Le CENTRE d'ÉDUCATION

en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

www.cemc.uwaterloo.ca

Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur 2011

le mardi 22 novembre 2011

(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le mercredi 23 novembre 2011

(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

Partie A

1. *Solution 1*

   On développe et on simplifie :

$$2^4\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}\right)=16+\frac{16}{2}+\frac{16}{4}+\frac{16}{8}+\frac{16}{16}=16+8+4+2+1=31$$

   Solution 2

   On additionne d'abord les fractions au moyen d'un dénominateur commun :

$$2^4\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}\right)=16\left(\frac{16}{16}+\frac{8}{16}+\frac{4}{16}+\frac{2}{16}+\frac{1}{16}\right)=16\left(\frac{31}{16}\right)=31$$

   Réponse : 31

2. Soit d l'âge de Denis aujourd'hui et j l'âge de Jean aujourd'hui, en années.
   Il y a quatre ans, Denis avait $(d-4)$ ans et Jean avait $(j-4)$ ans.
   Dans cinq ans, Denis aura $(d+5)$ ans et Jean aura $(j+5)$ ans.
   D'après le premier renseignement, $d-4=3(j-4)$, d'où $d-4=3j-12$, ou $d=3j-8$.
   D'après le deuxième renseignement, $d+5=2(j+5)$, d'où $d+5=2j+10$, ou $d=2j+5$.
   Les deux expressions pour d sont équivalentes. Donc $3j-8=2j+5$, d'où $j=13$.
   On reporte cette valeur dans l'équation $d=2j+5$. Donc $d=2(13)+5$, ou $d=31$.
   Donc Denis a 31 ans maintenant.

   Réponse : 31

3. Lorsqu'on jette le dé rouge, il y a 6 résultats équiprobables. Pour chacun de ces résultats, il y a 6 résultats équiprobables lorsqu'on jette le dé bleu.
   Lorsqu'on jette les deux dés, le nombre de résultats équiprobables est donc égal à 6×6, ou 36.
   (Ces résultats sont 1 rouge et 1 bleu, 1 rouge et 2 bleu, 1 rouge et 3 bleu, …, 6 rouge et 6 bleu.)
   Le tableau ci-dessous indique la somme des deux numéros pour chaque résultat :

		Dé bleu					
		1	2	3	4	5	6
	1	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
Dé	3	4	5	6	7	8	9
rouge	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

   Or, les seuls carrés parfaits de 2 à 12 sont 4 (c.-à-d. 2^2) et 9 (c.-à-d. 3^2). Donc, 7 des 36 résultats équiprobables possibles sont des carrés parfaits.
   Donc, la probabilité pour que la somme soit un carré parfait est de $\frac{7}{36}$.

   Réponse : $\frac{7}{36}$

4. *Solution 1*

On écrit 18 800 en factorisation première :

$$18\,800 = 188 \cdot 100 = 2 \cdot 94 \cdot 10^2 = 2 \cdot 2 \cdot 47 \cdot (2 \cdot 5)^2 = 2^2 \cdot 47 \cdot 2^2 \cdot 5^2 = 2^4 5^2 47^1$$

Si d est un diviseur positif de 18 800, alors en factorisation première il ne peut avoir plus de 4 facteurs 2, 2 facteurs 5 et 1 facteur 47 et il ne peut avoir aucun autre facteur premier. Donc si d est un diviseur positif de 18 800, alors $d = 2^a 5^b 47^c$, a, b et c étant des entiers tels que $0 \le a \le 4$, $0 \le b \le 2$ et $0 \le c \le 1$.

On veut compter combien il y a de diviseurs d qui sont divisibles par 235. Puisque $235 = 5 \times 47$, il faut que d admette au moins un facteur 5 et un facteur 47. On doit donc avoir $b \ge 1$ et $c \ge 1$. (En effet, puisque $0 \le c \le 1$, il faut que c soit égal à 1.)

Soit D un diviseur positif de 18 800 qui est divisible par 235.

Donc D est de la forme $d = 2^a 5^b 47^1$, a et b étant des entiers tels que $0 \le a \le 4$ et $1 \le b \le 2$.

