



Le CENTRE d'ÉDUCATION en
MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

www.cemc.uwaterloo.ca

Concours Euclide

le mardi 12 avril 2011

UNIVERSITY OF
WATERLOO

WATERLOO
MATHEMATICS

Great-West
COMPAGNIE G-M D'ASSURANCE-VIE



Canada-Vie

LA PARFAITE ALLIANCE COMMUNAUTAIRE^{MC}

Canadian
Institute of
Actuaries



Institut
canadien
des actuaires

Deloitte.

Maplesoft
Mathematics • Modeling • Simulation

Durée : 2 heures et demie ©2011 Centre d'éducation en mathématiques et en informatique

L'utilisation de la calculatrice est permise, pourvu que celle-ci ne soit ni programmable, ni munie d'affichage graphique.

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal. Le concours est composé de 10 questions de 10 points chacune. Chaque question peut avoir des parties à réponse courte et des parties à développement. Une partie à **RÉPONSE COURTE** vaut 3 points. Les parties **À DÉVELOPPEMENT** valent le reste des 10 points attribués à la question.

Directives pour les questions à RÉPONSES COURTES

1. Les parties à **RÉPONSES COURTES** sont indiquées comme ceci :  .
2. **Écrire la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse.** Le maximum des points est attribué pour une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. Une partie des points sera attribuée **pour du travail pertinent** inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse.

Directives pour les questions À DÉVELOPPEMENT

1. Les questions **À DÉVELOPPEMENT** sont indiquées comme ceci :  .
2. **Les solutions complètes doivent être écrites aux endroits appropriés du cahier-réponse.** Le brouillon doit être fait ailleurs. Si le cahier est rempli, le surveillant ou la surveillante distribuera des feuilles lignées. Insérer ces feuilles dans le cahier-réponse. Inscrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille insérée.
3. Des points sont attribués pour les solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

Remarque : À la fin du concours, insérer la feuille de renseignements à l'intérieur du cahier-réponse.

Le nom de quelques-uns des candidats ayant obtenu les meilleurs résultats sera publié dans les Résultats du concours Euclide sur notre site web à <http://www.cemc.uwaterloo.ca>.

REMARQUES

1. Bien lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Écrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de «  », le maximum des points est accordé pour une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. **Si une réponse est incorrecte, une partie des points peut être accordée pour du travail pertinent** inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse. On encourage fortement les candidates et les candidats à montrer leur travail.
4. Sauf indication contraire, les réponses et les calculs devraient être exprimés au moyen de valeurs exactes, telles que 4π , $2 + \sqrt{7}$, $2 \cos(55^\circ)$, plutôt que $12,566\dots$, $4,646\dots$ ou $1,147\dots$

Remarque au sujet de l'encodage par bulles

Prière de s'assurer d'avoir bien encodé son nom, sa date de naissance, son année scolaire et son sexe sur la feuille de renseignements et d'avoir répondu à la question portant sur son admissibilité.

Remarque au sujet de la rédaction des solutions

Lorsqu'un problème est accompagné de «  », une solution complète est exigée.

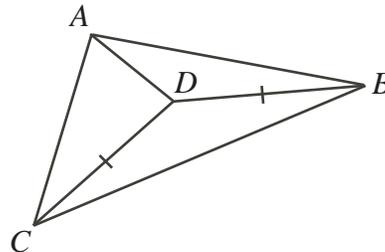
Une solution devrait être bien organisée et contenir une dose appropriée d'énoncés mathématiques, de justification et de mots d'explications. Avant de rédiger une solution finale, il est bon de rédiger les grandes lignes et certains détails au brouillon. La solution finale devrait permettre à la correctrice ou au correcteur de comprendre l'approche choisie ainsi que toutes les étapes mathématiques suivies.

1.  (a) Si $(x + 1) + (x + 2) + (x + 3) = 8 + 9 + 10$, quelle est la valeur de x ?
 (b) Si $\sqrt{25 + \sqrt{x}} = 6$, quelle est la valeur de x ?
 (c) Les droites d'équations $y = 2x - 4$ et $y = x + k$ se coupent au point $(a, 2)$. Déterminer la valeur de k .

