Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

Concours Cayley 2011

(10e année – Secondaire IV)

le jeudi 24 février 2011

Solutions

1. On regroupe les termes de $(5 + 2) + (8 + 6) + (4 + 7) + (3 + 2)$ pour les écrire sous la forme $5 + (2 + 8) + (6 + 4) + (7 + 3) + 2$, ce qui est égal à $5 + 10 + 10 + 10 + 2$, ou 37.
On aurait pu additionner directement.

Réponse : (B)

2. Puisque $(-1)(2)(x)(4) = 24$, alors $-8x = 24$, d'où $x = \dfrac{24}{-8}$, ou $x = -3$.

Réponse : (B)

3. *Solution 1*
Puisque l'angle PRS est un angle extérieur du triangle PQR, alors $\angle PQR + \angle QPR = \angle PRS$, ou $x^\circ + 75^\circ = 125^\circ$.
Donc $x + 75 = 125$, d'où $x = 50$.

Solution 2
Puisque QRS est un segment de droite, alors $\angle PRQ = 180^\circ - \angle PRS$, ou $\angle PRQ = 180^\circ - 125^\circ$, d'où $\angle PRQ = 55^\circ$.
Puisque la somme des mesures d'angles d'un triangle est égale à 180°, alors $x^\circ + 75^\circ + 55^\circ = 180^\circ$, ou $x + 130 = 180$, d'où $x = 50$.

Réponse : (A)

4. *Solution 1*
On procède à rebours pour déterminer le nombre initial.
On ajoute 5 au nombre 16 pour obtenir 21. On divise ce nombre par 3 pour obtenir 7.
Il s'agit des opérations inverses de « diminuer de 5 » et de « multiplier par 3 ».

Solution 2
Soit x le nombre initial.
Après avoir triplé ce nombre et diminué le résultat de 5, on obtient $3x - 5$.
On a donc $3x - 5 = 16$, d'où $3x = 21$, ou $x = 7$.

Réponse : (C)

5. On procède de l'intérieur vers l'extérieur :

$$\sqrt{13 + \sqrt{7 + \sqrt{4}}} = \sqrt{13 + \sqrt{7 + 2}} = \sqrt{13 + \sqrt{9}} = \sqrt{13 + 3} = \sqrt{16} = 4$$

Réponse : (D)

6. Une ligne qui a une pente de 0 est une droite horizontale. Le plan Q contient une telle droite.

Réponse : (B)

7. Puisque le dé est juste, il y a 6 choix équiprobables possibles.
On calcule la probabilité de chaque événement donné dans les choix de réponse.
Il y a 4 valeurs possibles de x qui vérifient $x > 2$. La probabilité est égale à $\frac{4}{6}$, ou $\frac{2}{3}$.
Il y a 2 valeurs possibles de x qui vérifient $x = 4$ ou $x = 5$. La probabilité est égale à $\frac{2}{6}$, ou $\frac{1}{3}$.
Il y a 3 valeurs possibles de x qui sont paires. La probabilité est égale à $\frac{3}{6}$, ou $\frac{1}{2}$.
Il y a 2 valeurs possibles de x qui vérifient $x < 3$. La probabilité est égale à $\frac{2}{6}$, ou $\frac{1}{3}$.
Il y a 1 valeur possible de x qui vérifie $x = 3$. La probabilité est égale à $\frac{1}{6}$.
L'événement le plus probable est « x est supérieur à 2 ».

Réponse : (A)

8. Lorsque le nombre $2{,}4 \times 10^8$ est doublé, on obtient $2 \times 2{,}4 \times 10^8$, ou $4{,}8 \times 10^8$.

RÉPONSE : (C)

9. Puisque la face de la pièce a une aire de 5 cm^2 et que la pièce a une épaisseur de 0,5 cm, alors la pièce a un volume de $5 \times 0{,}5\text{ cm}^3$, ou $2{,}5\text{ cm}^3$.
Puisque la pile a un volume de 50 cm^3 et que chaque pièce a un volume de $2{,}5\text{ cm}^3$, alors le nombre de pièces dans la pile est égal à $50 \div 2{,}5$, ou 20.

