C^{\text{ième}}$ colonne.
D'après la partie (b), $N = 2RC + R + C$ et $2N + 1 = 4RC + 2R + 2C + 1$.
Or $4RC + 2R + 2C + 1 = 2R(2C + 1) + 2C + 1 = (2R + 1)(2C + 1)$.
Puisque R et C sont des entiers et que $R \geq 1$ et $C \geq 1$, alors $2R + 1$ et $2C + 1$ sont des entiers, chacun supérieur ou égal à 3.
Donc $2N + 1$, qui est égal à $(2R + 1)(2C + 1)$, est le produit de deux entiers supérieurs à 1. Il est donc un nombre composé.

9. (a) Si $n = 2011$, alors $8n - 7 = 16\,081$. Donc $\sqrt{8n-7} \approx 126{,}81$.
Donc $\dfrac{1+\sqrt{8n-7}}{2} \approx \dfrac{1+126{,}81}{2} \approx 63{,}9$.
Donc $g(2011) = 2(2011) + \left\lfloor \dfrac{1+\sqrt{8(2011)-7}}{2} \right\rfloor = 4022 + \lfloor 63{,}9 \rfloor = 4022 + 63 = 4085$.

(b) On cherche une valeur de n pour laquelle $f(n) = 100$, c'est-à-dire pour laquelle :

$$2n - \left\lfloor \frac{1+\sqrt{8n-7}}{2} \right\rfloor = 100 \qquad (*)$$

On résout d'abord l'équation

$$2x - \frac{1+\sqrt{8x-7}}{2} = 100 \qquad (**)$$

parce que les membres de gauche de $(*)$ et de $(**)$ sont assez semblables et les solutions respectives devraient être assez rapprochées les unes des autres. On considérera des entiers n qui sont près des solutions de l'équation $(**)$ et on vérifiera si ce sont des solutions de l'équation $(*)$. L'équation $(**)$ devient :

$$\begin{aligned}
4x - (1 + \sqrt{8x-7}) &= 200 \\
4x - 201 &= \sqrt{8x-7} \\
(4x-201)^2 &= 8x - 7 \\
16x^2 - 1608x + 40\,401 &= 8x - 7 \\
16x^2 - 1616x + 40\,408 &= 0 \\
2x^2 - 202x + 5051 &= 0
\end{aligned}$$

Donc :

$$x = \frac{202 \pm \sqrt{202^2 - 4(2)(5051)}}{2(2)} = \frac{202 \pm \sqrt{396}}{4} = \frac{101 \pm \sqrt{99}}{2}$$

d'où $x \approx 55{,}47$ ou $x \approx 45{,}53$.
On vérifie si $n = 55$, qui est près de 55,47, satisfait à l'équation $(*)$:

$$f(55) = 2(55) - \left\lfloor \frac{1+\sqrt{8(55)-7}}{2} \right\rfloor = 110 - \left\lfloor \frac{1+\sqrt{433}}{2} \right\rfloor$$

Puisque $\sqrt{433} \approx 20{,}8$, alors $\dfrac{1+\sqrt{433}}{2} \approx 10{,}9$, d'où $\left\lfloor \dfrac{1+\sqrt{433}}{2} \right\rfloor = 10$.
Donc $f(55) = 110 - 10$, ou $f(55) = 100$.
Donc, 55 est une valeur de n pour laquelle $f(n) = 100$.