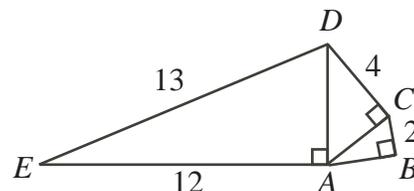
2.  (a) Dans la figure ci-contre, on a enlevé un triangle équilatéral ayant des côtés de longueur 1 au milieu de chaque côté d'un carré ayant des côtés de longueur 3. Quel est le périmètre de la figure?



-  (b) Dans la figure ci-contre, $DC = DB$, $\angle DCB = 15^\circ$ et $\angle ADB = 130^\circ$. Quelle est la mesure de l'angle ADC ?



-  (c) Dans la figure ci-contre, $\angle EAD = 90^\circ$, $\angle ACD = 90^\circ$ et $\angle ABC = 90^\circ$. De plus, $ED = 13$, $EA = 12$, $DC = 4$ et $CB = 2$. Déterminer la longueur de AB .



3.  (a) Sachant que $2 \leq x \leq 5$ et $10 \leq y \leq 20$, quelle est la valeur maximale de $15 - \frac{y}{x}$?



- (b) Les fonctions f et g vérifient

$$f(x) + g(x) = 3x + 5$$

$$f(x) - g(x) = 5x + 7$$

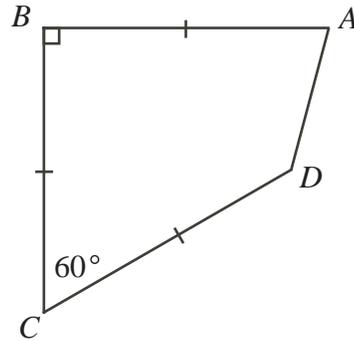
pour toutes les valeurs de x . Déterminer la valeur de $2f(2)g(2)$.

4.  (a) Trois nombres différents sont choisis au hasard dans l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Les nombres sont placés en ordre croissant. Quelle est la probabilité pour que ces trois nombres forment une suite arithmétique ?

(Une *suite arithmétique* est une suite dont chaque terme, après le premier, est obtenu en additionnant une constante au terme précédent. Par exemple, 3, 5, 7, 9 est une suite arithmétique de quatre termes.)



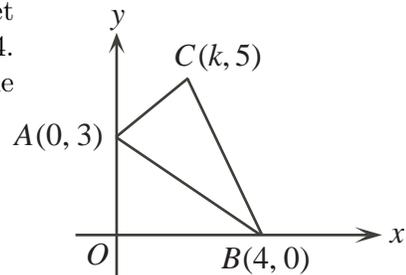
- (b) Dans le quadrilatère $ABCD$ ci-contre, on a $AB = BC = CD = 6$, $\angle ABC = 90^\circ$ et $\angle BCD = 60^\circ$. Déterminer la longueur de AD .



5.  (a) Quel est le plus grand entier de deux chiffres qui donne un nombre 75% plus grand lorsqu'on renverse l'ordre de ses chiffres ?



- (b) Un triangle a pour sommets $A(0, 3)$, $B(4, 0)$ et $C(k, 5)$, k étant dans l'intervalle $0 < k < 4$. Déterminer la valeur de k pour laquelle le triangle a une aire de 8.



6.  (a) Serge aime descendre la rivière Rapido en radeau, du point A au point B . La vitesse du courant de la rivière est toujours la même. Lorsque Serge rame, il rame toujours à la même vitesse. Lorsqu'il rame avec le courant, il met 18 minutes pour déplacer le radeau de A à B . Lorsque Serge ne rame pas, le courant met 30 minutes pour déplacer le radeau de A à B . S'il n'y avait aucun courant, combien de temps Serge mettrait-il en ramant pour déplacer le radeau de A à B ?



- (b) Le carré $OPQR$ a pour sommets $O(0, 0)$, $P(0, 8)$, $Q(8, 8)$ et $R(8, 0)$. La parabole d'équation $y = a(x - 2)(x - 6)$ coupe les côtés du carré $OPQR$ aux points K , L , M et N . Déterminer toutes les valeurs de a pour lesquelles le trapèze $KLMN$ a une aire de 36.