Puisqu'il y a 5 valeurs possibles de a et deux valeurs possibles de b, alors le nombre de valeurs possibles de D est égal à 5×2, ou 10.

Le nombre 18 800 admet donc 10 diviseurs positifs qui sont divisibles par 235.

Solution 2

Un diviseur positif de 18 800 qui est divisible par 235 doit être de la forme $235q$, q étant un entier strictement positif. On veut donc compter le nombre d'entiers strictement positifs q qu'il existe de manière que $235q$ soit un diviseur positif de 18 800.

Or $235q$ est un diviseur positif de 18 800 s'il existe un entier positif d tel que $(235q)d = 18\,800$.

On divise chaque membre par 235. On cherche donc des entiers positifs d tels que $qd = 80$.

On veut donc compter combien il y a d'entiers positifs q pour lesquels il existe un entier positif d tels que $qd = 80$.

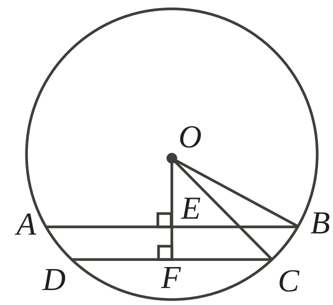
En d'autres mots, on veut compter combien il y a de diviseurs positifs de 80.

On peut procéder comme dans la partie (a) ou, puisque 80 est un nombre plutôt petit, on peut déterminer tous ses diviseurs : $1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 40, 80$.

Il y a 10 diviseurs. Le nombre 18 800 admet donc 10 diviseurs positifs qui sont divisibles par 235.

Réponse : 10

5. Puisque OF passe par le centre du cercle et qu'il est perpendiculaire aux cordes AB et DC, il coupe AB et DC en leur milieu. On a donc $AE = EB$ et $DF = FC$.
(Pour confirmer de façon plus détaillée que $AE = EB$, on peut joindre O à A et O à B. Puisque $OA = OB$ (ce sont des rayons), le côté OE est commun aux triangles OAE et OBE. Puisque ces triangles sont rectangles et qu'ils ont deux paires de côtés congrus deux à deux, ils sont congruents. Donc $AE = EB$. Un argument semblable démontre que $DF = FC$.)
Puisque $AE = EB$ et que $AB = 8$, alors $AE = EB = 4$.
Puisque $DF = FC$ et que $DC = 6$, alors $DF = FC = 3$.
On joint O à B et O à C.
Soit r le rayon du cercle et $OE = x$.
Puisque le triangle OEB est rectangle et que $OE = x$, $EB = 4$ et $OB = r$, alors par le théorème de Pythagore, on a $r^2 = x^2 + 4^2$.
Puisque $OE = x$ et $EF = 1$, alors $OF = x + 1$.
Puisque le triangle OFC est rectangle et que $OF = x+1$, $FC = 3$ et $OC = r$, alors par le théorème de Pythagore, on a $r^2 = (x+1)^2+3^2$.



On soustrait la 1^{re} équation de la 2^{e} pour obtenir $0 = (x^2 + 2x + 1 + 9) - (x^2 + 16)$, d'où $0 = 2x - 6$, ou $x = 3$.
Puisque $x = 3$, alors $r^2 = 3^2 + 4^2$, ou $r^2 = 25$. Puisque $r > 0$, alors $r = 5$.