(c) On veut démontrer que chaque entier strictement positif m est un élément de l'image de f ou un élément de l'image de g, mais non pas un élément des deux.
On tente d'abord de mieux comprendre, dans l'expression qui définit chaque fonction, le terme qui comprend $\left\lfloor \dfrac{1+\sqrt{8n-7}}{2} \right\rfloor$. Par exemple, étant donné un entier k ($k \geq 1$), on cherche les valeurs entières de n pour lesquelles $\left\lfloor \dfrac{1+\sqrt{8n-7}}{2} \right\rfloor = k$.
D'après la définition de $\lfloor x \rfloor$, l'équation $\left\lfloor \dfrac{1+\sqrt{8n-7}}{2} \right\rfloor = k$ est équivalente à l'inéquation $k \leq \dfrac{1+\sqrt{8n-7}}{2} < k+1$. On a donc :

$$\begin{array}{ccccc} 2k & \leq & 1+\sqrt{8n-7} & < & 2k+2 \\ 2k-1 & \leq & \sqrt{8n-7} & < & 2k+1 \\ 4k^2-4k+1 & \leq & 8n-7 & < & 4k^2+4k+1 \\ 4k^2-4k+8 & \leq & 8n & < & 4k^2+4k+8 \\ \frac{1}{2}(k^2-k)+1 & \leq & n & < & \frac{1}{2}(k^2+k)+1 \end{array}$$

Soit T_k le $k^{\text{ième}}$ nombre triangulaire. Donc $T_k = \frac{1}{2}k(k+1) = \frac{1}{2}(k^2+k)$ ($k \geq 0$) et $T_{k-1} = \frac{1}{2}(k-1)(k) = \frac{1}{2}(k^2-k)$.
Donc $\left\lfloor \dfrac{1+\sqrt{8n-7}}{2} \right\rfloor = k$ lorsque $T_{k-1}+1 \leq n < T_k + 1$.
Puisque n est un entier, alors $\left\lfloor \dfrac{1+\sqrt{8n-7}}{2} \right\rfloor = k$ est vérifié lorsque $T_{k-1}+1 \leq n \leq T_k$.
Lorsque $k=1$, l'intervalle est $T_0+1 \leq n \leq T_1$ (ou $1 \leq n \leq 1$). Lorsque $k=2$, l'intervalle est $T_1+1 \leq n \leq T_2$ (ou $2 \leq n \leq 3$). Lorsque $k=3$, l'intervalle est $T_2+1 \leq n \leq T_3$ (ou $4 \leq n \leq 6$). À mesure que k augmente, les intervalles incluent tous les entiers positifs n et les intervalles ne chevauchent pas.
On peut donc déterminer l'image des fonctions f et g en examinant les valeurs de $f(n)$ et de $g(n)$ lorsque n est situé dans chacun des intervalles.

Pour chaque entier non négatif k, soit $\mathcal{R}_k$ l'ensemble des entiers supérieurs à k^2 et inférieurs ou égaux à $(k+1)^2$. Donc $\mathcal{R}_k = \{k^2+1, k^2+2, \ldots, k^2+2k, k^2+2k+1\}$.
Par exemple, $\mathcal{R}_0 = \{1\}$, $\mathcal{R}_1 = \{2,3,4\}$, $\mathcal{R}_2 = \{5,6,7,8,9\}$, et ainsi de suite. Chaque entier strictement positif paraît dans exactement un de ces ensembles.
Pour chaque entier non négatif k, soit $\mathcal{S}_k = \{k^2+2, k^2+4, \ldots, k^2+2k\}$ et soit $\mathcal{Q}_k = \{k^2+1, k^2+3, \ldots, k^2+2k+1\}$. Par exemple, $\mathcal{S}_0 = \{\}$, $\mathcal{S}_1 = \{3\}$, $\mathcal{S}_2 = \{6,8\}$, $\mathcal{Q}_0 = \{1\}$, $\mathcal{Q}_1 = \{2,4\}$, $\mathcal{Q}_2 = \{5,7,9\}$, et ainsi de suite. On remarque que $\mathcal{R}_k = \mathcal{Q}_k \cup \mathcal{S}_k$ et chaque entier strictement positif paraît dans exactement un des ensembles $\mathcal{Q}_k$ ou dans exactement un des ensembles $\mathcal{S}_k$. Il n'y a aucun chevauchement entre ces ensembles. En effet, il n'y en a aucun entre des ensembles distincts $\mathcal{S}_k$, aucun entre des ensembles distincts $\mathcal{Q}_k$ et aucun entre un ensemble $\mathcal{Q}_k$ et un ensemble $\mathcal{S}_k$.