7.  (a) Les chances pour qu'une personne de 75 ans vive au moins 10 ans de plus sont de 50 %.
 Les chances pour qu'une personne de 75 ans vive au moins 15 ans de plus sont de 20 %.
 Les chances pour qu'une personne de 80 ans vive au moins 10 ans de plus sont de 25 %.
 Quelle est la probabilité pour qu'une personne de 80 ans vive au moins 5 ans de plus ?



- (b) Déterminer toutes les valeurs de x pour lesquelles $2^{\log_{10}(x^2)} = 3(2^{1+\log_{10}x}) + 16$.

8.  Le crible de Sundaram fait appel au tableau infini suivant composé d'entiers strictement positifs :

4	7	10	13	...
7	12	17	22	...
10	17	24	31	...
13	22	31	40	...
⋮	⋮	⋮	⋮	

Les nombres de chaque rangée du tableau forment une suite arithmétique. Les nombres de chaque colonne du tableau forment une suite arithmétique. Les quatre premiers nombres des quatre premières rangées et des quatre premières colonnes sont indiqués.

- (a) Déterminer le nombre situé dans la 50^e rangée et dans la 40^e colonne.
 (b) Déterminer une formule pour le nombre situé dans la $R^{\text{ième}}$ rangée et dans la $C^{\text{ième}}$ colonne.
 (c) Démontrer que si N est un terme du tableau, alors le nombre $2N + 1$ est composé.
9.  Soit $\lfloor x \rfloor$ le plus grand entier inférieur ou égal à x . Par exemple, $\lfloor 3,1 \rfloor = 3$ et $\lfloor -1,4 \rfloor = -2$.

On définit $f(n) = 2n - \left\lfloor \frac{1 + \sqrt{8n - 7}}{2} \right\rfloor$ et $g(n) = 2n + \left\lfloor \frac{1 + \sqrt{8n - 7}}{2} \right\rfloor$ pour tout entier strictement positif n .

- (a) Déterminer la valeur de $g(2011)$.
 (b) Déterminer une valeur de n pour laquelle $f(n) = 100$.
 (c) Soit $A = \{f(1), f(2), f(3), \dots\}$ et $B = \{g(1), g(2), g(3), \dots\}$; A est donc l'image de la fonction f et B est l'image de la fonction g . Démontrer que chaque entier strictement positif m est un élément d'exactly un des ensembles A ou B .

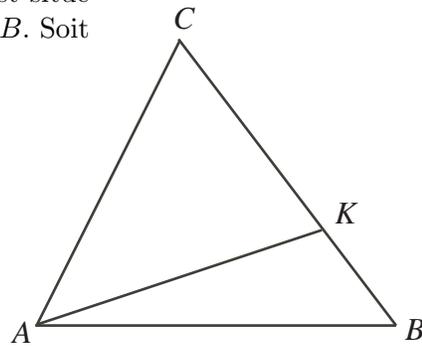


10. Dans la figure ci-contre, $2\angle BAC = 3\angle ABC$ et K est situé sur le segment BC de manière que $\angle KAC = 2\angle KAB$. Soit $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $AK = d$ et $BK = x$.

(a) Démontrer que $d = \frac{bc}{a}$ et que $x = \frac{a^2 - b^2}{a}$.

(b) Démontrer que $(a^2 - b^2)(a^2 - b^2 + ac) = b^2c^2$.

(c) Déterminer un triangle dont l'aire est strictement positive et dont les longueurs de côtés a , b et c sont des entiers strictement positifs qui vérifient l'égalité de la partie (b).





Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Euclide de 2011!

En 2010, plus de 16 000 élèves à travers le monde se sont inscrits au concours Euclide.

Si vous terminez l'école secondaire, nous vous souhaitons bon succès. Si vous retournez à l'école secondaire l'an prochain, encouragez votre enseignant à vous inscrire au Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur qui aura lieu le 22 novembre 2011.

Visitez notre site Web pour

- des copies gratuites des concours précédents
- des ateliers pour vous aider à vous préparer pour les prochains concours
- des renseignements au sujet de nos publications qui visent l'enrichissement en mathématiques et la préparation aux concours

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web pour

- obtenir des renseignements au sujet des concours de 2011/2012, y compris les **nouveaux** concours, soit le Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire et le Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur
- vous renseigner sur des ateliers et des ressources disponibles pour les enseignants
- trouver les résultats de votre école

www.cemc.uwaterloo.ca