RÉPONSE : (D)

10. Pour participer aux parties éliminatoires, les Athenas doivent gagner au moins 60 % de leurs 44 parties. Or 60 % de 44 est égal à $0{,}6 \times 44$, ou 26,4.
Puisque l'équipe doit gagner un nombre entier de parties, ce nombre doit être égal au plus petit entier supérieur à 26,4, c'est-à-dire 27.
Puisque l'équipe a déjà gagné 20 parties, elle doit gagner au moins 7 autres parties.

RÉPONSE : (E)

11. D'après la définition, $(3,1)\nabla(4,2) = (3)(4) + (1)(2) = 12 + 2 = 14$.

RÉPONSE : (D)

12. Le secteur qui représente le pourcentage d'élèves qui préfèrent les biscuits a un angle de 90°. Le secteur représente donc $\frac{1}{4}$ du disque. Donc, 25 % des élèves préfèrent les biscuits.
Le pourcentage des élèves qui préfèrent les sandwichs est donc égal à $100\,\% - 30\,\% - 25\,\% - 35\,\%$, ou 10 %.
Puisqu'il y a 200 élèves en tout et que 10 % de 200 est égal à $\frac{1}{10}$ de 200, c'est-à-dire à 20, il y a 20 élèves qui préfèrent les sandwichs.

RÉPONSE : (B)

13. *Solution 1*
On travaille de droite à gauche comme on le ferait pour un calcul papier-crayon.
Dans la colonne des unités, on a $L - 1 = 1$. Donc $L = 2$. Dans la colonne des dizaines, on a $3 - N = 5$. Il faut donc décomposer 1 centaine en 10 dizaines de manière à obtenir $13 - N = 5$. Donc $N = 8$. On a donc :

$$\begin{array}{rcccc} & & {\scriptstyle K-1} & {\scriptstyle 13} & \\ & 5 & \cancel{K} & \cancel{3} & 2 \\ - & M & 4 & 8 & 1 \\ \hline & 4 & 4 & 5 & 1 \end{array}$$

Dans la colonne des centaines, on a $(K - 1) - 4 = 4$, d'où $K = 9$. On a donc :

$$\begin{array}{rcccc} & 5 & 9 & 3 & 2 \\ - & M & 4 & 8 & 1 \\ \hline & 4 & 4 & 5 & 1 \end{array}$$

Dans la colonne des milliers, on a $5 - M = 4$, d'où $M = 1$.
La soustraction est donc $5932 - 1481 = 4451$, ce qui est correct.
La valeur de $K + L + M + N$ est donc égale à $9 + 2 + 1 + 8$, ou 20.

Solution 2
Puisque $5K3L - M4N1 = 4451$, alors :

$$\begin{array}{rcccc} & M & 4 & N & 1 \\ + & 4 & 4 & 5 & 1 \\ \hline & 5 & K & 3 & L \end{array}$$

On travaille de droite à gauche comme on le ferait pour un calcul papier-crayon.
Dans la colonne des unités, on a $1+1=L$, d'où $L=2$.
Dans la colonne des dizaines, on semble avoir $N+5=3$. Or avec $N=8$, on a $8+5=13$. Il y a donc une retenue de 1 dans la colonne des centaines. On a donc :

$$\begin{array}{ccccc} & & ^1 & & \\ & M & 4 & 8 & 1 \\ + & 4 & 4 & 5 & 1 \\ \hline & 5 & K & 3 & 2 \end{array}$$

Dans la colonne des centaines, on a $1+4+4=K$, d'où $K=9$.
Dans la colonne des milliers, on a $M+4=5$, d'où $M=1$. On a donc :

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & 4 & 8 & 1 \\ + & 4 & 4 & 5 & 1 \\ \hline & 5 & 9 & 3 & 2 \end{array}$$

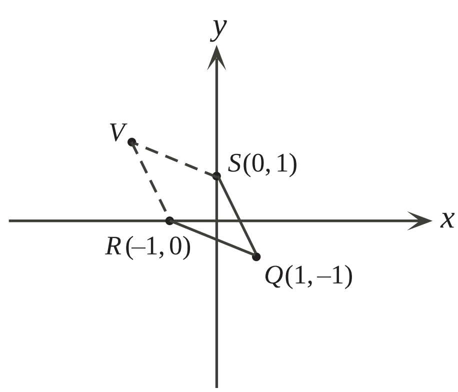
Cela est équivalent à $5932-4451=1481$, qui est correct.
La valeur de $K+L+M+N$ est donc égale à $9+2+1+8$, ou 20.