On détermine d'abord l'image de la fonction g.

Lorsque $T_{k-1}+1 \leq n \leq T_k$, on a $\left\lfloor \dfrac{1+\sqrt{8n-7}}{2} \right\rfloor = k$. Donc :

$$\begin{array}{ccccc} 2T_{k-1}+2 & \leq & 2n & \leq & 2T_k \\ 2T_{k-1}+2+k & \leq & 2n+\left\lfloor \dfrac{1+\sqrt{8n-7}}{2} \right\rfloor & \leq & 2T_k+k \\ k^2-k+2+k & \leq & g(n) & \leq & k^2+k+k \\ k^2+2 & \leq & g(n) & \leq & k^2+2k \end{array}$$

On remarque que lorsque n est dans l'intervalle $T_{k-1}+1 \leq n \leq T_k$ et que sa valeur augmente de 1, la valeur de $2n$ augmente de 2 et celle de $g(n)$ augmente de 2 également (à cause du terme $2n$ dans l'expression qui définit $g(n)$).
Donc pour les valeurs de n dans cet intervalle, les valeurs de $g(n)$ sont $k^2+2, k^2+4, k^2+6, \dots, k^2+2k$. Donc dans cet intervalle, l'image de g est l'ensemble $\mathcal{S}_k$.
À mesure que k prend pour valeurs tous les entiers strictement positifs (c.-à-d. que à mesure que ces intervalles recouvrent le domaine de g), on voit que l'image de g est formée des entiers des ensembles $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3, \dots$ (On pourrait aussi inclure l'ensemble $\mathcal{S}_0$ dans cette liste, puisqu'il s'agit de l'ensemble vide.)

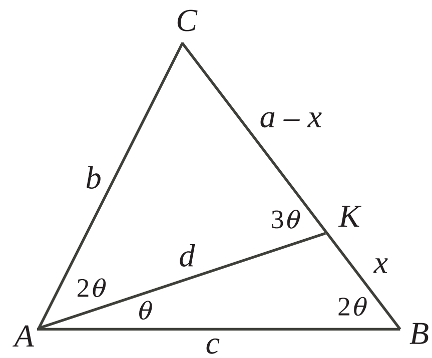
On remarque aussi que $f(1) = 2 - \left\lfloor \dfrac{1+\sqrt{8-7}}{2} \right\rfloor$, ou $f(1) = 1$. Il s'agit du seul élément de l'ensemble $\mathcal{Q}_0$.
Lorsque $k \geq 1$ et $T_k + 1 \leq n \leq T_{k+1}$, on a $\left\lfloor \dfrac{1+\sqrt{8n-7}}{2} \right\rfloor = k+1$, d'où :

$$\begin{array}{ccccc} 2T_k+2 & \leq & 2n & \leq & 2T_{k+1} \\ 2T_k+2-(k+1) & \leq & 2n-\left\lfloor \dfrac{1+\sqrt{8n-7}}{2} \right\rfloor & \leq & 2T_{k+1}-(k+1) \\ k^2+k+2-k-1 & \leq & f(n) & \leq & (k+1)(k+2)-k-1 \\ k^2+1 & \leq & f(n) & \leq & k^2+2k+1 \end{array}$$

On remarque que lorsque n est dans cet intervalle et que sa valeur augmente de 1, la valeur de $2n$ augmente de 2 et celle de $f(n)$ augmente de 2 également.
Donc pour les valeurs de n dans cet intervalle, les valeurs de $f(n)$ sont $k^2+1, k^2+3, k^2+5, \dots, k^2+2k+1$. Donc dans cet intervalle, l'image de f est l'ensemble $\mathcal{Q}_k$.
À mesure que k prend pour valeurs tous les entiers strictement positifs (c.-à-d. que à mesure que ces intervalles recouvrent le domaine de f), on voit que l'image de f est formé des entiers des ensembles $\mathcal{Q}_0, \mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2, \dots$

Donc, l'image de f est formée des entiers des ensembles $\mathcal{Q}_0, \mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2, \dots$ et l'image de g est formée des entiers des ensembles $\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \dots$ Ces images comprennent tous les entiers strictement positifs et ne chevauchent pas.