Réponse : 5

6. Soit R_1, R_2 et R_3 les trois rangées, C_1, C_2 et C_3 les trois colonnes, D_1 la diagonale qui monte de gauche à droite et D_2 la diagonale qui descend de gauche à droite.
Puisque le tableau est un carré magique, les nombres de chaque rangée, de chaque colonne et de chaque diagonale ont la même somme.
En comparant R_1 et D_1, on a $\log a + \log b + \log x = \log z + \log y + \log x$.
Donc $\log a + \log b = \log z + \log y$, d'où $\log(ab) = \log(yz)$. Donc $ab = yz$, ou $z = \dfrac{ab}{y}$.
En comparant C_1 et R_2, on a $\log a + p + \log z = p + \log y + \log c$.
Donc $\log a + \log z = \log y + \log c$, d'où $\log(az) = \log(cy)$. Donc $az = cy$, ou $z = \dfrac{cy}{a}$.
Puisque $z = \dfrac{ab}{y}$ et $z = \dfrac{cy}{a}$, alors $\dfrac{ab}{y} = \dfrac{cy}{a}$, d'où $y^2 = \dfrac{a^2 b}{c}$.
Puisque $a, b, c, y > 0$, alors $y = \dfrac{ab^{1/2}}{c^{1/2}}$.
En comparant C_3 et D_2, on a $\log x + \log c + r = \log a + \log y + r$.
Donc $\log x + \log c = \log a + \log y$, ou $\log(xc) = \log(ay)$. Donc $xc = ay$, d'où $x = \dfrac{ay}{c}$.
Donc $xyz = \dfrac{ay}{c} \cdot y \cdot \dfrac{cy}{a} = y^3 = \left(\dfrac{ab^{1/2}}{c^{1/2}}\right)^3 = \dfrac{a^3 b^{3/2}}{c^{3/2}}$.
(Il y a beaucoup d'autres façons d'obtenir le même résultat.)

Réponse : $xyz = \dfrac{a^3 b^{3/2}}{c^{3/2}}$

Partie B

1. (a) A et B sont les points où la parabole d'équation $y = 25 - x^2$ coupe l'axe des abscisses.
À ces points, on a $y = 0$. L'équation $y = 25 - x^2$ devient $0 = 25 - x^2$, d'où $x^2 = 25$, ou $x = \pm 5$. Donc, A a pour coordonnées $(-5, 0)$ et B a pour coordonnées $(5, 0)$.
Le segment AB a donc pour longueur $5 - (-5)$, ou 10.

(b) Puisque $ABCD$ est un rectangle, $BC = AD$ et $\angle DAB = 90°$.
Puisque $BD = 26$ et $AB = 10$, alors d'après le triangle de Pythagore,

$$AD = \sqrt{BD^2 - AB^2} = \sqrt{26^2 - 10^2} = \sqrt{676 - 100} = \sqrt{576} = 24$$

puisque $AD > 0$.
Puisque $BC = AD$, alors $BC = 24$.

(c) Puisque $ABCD$ est un rectangle dont les côtés sont parallèles aux axes, alors D et C sont directement en dessous des points respectifs A et B.
Puisque $AD = BC = 24$, que A a pour coordonnées $(-5, 0)$ et que B a pour coordonnées $(5, 0)$, alors les coordonnées de D sont $(-5, -24)$ et celles de C sont $(5, -24)$.
Le segment DC est donc sur la droite d'équation $y = -24$.
E et F sont donc les points d'intersection de la droite d'équation $y = -24$ et de la parabole d'équation $y = 25 - x^2$.
Les coordonnées de ces points satisfont donc aux deux équations. On a donc $-24 = 25 - x^2$, d'où $x^2 = 49$, ou $x = \pm 7$.
E et F ont donc pour coordonnées respectives $(-7, -24)$ et $(7, -24)$.
Le segment EF a donc pour longueur $7 - (-7)$, ou 14.

2. (a) Puisque x et y sont des entiers strictement positifs tels que $\dfrac{2x + 11y}{3x + 4y} = 1$, alors $2x + 11y = 3x + 4y$, d'où $7y = x$. On pose $x = 7$ et $y = 1$.
Dans ce cas, on a $\dfrac{2x + 11y}{3x + 4y} = \dfrac{2(7) + 11(1)}{3(7) + 4(1)} = \dfrac{25}{25} = 1$. L'équation est donc vérifiée.
Les entiers $x = 7$ et $y = 1$ satisfont à l'équation.
(On aurait pu choisir n'importe quel couple (x, y) d'entiers strictement positifs tels que $x = 7y$.)