Réponse : (A)

14. La différence entre $\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{12}$ est égale à $\frac{1}{6}-\frac{1}{12}$, ou $\frac{2}{12}-\frac{1}{12}$, ou $\frac{1}{12}$. Donc $LP=\frac{1}{12}$.
Puisque le segment LP est divisé en trois parties égales, chaque partie a une longueur égale à $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{12}$, ou $\frac{1}{3}\times\frac{1}{12}$, ce qui est égal à $\frac{1}{36}$.
Donc, M est situé à une distance de $\frac{1}{36}$ à la droite de L.
Donc, le nombre qui correspond au point M est égal à $\frac{1}{12}+\frac{1}{36}$, ou $\frac{3}{36}+\frac{1}{36}$, ce qui est égal à $\frac{4}{36}$, ou $\frac{1}{9}$.

Réponse : (C)

15. On place les trois points dans un plan cartésien.
On voit que le quatrième sommet V pourrait être placé dans le deuxième quadrant :



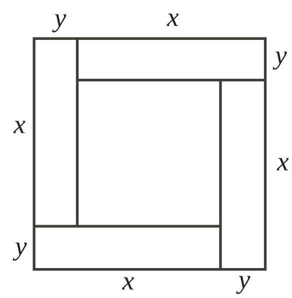
Si $VSQR$ est un parallélogramme, alors SV et QR sont parallèles et congrus.
Pour se déplacer de Q à R, on se déplace de 2 unités vers la gauche et de 1 unité vers le haut.
Donc, pour se déplacer de S à V, on se déplace de 2 unités vers la gauche et de 1 unité vers le haut. Puisque S a pour coordonnées $(0,1)$, alors V a pour coordonnées $(0-2,1+1)$, ou $(-2,2)$.
Ceci correspont au choix de réponse (A).
Deux autres endroits pour le quatrième sommet sont possibles, soit $U(0,-2)$ et $W(2,0)$.
On peut vérifier que les quadrilatères $SQUR$ et $SWQR$ sont des parallélogrammes. Or, $(0,-2)$ et $(2,0)$ ne font pas partie des choix de réponse.
Parmi les choix de réponse, le point $(-2,2)$ est le seul qui complète un parallélogramme.

Réponse : (A)

16. Après avoir acheté 7 boules de gomme, il est possible que Xavier ait reçu 2 boules rouges, 2 boules bleues, 1 boule noire et 2 boules vertes.
Il ne pourrait pas avoir plus de boules sans avoir au moins 3 boules d'une même couleur.
Si Xavier achète une boule de plus, ce sera une boule bleue, verte ou rouge.
Quel que soit le résultat, il aura au moins 3 boules d'une même couleur.
Pour résumer, si Xavier achète 7 boules de gomme, il n'est pas certain d'avoir 3 boules d'une même couleur, mais s'il achète 8 boules de gomme, il est certain d'avoir au moins 3 boules d'une même couleur.
Donc, pour s'assurer de recevoir 3 boules d'une même couleur, Xavier doit acheter un minimum de 8 boules.

Réponse : (E)

17. Soit x cm la longueur du grand côté d'un rectangle et y cm la longueur du plus petit.



Puisque chaque rectangle a un périmètre de 40 cm, alors $2x + 2y = 40$, ou $x + y = 20$.
Or, le grand carré a des côtés de longueur $(x + y)$ cm.
Donc, l'aire du grand carré, en cm^2, est égale à $(x + y)^2$, ou 20^2, ou 400.

Réponse : (C)

18. *Solution 1*
Lorsqu'un entier positif n est divisé par un entier positif x, le reste est égal à la différence entre n et le plus grand multiple de x inférieur à n. Lorsqu'on divise 100 par l'entier positif x, il y a un reste de 10.
Donc $100 - 10$, ou 90, est divisible par x. De plus, x doit être supérieur à 10, autrement le reste serait inférieur à 10.
Puisque 90 est divisible par x, alors 990 est aussi divisible par x, car $11 \times 90 = 990$.
Puisque $x > 10$, alors le multiple suivant de x, après 990, est $990 + x$. Ce nombre est supérieur à 1000.
Donc, 990 est le plus grand multiple de x inférieur à 1000. Lorsqu'on divise 1000 par x, le reste est égal à $1000 - 990$, ou 10.