10. (a) Soit $\angle KAB = \theta$.
Puisque $\angle KAC = 2\angle KAB$, alors $\angle KAC = 2\theta$ et $\angle BAC = \angle KAC + \angle KAB$, ou $\angle BAC = 3\theta$.
Puisque $3\angle ABC = 2\angle BAC$, alors $\angle ABC = \frac{2}{3} \times 3\theta$, ou $\angle ABC = 2\theta$. Puisque l'angle AKC est extérieur au triangle AKB, alors $\angle AKC = \angle KAB + \angle ABC$, d'où $\angle AKC = 3\theta$.
On a donc la situation suivante :



Or, les triangles CAK et CBA sont semblables, puisqu'ils on un angle commun C et que $\angle CAK = \angle CBA$.
Donc $\dfrac{AK}{BA} = \dfrac{CA}{CB}$, ou $\dfrac{d}{c} = \dfrac{b}{a}$, d'où $d = \dfrac{bc}{a}$.
De même, $\dfrac{CK}{CA} = \dfrac{CA}{CB}$, ou $\dfrac{a-x}{b} = \dfrac{b}{a}$, d'où $a - x = \dfrac{b^2}{a}$, ou $x = a - \dfrac{b^2}{a}$, ou $x = \dfrac{a^2 - b^2}{a}$, ce qu'il fallait démontrer.

(b) D'après la partie (a), on a $bc = ad$ et $a^2 - b^2 = ax$. Donc :

$$\text{M.G.} = (a^2 - b^2)(a^2 - b^2 + ac) = (ax)(ax + ac) = a^2 x(x + c)$$

et

$$\text{M.D.} = b^2c^2 = (bc)^2 = (ad)^2 = a^2d^2$$

Pour démontrer que M.G. = M.D., il faut démontrer que $x(x + c) = d^2$ (puisque $a > 0$).

1re méthode : On utilise la loi des sinus.
On développe d'abord une formule pour $\sin 3\theta$, que l'on utilisera par la suite :

$$\begin{aligned}
\sin 3\theta &= \sin(2\theta + \theta) \\
&= \sin 2\theta \cos\theta + \cos 2\theta \sin\theta \\
&= 2\sin\theta\cos^2\theta + (1 - 2\sin^2\theta)\sin\theta \\
&= 2\sin\theta(1 - \sin^2\theta) + (1 - 2\sin^2\theta)\sin\theta \\
&= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta
\end{aligned}$$

Puisque $\angle AKB = 180^\circ - \angle KAB - \angle KBA$, ou $\angle AKB = 180^\circ - 3\theta$, on a, par la loi des sinus dans le triangle AKB :

$$\frac{x}{\sin\theta} = \frac{d}{\sin 2\theta} = \frac{c}{\sin(180^\circ - 3\theta)}$$

Puisque $\sin(180^\circ - X) = \sin X$, alors $\sin(180^\circ - 3\theta) = \sin 3\theta$, d'où $x = \dfrac{d\sin\theta}{\sin 2\theta}$ et $c = \dfrac{d\sin 3\theta}{\sin 2\theta}$. On a donc :