(b) Soit $u = \dfrac{a}{b}$ et $v = \dfrac{c}{d}$, a, b, c, d étant des entiers strictement positifs.
La moyenne de u et de v est égale à $\dfrac{1}{2}(u + v) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{ad + bc}{bd}\right) = \dfrac{ad + bc}{2bd}$.
Puisque $u = \dfrac{a}{b} = \dfrac{ax}{bx}$ et $v = \dfrac{c}{d} = \dfrac{cy}{dy}$ pour tous entiers strictement positifs x et y, alors chaque fraction de la forme $\dfrac{ax + cy}{bx + dy}$ est une médiante de u et de v.
Est-il possible d'écrire $\dfrac{ad + bc}{2bd}$ sous la forme $\dfrac{ax + cy}{bx + dy}$, x et y étant des entiers strictement positifs ?
Oui. En effet, posons $x = d$ et $y = b$. Donc $\dfrac{ax + cy}{bx + dy} = \dfrac{ad + cb}{bd + db} = \dfrac{ad + bc}{2bd}$.
Si on écrit u et v sous formes $u = \dfrac{ad}{bd}$ et $v = \dfrac{bc}{bd}$, on obtient la médiante $\dfrac{ad + bc}{bd + bd} = \dfrac{ad + bc}{2bd}$, qui est égale à la moyenne de u et de v.
La moyenne de u et de v est donc une médiante de u et de v.

(c) Soit u et v deux nombres rationnels strictement positifs tels que $u < v$.
Une médiante m de u et de v est un nombre de la forme $\dfrac{a+c}{b+d}$, u et v étant tels que $u = \dfrac{a}{b}$ et $v = \dfrac{c}{d}$, a, b, c, d étant des entiers strictement positifs.
Puisque $u < v$, alors $\dfrac{a}{b} < \dfrac{c}{d}$, d'où $ad < bc$ (puisque $b, d > 0$).
Il faut démontrer que $u < m$ et que $m < v$.
On le démontrera en montrant que $m - u > 0$ et $v - m > 0$.
On considère $m - u$:

$$m - u = \frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b} = \frac{b(a+c) - a(b+d)}{b(b+d)} = \frac{ab+bc-ab-ad}{b(b+d)} = \frac{bc-ad}{b(b+d)}$$

Puisque $a, b, c, d > 0$, le dénominateur de cette dernière fraction est positif. Puisque $bc > ad$, le numérateur aussi est positif.
Donc $m - u = \dfrac{bc-ad}{b(b+d)} > 0$, d'où $m > u$.
On considère $v - m$:

$$v - m = \frac{c}{d} - \frac{a+c}{b+d} = \frac{c(b+d) - d(a+c)}{d(b+d)} = \frac{bc+cd-ad-cd}{d(b+d)} = \frac{bc-ad}{d(b+d)}$$

Puisque $a, b, c, d > 0$, le dénominateur de cette dernière fraction est positif. Puisque $bc > ad$, le numérateur aussi est positif.
Donc $v - m = \dfrac{bc-ad}{d(b+d)} > 0$, d'où $v > m$.
Donc $u < m < v$, ce qu'il fallait démontrer.

3. (a) On écrit tous les produits possibles en commençant par tous les termes qui commencent par a_1 (c.-à-d. où $i = 1$), puis tous ceux qui commencent par a_2, puis tous ceux qui commencent par a_3 :

$$\begin{array}{ll} a_1a_2a_3 = (-1)\cdot(-1)\cdot 1 = 1 & a_1a_4a_5 = (-1)\cdot 1\cdot 1 = -1 \\ a_1a_2a_4 = (-1)\cdot(-1)\cdot 1 = 1 & a_2a_3a_4 = (-1)\cdot 1\cdot 1 = -1 \\ a_1a_2a_5 = (-1)\cdot(-1)\cdot 1 = 1 & a_2a_3a_5 = (-1)\cdot 1\cdot 1 = -1 \\ a_1a_3a_4 = (-1)\cdot 1\cdot 1 = -1 & a_2a_4a_5 = (-1)\cdot 1\cdot 1 = -1 \\ a_1a_3a_5 = (-1)\cdot 1\cdot 1 = -1 & a_3a_4a_5 = 1\cdot 1\cdot 1 = 1 \end{array}$$

Quatre des dix produits possibles égalent 1.