Solution 2
Lorsqu'on divise 100 par l'entier positif x, il y a un reste de 10. Ce reste est égal à la différence entre 100 et le plus grand multiple de x inférieur à 100. Donc, le plus grand multiple de x inférieur à 100 est 90.
De plus, x doit être supérieur à 10, autrement le reste serait inférieur à 10.
On peut choisir $x = 15$, car $6 \times 15 = 90$ et 15 est supérieur à 10.
Quel est le reste si on divise 1000 par 15 ? D'après la calculatrice, $1000 \div 15 = 66{,}666\ldots$ et $66 \times 15 = 990$. Donc, la différence entre 1000 et le plus grand multiple de 15 inférieur à 1000 (c'est-à-dire 990) est égale à 10. Le reste est donc égal à 10.

Réponse : (A)

19. Soit $\angle XYW = \theta$.
Puisque le triangle XYW est isocèle et que $WX = WY$, alors $\angle YXW = \angle XYW = \theta$.
La somme des mesures des angles du triangle XYW est égale à $180°$. Donc $\angle XWY = 180° - 2\theta$.
Puisque $\angle XWY + \angle ZWY = 180°$, alors $\angle ZWY = 180° - (180° - 2\theta)$, ou $\angle ZWY = 2\theta$.
Puisque le triangle YWZ est isocèle et que $YW = YZ$, alors $\angle YZW = \angle ZWY = 2\theta$.
Puisque le triangle XYZ est isocèle et que $XY = XZ$, alors $\angle XYZ = \angle XZY = 2\theta$.
Puisque somme des mesures des angles du triangle XYZ est égale à $180°$, alors $\angle XYZ + \angle XZY + \angle YXZ = 180°$, d'où $2\theta + 2\theta + \theta = 180°$, ou $5\theta = 180°$, ou $\theta = 36°$.

Réponse : (D)

20. L'expression $n^3 + 5n^2$ est le carré d'un entier si $\sqrt{n^3 + 5n^2}$ est un entier.
Or, $\sqrt{n^3 + 5n^2} = \sqrt{n^2(n+5)} = \sqrt{n^2}\sqrt{n+5} = n\sqrt{n+5}$.
L'expression $n\sqrt{n+5}$ est un entier si $\sqrt{n+5}$ est un entier. Donc, $n+5$ doit être un carré parfait.
Puisque n prend ses valeurs entre 1 et 100, alors $n + 5$ prend ses valeurs entre 6 et 105.
Les carrés parfaits dans cet intervalle sont $3^2 = 9$, $4^2 = 16$, ..., $10^2 = 100$.
Il y a donc 8 carrés parfaits dans cet intervalle.
Il y a donc 8 valeurs de n pour lesquelles $\sqrt{n+5}$ est un entier et pour lesquelles $n^3 + 5n^2$ est le carré d'un entier.

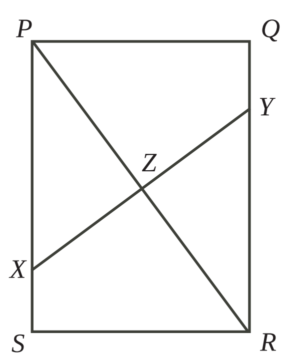
Réponse : (B)

21. *Solution 1*
On multiplie des deuxième et troisième équations, membre par membre, pour obtenir $x(y+1)y(y+1) = \frac{7}{9} \cdot \frac{5}{18}$, ou $xy(x+1)(x+1) = \frac{35}{162}$.
D'après la première équation, $xy = \frac{1}{9}$.
Donc $\frac{1}{9}(x+1)(y+1) = \frac{35}{162}$, d'où $(x+1)(y+1) = 9(\frac{35}{162})$, ou $(x+1)(y+1) = \frac{35}{18}$.