$$\begin{aligned}
x(x + c) &= \frac{d\sin\theta}{\sin 2\theta}\left(\frac{d\sin\theta}{\sin 2\theta} + \frac{d\sin 3\theta}{\sin 2\theta}\right) \\
&= \frac{d^2\sin\theta}{\sin^2 2\theta}(\sin\theta + \sin 3\theta) \\
&= \frac{d^2\sin\theta}{\sin^2 2\theta}(\sin\theta + 3\sin\theta - 4\sin^3\theta)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{d^2\sin\theta}{\sin^2 2\theta}(4\sin\theta - 4\sin^3\theta) \\
&= \frac{4d^2\sin^2\theta}{\sin^2 2\theta}(1-\sin^2\theta) \\
&= \frac{4d^2\sin^2\theta\cos^2\theta}{\sin^2 2\theta} \\
&= \frac{4d^2\sin^2\theta\cos^2\theta}{(2\sin\theta\cos\theta)^2} \\
&= \frac{4d^2\sin^2\theta\cos^2\theta}{4\sin^2\theta\cos^2\theta} \\
&= d^2
\end{aligned}
$$

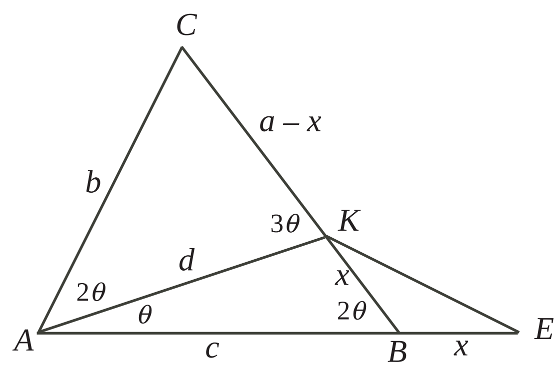
Ceci complète la démonstration.

On aurait pu utiliser la formule $\sin A + \sin B = 2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$ pour démontrer que $\sin 3\theta + \sin\theta = 2\sin 2\theta\cos\theta$, d'où :

$$\sin\theta(\sin 3\theta + \sin\theta) = \sin\theta(2\sin 2\theta\cos\theta) = 2\sin\theta\cos\theta\sin 2\theta = \sin^2 2\theta$$

2e méthode : On prolonge AB.

On prolonge le segment AB jusqu'au point E de manière que $BE = BK = x$. On trace aussi le segment KE.

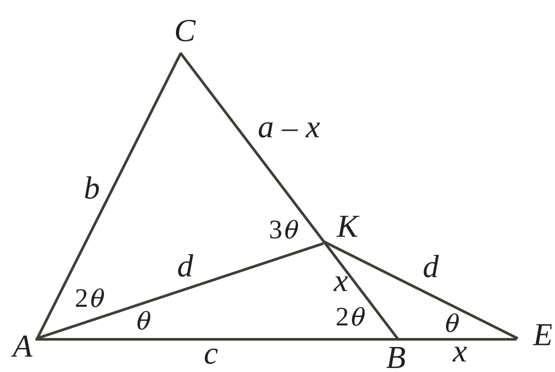


Le triangle KBE est isocèle et on a donc $\angle BKE = \angle KEB$.

Puisque l'angle KBA est extérieur au triangle KBE, alors $\angle KBA = 2\angle KEB$, ou $\angle KBA = 2\theta$.

Donc $\angle KEB = \angle BKE$. Donc $\angle KAE = \angle KEA = \theta$.

Le triangle KAE est donc isocèle et on a $KE = KA = d$.



Les triangles KAE et BKE sont semblables, puisque chacun a deux angles θ.
Donc $\dfrac{KA}{BK} = \dfrac{AE}{KE}$, ou $\dfrac{d}{x} = \dfrac{c+x}{d}$, d'où $d^2 = x(x+c)$.

3^e méthode : On utilise la loi du cosinus et la loi des sinus.
On utilise la loi du cosinus dans le triangle AKB :

$$\begin{aligned}
AK^2 &= BK^2 + BA^2 - 2(BA)(BK)\cos(\angle KBA) \\
d^2 &= x^2 + c^2 - 2cx\cos(2\theta) \\
d^2 &= x^2 + c^2 - 2cx(2\cos^2\theta - 1)
\end{aligned}$$

On utilise la loi des sinus dans le triangle AKB pour obtenir $\dfrac{x}{\sin\theta} = \dfrac{d}{\sin 2\theta}$, ou $\dfrac{\sin 2\theta}{\sin\theta} = \dfrac{d}{x}$, ou $\dfrac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta} = \dfrac{d}{x}$, d'où $\cos\theta = \dfrac{d}{2x}$.
On reporte $\cos\theta = \dfrac{d}{2x}$ dans l'équation $d^2 = x^2 + c^2 - 2cx(2\cos^2\theta - 1)$:

$$\begin{aligned}
d^2 &= x^2 + c^2 - 2cx\left(\frac{2d^2}{4x^2} - 1\right) \\
d^2 &= x^2 + c^2 - \frac{cd^2}{x} + 2cx \\
d^2 + \frac{cd^2}{x} &= x^2 + 2cx + c^2 \\
d^2 + \frac{cd^2}{x} &= (x+c)^2 \\
xd^2 + cd^2 &= x(x+c)^2 \\
d^2(x+c) &= x(x+c)^2 \\
d^2 &= x(x+c) \qquad (\text{puisque } x + c \neq 0)
\end{aligned}$$

(c) *Solution 1*
On cherche un triplet d'entiers positifs qui vérifient l'équation de la partie (b) et qui peuvent être les longueurs des côtés d'un triangle.
On remarque d'abord qu'étant donné un triplet (A, B, C) de nombres réels qui vérifient l'équation de la partie (b) et un autre nombre réel k, alors le triplet (kA, kB, kC) vérifie aussi l'équation de la partie (b). En effet :

$$(k^2A^2 - k^2B^2)(k^2A^2 - k^2B^2 + kAkC) = k^4(A^2 - B^2)(A^2 - B^2 + AC) = k^4(B^2C^2) = (kB)^2(kC)^2$$

On commencera donc par chercher un triplet (a, b, c) de nombres rationnels qui vérifient l'équation de la partie (b) et qui peuvent être les longueurs des côtés d'un triangle, puis on multipliera les nombres par leur dénominateur commun k de manière à obtenir un triplet (ka, kb, kc) d'entiers.
Pour le faire, on récrit l'équation de la partie (b) comme équation du second degré en c et on utilise la formule associée à cette équation pour exprimer c en fonction des autres variables.
On développe partiellement le membre de gauche de cette équation :

$$(a^2 - b^2)(a^2 - b^2) + ac(a^2 - b^2) = b^2c^2$$

On récrit ensuite pour obtenir l'équation :

$$b^2c^2 - c(a(a^2-b^2)) - (a^2-b^2)^2 = 0$$

D'après la formule associée à l'équation du second degré, on a :

$$c = \frac{a(a^2-b^2) \pm \sqrt{a^2(a^2-b^2)^2 + 4b^2(a^2-b^2)^2}}{2b^2} = \frac{a(a^2-b^2) \pm \sqrt{(a^2-b^2)^2(a^2+4b^2)}}{2b^2}$$

Puisque $\angle BAC > \angle ABC$, alors $a > b$, d'où $a^2 - b^2 > 0$. Donc :

$$c = \frac{a(a^2-b^2) \pm (a^2-b^2)\sqrt{a^2+4b^2}}{2b^2} = \frac{(a^2-b^2)}{2b^2}(a \pm \sqrt{a^2+4b^2})$$

Puisque $a^2 + 4b^2 > 0$, alors $\sqrt{a^2+4b^2} > a$. L'expression qui donne une valeur positive de c est donc :

$$c = \frac{(a^2-b^2)}{2b^2}(a + \sqrt{a^2+(2b)^2})$$

On cherche des valeurs entières de a et de b pour lesquelles on obtient une valeur rationnelle de c. On vérifiera ensuite si les nombres du triplet (a, b, c) peuvent former les longueurs des côtés d'un triangle, puis on les multipliera par un facteur commun de manière à obtenir des entiers.