Solution 2
On développe le membre de gauche de la deuxième équation pour obtenir $xy + x = \frac{7}{9}$.
D'après la première équation, $xy = \frac{1}{9}$. Donc $x = \frac{7}{9} - xy$, d'où $x = \frac{7}{9} - \frac{1}{9}$, ou $x = \frac{2}{3}$.
On développe le membre de gauche de la troisième équation pour obtenir $xy + y = \frac{5}{18}$.
Puisque $xy = \frac{1}{9}$ (troisième équation), alors $y = \frac{5}{18} - xy$, d'où $y = \frac{5}{18} - \frac{1}{9}$, ou $y = \frac{3}{18}$, ou $y = \frac{1}{6}$.
Donc $(x+1)(y+1)$ est égal à $(\frac{2}{3}+1)(\frac{1}{6}+1)$, ou $\frac{5}{3} \cdot \frac{7}{6}$, ou $\frac{35}{18}$.

Réponse : (E)

22. Soit XY le pli. Il coupe ainsi PS en X, QR en Y et la diagonale PR en Z. On cherche donc la longueur de XY.



Puisque le sommet P se replie sur R, le segment PZ se replie sur le segment RZ. Ainsi $PZ = RZ$ et PR est perpendiculaire à XY.
Puisque $PS = RQ$ et $SR = QP$, les triangles rectangles PSR et RQP sont congruents.

Donc $\angle XPZ = \angle YRZ$.
Puisque $PZ = RZ$, les triangles rectangles PZX et RZY sont congruents (deux angles et le côté compris).
Donc $XZ = ZY$, d'où $XY = 2XZ$.
Puisque le triangle PSR est rectangle en S, alors selon le théorème de Pythagore, on a :

$$PR = \sqrt{PS^2 + SR^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10$$

puisque $PR > 0$.
Puisque $PZ = RZ$, alors $PZ = 5$.
Or, les triangles rectangles PZX et PSR sont semblables (ils ont un angle commun P). Donc $\dfrac{XZ}{PZ} = \dfrac{RS}{PS}$, d'où $XZ = \frac{5 \cdot 6}{8}$, ou $XZ = \frac{30}{8}$, ou $XZ = \frac{15}{4}$.
Donc $XY = 2 \times \frac{15}{4}$, d'où $XY = \frac{15}{2}$, ou $XY = 7{,}5$. Le pli a donc une longueur de 7,5 cm.

Réponse : (C)

23. On calcule d'abord combien on peut former de paires de nombres parmi les entiers de 1 à n.
Il y a n façons de choisir le premier nombre. Pour chacun de ces choix, il y a $n-1$ façons de choisir le deuxième nombre. En tout, il y a $n(n-1)$ façons de choisir deux nombres.
Or selon cette façon de choisir, chaque paire de nombres est comptée deux fois. Par exemple, on compterait 1 suivi de 3 ainsi que 3 suivi de 1.
Il faut donc diviser le nombre $n(n-1)$ par 2. On peut donc former $\frac{1}{2}n(n-1)$ paires de nombres.

On porte maintenant attention au nombre de rangées dans le tableau.
Puisque chaque rangée compte trois nombres, chaque rangée compte trois paires (les 1$^{\text{er}}$ et 2$^{\text{e}}$ nombres, les 1$^{\text{er}}$ et 3$^{\text{e}}$ nombres, les 2$^{\text{e}}$ et 3$^{\text{e}}$ nombres).
Supposons que le tableau au complet compte r rangées.
Le tableau compte donc un total de $3r$ paires.
Puisque chaque paire d'entiers de la liste de 1 à n paraît exactement une fois dans le tableau et que le nombre total de paires est égal à $\frac{1}{2}n(n-1)$, alors $3r = \frac{1}{2}n(n-1)$. Donc, $\frac{1}{2}n(n-1)$ doit être divisible par 3, puisque $3r$ est divisible par 3.
On construit un tableau indiquant les valeurs possibles de n et les valeurs correspondantes de $\frac{1}{2}n(n-1)$:

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\frac{1}{2}n(n-1)$	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66