La valeur de c est rationnelle si la valeur de $\sqrt{a^2+(2b)^2}$ est un entier, c'est-à-dire si les valeurs de a et de $2b$ sont les longueurs des cathètes d'un triangle rectangle, ou les deux premiers nombres d'un triplet pythagoricien.

Puisque $\sqrt{3^2+4^2}$ est un entier, on pose $a = 3$ et $b = 2$, ce qui donne :

$$c = \frac{(3^2-2^2)}{2 \cdot 2^2}(3 + \sqrt{3^2+4^2}) = 5$$

On a donc $(a, b, c) = (3, 2, 5)$. Or, ces trois nombres ne peuvent pas être les longueurs des côtés d'un triangle, car $3 + 2 = 5$.

(L'inégalité du triangle nous assure que trois nombres réels strictement positifs, a, b et c, peuvent être les longueurs des côtés d'un triangle si et seulement si $a + b > c$, $a + c > b$ et $b + c > a$.)

On peut tenter notre chance avec d'autres triplets pythagoriciens.

Par exemple, $15^2 + 8^2 = 17^2$. Or $a = 15$ et $b = 4$ ne donne pas une valeur de c pour laquelle les nombres a, b et c peuvent être les longueurs des côtés d'un triangle.

On fait appel à $16^2 + 30^2 = 34^2$. Les valeurs $a = 16$ et $b = 15$ donnent :

$$c = \frac{(16^2-15^2)}{2 \cdot 15^2}(16 + \sqrt{16^2+30^2}) = \frac{31}{450}(16+34) = \frac{31}{9}$$

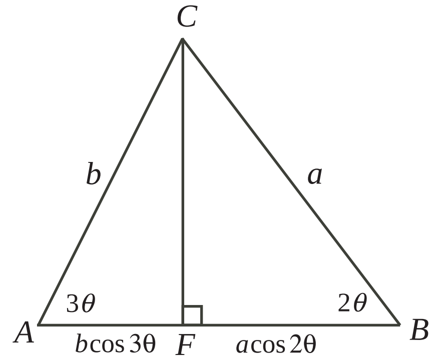
Or les nombres $(a, b, c) = (16, 15, \frac{31}{9})$ peuvent être les longueurs des côtés d'un triangle, puisque $a + b > c$, $a + c > b$ et $b + c > a$.

Ces nombres vérifient l'équation de la partie (b). On les multiplie par $k = 9$ pour obtenir le triplet $(144, 135, 31)$ d'entiers qui vérifient l'équation de la partie (b) et qui peuvent être les longueurs des côtés d'un triangle.

(Il est possible d'utiliser d'autre triplets pythagoriciens pour obtenir d'autres entiers qui fonctionnent.)

Solution 2

On remarque que l'équation de la partie (b) ne comporte que les variables a, b et c. Elle semble donc dépendre uniquement de la relation entre les angles CAB et CBA du triangle ABC. On se concentre donc sur le triangle ABC. On efface le segment AK et on trace la hauteur CF. On a :



Puisqu'on cherche un seul triplet qui fonctionne, on fera quelques suppositions au sujet du triangle. Cela peut éliminer les autres solutions qui ne nous intéressent pas.
On suppose que les angles A et B du triangle sont aigus, c'est-à-dire que $3\theta < 90^\circ$ et que $2\theta < 90^\circ$. On suppose donc que $\theta < 30^\circ$.
Dans le triangle ABC, on a $AF = b\cos 3\theta$, $BF = a\cos 2\theta$ et $CF = b\sin 3\theta = a\sin 2\theta$.
On a aussi $c = b\cos 3\theta + a\cos 2\theta$.
Pour trouver des entiers appropriés a, b et c, on peut chercher des entiers a et b et une mesure d'angle θ tels que $b\cos 3\theta$ et $a\cos 2\theta$ soient des entiers et que $b\sin 3\theta = a\sin 2\theta$.
On fait appel à des identités trigonométriques :