Puisque $\frac{1}{2}n(n-1)$ doit être divisible par 3, alors les valeurs possibles de n sont 3, 4, 6, 7, 9, 10 et 12.
On considère un entier particulier m de la liste des entiers de 1 à n.
Dans chaque rangée qui contient m, il y aura 2 paires qui contiennent m, soit une paire avec chacun des deux autres nombres de la rangée.
Si m paraît dans s rangées, il paraîtra donc dans $2s$ paires.
Donc, chaque nombre m doit paraître dans un nombre pair de paires.
Or, on sait que chaque m de la liste des entiers de 1 à n doit paraître dans $n-1$ paires (une fois avec chaque membre de la liste). Donc $n-1$ doit être pair et n doit donc être impair.
Les valeurs possibles de n sont donc 3, 7 et 9.
Il reste à démontrer que l'on peut créer un tableau de Fano pour chacune de ces valeurs de n.
Le tableau de Fano donné correspond à $n = 7$.
Lorsque $n = 3$, le tableau contiendra 3 paires et puisque $3 \div 3 = 1$, il contiendra 1 rangée.
Lorsque $n = 9$, le tableau contiendra 36 paires et puisque $36 \div 3 = 12$, il contiendra 12 rangées.
Voici un tableau possible pour $n = 3$ et un autre pour $n = 9$:

1	2	3

1	2	3
1	4	5
1	6	7
1	8	9
2	4	7
2	5	8
2	6	9
3	4	9
3	5	6
3	7	8
4	6	8
5	7	9

Il y a donc 3 valeurs de n, dans l'intervalle $3 \leq n \leq 12$, pour lesquelles on peut former un tableau de Fano.

Réponse : (B)

24. On remarque que l'on peut changer des personnes l'une pour l'autre. Il n'est pas important de spécifier qui marche et qui se promène en moto. On nomme les trois personnes A, D et E.
Le point de départ est nommé P et le point d'arrivée est nommé Q.
Voici une stratégie dans laquelle les trois personnes avancent à tous moments et arrivent au point P en même temps :

A et D montent en moto, tandis que E marche.
A et D se rendent en moto à un point Y situé avant le point Q.
A laisse D et retourne en moto, tandis que D et E marchent vers le point Q.
A rencontre E au point X.
E monte sur la moto et avec A, se déplace vers le point Q de manière à arriver au point Q en même temps que D.
Le point Y est choisi de manière que A, D et E arrivent en même temps au point Q.

Soit a km la distance de P à X, d km la distance de X à Y et b km la distance de Y à Q.

Pendant que E marche de P à X à une vitesse de 6 km/h, A se déplace en moto de P à Y et de retour jusqu'à X à une vitesse de 90 km/h. Or, la distance de P à X est de a km, tandis que la distance de P à Y, puis de Y à X est de $(a + d + d)$ km, ou $(a + 2d)$ km.

Puisque E et A mettent le même temps pour effectuer ces trajets, alors $\dfrac{a}{6} = \dfrac{a+2d}{90}$, d'où $15a = a + 2d$, ou $7a = d$.

Pendant que D marche de Y à Q à une vitesse de 6 km/h, A se rend de Y à X et de X à Q à une vitesse de 90 km/h.
Or, la distance de Y à Q est de b km, tandis que la distance de Y à X et de X à Q est de $(d + d + b)$ km, ou $(b + 2d)$ km.

Puisque D et A mettent le même temps pour effectuer ces trajets, alors $\dfrac{b}{6} = \dfrac{b+2d}{90}$, d'où $15b = b + 2d$, ou $7b = d$.

Donc $d = 7a = 7b$. On peut conclure que $b = a$.
La distance totale de P à Q est égale à $(a + d + b)$ km, ou $(a + 7a + a)$ km, ou $9a$ km.
Or, on sait que cette distance est de 135 km. Donc $9a = 135$, ou $a = 15$.

On rappelle que A se déplace de P à Y à X à Q, une distance de $[(a+7a)+7a+(7a+a)]$ km, ou $23a$ km.
Puisque $a = 15$ km et que A se déplace à une vitesse de 90 km/h, le temps qu'elle met pour effectuer cette stratégie est égal à $\frac{23\times15}{90}$ h, ou $\frac{23}{6}$ h, ou environ 3,83 h.
Puisque cette stratégie prend 3,83 h, alors la plus petite valeur possible de t ne peut dépasser 3,83 h. Peux-tu expliquer pourquoi il s'agit bien de la plus petite valeur possible de t ?

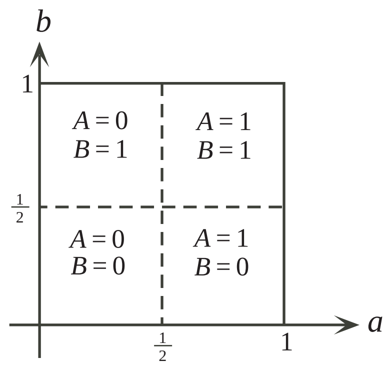
Si on n'avait pas pensé à la stratégie précédente, on aurait pu penser à la suivante :

A et D montent en moto, tandis que E marche.
A et D se rendent jusqu'au point Q.
A laisse D au point Q et retourne rencoutrer E qui marche toujours.
D laisse E monter sur la moto et les deux se rendent à Q. (D se repose au point Q.)

Cette stratégie met 4,125 h, ce qui est supérieur au temps requis par la stratégie précédente, car D ne bouge pas pendant un certain temps.

Réponse : (A)

25. Par définition, si $0 \le a < \frac{1}{2}$, alors $A = 0$ et si $\frac{1}{2} \le a \le 1$, alors $A = 1$.
De même, si $0 \le b < \frac{1}{2}$, alors $B = 0$ et si $\frac{1}{2} \le b \le 1$, alors $B = 1$.
On tient compte des renseignements sur le repère orthonormé (les axes sont perpendiculaires et sont dotés de la même échelle) suivant.



Les couples possibles (a, b) forment un carré de 1 sur 1 qui a donc une aire de 1.
On détermine les ensembles pour lesquels $C = 2A+2B$ et on calcule l'aire totale des régions qui les représentent.
On considère quatre cas. Dans chacun de ces cas, on traitera d'une droite ayant une équation de la forme $a + b = Z$, Z étant un nombre quelconque. On peut récrire ces équations sous forme $b = -a + Z$, ce qui indique que chaque droite a une pente de -1 et une ordonnée à l'origine égale à Z. Puisque les droites ont une pente de -1, leur abscisse à l'origine est aussi égale à Z.

1^er cas : $A = 0$ et $B = 0$
C est égal à $2A + 2B$ lorsque $C = 0$.
Puisque C est obtenu en arrondissant la valeur de c, il faut donc que $0 \le c < \frac{1}{2}$.
Puisque $c = 2a + 2b$ par définition, il faut donc que $0 \le 2a + 2b < \frac{1}{2}$, ou $0 \le a + b < \frac{1}{4}$.
Il s'agit des points du carré qui sont au-dessus de la droite d'équation $a + b = 0$ et au-dessous de la droite d'équation $a + b = \frac{1}{4}$.

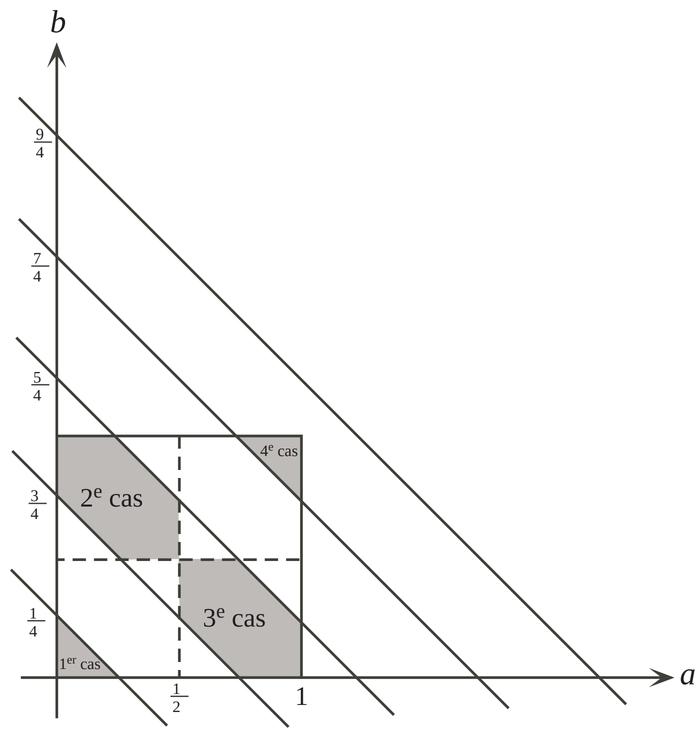
2^e cas : $A = 0$ et $B = 1$
C est égal à $2A + 2B$ lorsque $C = 2$.
Puisque C est obtenu en arrondissant la valeur de c, il faut donc que $\frac{3}{2} \le c < \frac{5}{2}$.
Puisque $c = 2a + 2b$ par définition, il faut donc que $\frac{3}{2} \le 2a + 2b < \frac{5}{2}$, ou $\frac{3}{4} \le a + b < \frac{5}{4}$.