$$\begin{aligned}
\sin 2\theta &= 2\sin\theta\cos\theta \\
\cos 2\theta &= 2\cos^2\theta - 1 \\
\sin 3\theta &= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta \\
&\qquad \text{(d'après la partie (a), Solution 1, 1}^{\text{re}}\text{ méthode)} \\
\cos 3\theta &= \cos(2\theta + \theta) \\
&= \cos 2\theta\cos\theta - \sin 2\theta\sin\theta \\
&= (2\cos^2\theta - 1)\cos\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta \\
&= (2\cos^2\theta - 1)\cos\theta - 2(1 - \cos^2\theta)\cos\theta \\
&= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta
\end{aligned}$$

On cherche une mesure θ ($\theta < 30^\circ$) de manière que $\cos\theta$ soit un nombre rationnel et ensuite, des entiers a et b tels que $b\sin 3\theta = a\sin 2\theta$ et que $b\cos 3\theta$ et $a\cos 2\theta$ soient des entiers.
Puisqu'on suppose que $\theta < 30^\circ$, alors $\cos\theta > \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}866$.
Le nombre rationnel $\frac{7}{8}$ est celui qui a le plus petit dénominateur et qui est plus grand que $\frac{\sqrt{3}}{2}$. On cherche donc un angle aigu de mesure θ tel que $\cos\theta = \frac{7}{8}$.
On a donc $\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \frac{\sqrt{15}}{8}$, d'où :

$$\begin{aligned}
\sin 2\theta &= 2\sin\theta\cos\theta = 2 \times \tfrac{7}{8} \times \tfrac{\sqrt{15}}{8} = \tfrac{7\sqrt{15}}{32} \\
\cos 2\theta &= 2\cos^2\theta - 1 = 2 \times \tfrac{49}{64} - 1 = \tfrac{17}{32} \\
\sin 3\theta &= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta = 3 \times \tfrac{\sqrt{15}}{8} - 4 \times \tfrac{15\sqrt{15}}{512} = \tfrac{33\sqrt{15}}{128} \\
\cos 3\theta &= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta = 4 \times \tfrac{343}{512} - 3 \times \tfrac{7}{8} = \tfrac{7}{128}
\end{aligned}$$

Pour que $b\sin 3\theta = a\sin 2\theta$, il faut que $\frac{33\sqrt{15}}{128}b = \frac{7\sqrt{15}}{32}a$, ou $33b = 28a$.
Pour que $b\cos 3\theta$ et $a\cos 2\theta$ soient des entiers, il faut que $\frac{7}{128}b$ et $\frac{17}{32}a$ soient des entiers. Il faut donc que a soit divisible par 32 et que b soit divisible par 128.
Les entiers $a = 33$ et $b = 28$ vérifient l'équation $33b = 28a$.

On multiplie ces nombres par 32 et on choisit $a = 1056$ et $b = 896$, qui vérifient l'équation $33b = 28a$. De plus, b est divisible par 128 ($896 \div 128 = 7$) et a est divisible par 32 ($1056 \div 32 = 33$).

Ces valeurs de a et de b donnent $c = b\cos 3\theta + a\cos 2\theta$, d'où $c = 896 \times \frac{7}{128} + 1056 \times \frac{17}{32}$, ou $c = 610$.

On peut vérifier que le triplet $(a, b, c) = (1056, 896, 610)$ vérifie l'équation de la partie (b).

Comme il a été mentionné dans la Solution 1, on peut diviser chaque élément du triplet par 2 pour obtenir de plus petits nombres, soit $(a, b, c) = (528, 448, 305)$ qui vérifient l'équation.

D'autres valeurs de $\cos\theta$ et d'autres valeurs appropriées de a et de b nous permettraient d'obtenir d'autres triplets (a, b, c) d'entiers.