Il s'agit des points du carré qui sont au-dessus de la droite d'équation $a+b=\frac{3}{4}$ et au-dessous de la droite d'équation $a+b=\frac{5}{4}$.

<u>3e cas : $A=1$ et $B=0$</u>
C est égal à $2A+2B$ lorsque $C=2$.
Puisque C est obtenu en arrondissant la valeur de c, il faut donc que $\frac{3}{2}\le c<\frac{5}{2}$.
Puisque $c=2a+2b$ par définition, il faut donc que $\frac{3}{2}\le 2a+2b<\frac{5}{2}$, ou $\frac{3}{4}\le a+b<\frac{5}{4}$.
Il s'agit des points du carré qui sont au-dessus de la droite d'équation $a+b=\frac{3}{4}$ et au-dessous de la droite d'équation $a+b=\frac{5}{4}$.

<u>4e cas : $A=1$ et $B=1$</u>
C est égal à $2A+2B$ lorsque $C=4$.
Puisque C est obtenu en arrondissant la valeur de c, il faut donc que $\frac{7}{2}\le c<\frac{9}{2}$.
Puisque $c=2a+2b$ par définition, il faut donc que $\frac{7}{2}\le 2a+2b<\frac{9}{2}$, ou $\frac{7}{4}\le a+b<\frac{9}{4}$.
Il s'agit des points du carré qui sont au-dessus de la droite d'équation $a+b=\frac{7}{4}$ et au-dessous de la droite d'équation $a+b=\frac{9}{4}$.

Les régions définies par les ensembles de points obtenus sont ombrées :



Les régions ombrées représentent les points (a,b) pour lesquels $2A+2B=C$. Pour déterminer la probabilité, on calcule l'aire totale des régions ombrées et on la divise par l'aire de la région qui représente tous les points (a,b) possibles. Cette dernière région a une aire de 1. Donc, la probabilité sera égale à l'aire totale des régions ombrées.

La région qui représente le 1er cas est un triangle rectangle ayant une base de $\frac{1}{4}$ et une hauteur de $\frac{1}{4}$. Son aire est donc égale à $\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}$, ou $\frac{1}{32}$.
La région qui représente le 4e cas est aussi un triangle rectangle ayant une base de $\frac{1}{4}$ et une hauteur de $\frac{1}{4}$. En effet, la droite d'équation $a+b=\frac{7}{4}$ coupe le dessus du carré (la droite d'équation $b=1$) lorsque $a=\frac{3}{4}$ et elle coupe le côté droit du carré (la droite d'équation $a=1$) lorsque $b=\frac{3}{4}$.
La région du 2e cas est congruente à celle du 3e cas. Les deux régions ont donc la même aire.
La région du 2e cas est un petit carré (d'aire $\frac{1}{4}$) dont on a enlevé deux petits triangles ayant

chacun une base de $\frac{1}{4}$ et une hauteur de $\frac{1}{4}$. (On peut le confirmer en déterminant les points d'intersection, comme pour le 4^e^ cas.)
Donc, l'aire de la région ombrée du 2^e^ cas est égale à $\frac{1}{4} - 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$, ou $\frac{1}{4} - \frac{1}{16}$, ou $\frac{3}{16}$.

L'aire totale des régions ombrées est donc égale à $\frac{1}{32} + \frac{1}{32} + \frac{3}{16} + \frac{3}{16}$, ou $\frac{14}{32}$, ou $\frac{7}{16}$.
La probabilité demandée est donc égale à $\frac{7}{16}$.

(Parce que le calcul de la probabilité est équivalent au calcul des aires, il n'est pas nécessaire de porter une attention particulière aux points frontaliers qui sont inclus dans certaines régions ou exclus.)

Réponse : (D)