(b) Chaque terme $a_ia_ja_k$ a un produit égal à 1 ou à -1 selon qu'il contient un nombre pair ou impair de facteurs -1.
Si $a_ia_ja_k$ comprend trois facteurs 1 et aucun facteur (-1), il a un produit de 1.
Si $a_ia_ja_k$ comprend deux facteurs 1 et un facteur (-1), il a un produit de -1.
Si $a_ia_ja_k$ comprend un facteur 1 et deux facteurs (-1), il a un produit de 1.
Si $a_ia_ja_k$ comprend aucun facteur 1 et trois facteurs (-1), il a un produit de -1.
Puisque la suite comprend m termes -1 et p termes 1, alors :

– le nombre de façons de choisir trois facteurs 1 et aucun facteur (-1) est égal à $\dbinom{p}{3}\dbinom{m}{0}$,

– le nombre de façons de choisir deux facteurs 1 et un facteur (-1) est égal à $\dbinom{p}{2}\dbinom{m}{1}$,

– le nombre de façons de choisir un facteur 1 et deux facteurs (-1) est égal à $\binom{p}{1}\binom{m}{2}$,

– le nombre de façons de choisir aucun facteur 1 et trois facteurs (-1) est égal à $\binom{p}{0}\binom{m}{3}$.

Donc, le nombre de termes $a_ia_ja_k$ qui ont un produit de 1 est égal à $\binom{p}{3}\binom{m}{0}+\binom{p}{1}\binom{m}{2}$ et le nombre de termes qui ont un produit de -1 est égal à $\binom{p}{2}\binom{m}{1}+\binom{p}{0}\binom{m}{3}$.

Si la moitié des termes ont un produit de 1, alors l'autre moitié des termes ont un produit de -1. Le nombre de termes de chaque sorte est le même.

Cette propriété est équivalente à chacune des équations suivantes :

$$
\begin{aligned}
\binom{p}{3}\binom{m}{0}+\binom{p}{1}\binom{m}{2} &= \binom{p}{2}\binom{m}{1}+\binom{p}{0}\binom{m}{3}\\
\frac{p(p-1)(p-2)}{3(2)(1)}\cdot 1 \quad + \quad p\cdot\frac{m(m-1)}{2(1)} &= \frac{p(p-1)}{2(1)}\cdot m \quad + \quad 1\cdot\frac{m(m-1)(m-2)}{3(2)(1)}\\
(p^3-3p^2+2p)+3pm(m-1) &= 3mp(p-1)+(m^3-3m^2+2m)\\
p^3-3p^2+2p+3m^2p-3mp &= 3mp^2-3mp+m^3-3m^2+2m
\end{aligned}
$$

Chaque étape jusqu'ici est réversible, ce qui indique que cette dernière équation est équivalente à la propriété que l'on considère.

On regroupe les termes du membre de gauche et on factorise :

$$
\begin{aligned}
p^3-m^3-3(p^2-m^2)+2(p-m)+3m^2p-3mp^2 &= 0\\
(p-m)(p^2+mp+m^2)-3(p-m)(p+m)+2(p-m)-3mp(p-m) &= 0\\
(p-m)(p^2+mp+m^2-3(p+m)+2-3mp) &= 0\\
(p-m)(p^2-3p-2mp+m^2-3m+2) &= 0
\end{aligned}
$$

(On a utilisé les identités $p^3-m^3=(p-m)(p^2+mp+m^2)$ et $p^2-m^2=(p-m)(p+m)$.)

Donc, la condition que l'on considère est équivalente à ce que $p-m=0$ ou $p^2-3p-2mp+m^2-3m+2=0$.

On compte le nombre de couples (m,p) dans chacun de ces deux cas. Le premier est plus simple que le deuxième.

1er cas : $p-m=0$

On veut compter le nombre de couples (m,p) d'entiers strictement positifs qui satisfont à :

$$1\le m\le p\le 1000 \quad \text{et à} \quad m+p\ge 3 \quad \text{et à} \quad p-m=0$$

Si $p-m=0$, alors $p=m$. Puisque $1\le m\le p\le 1000$ et que $m+p\ge 3$, alors les couples (m,p) possibles sont de la forme $(m,p)=(k,k)$, k étant n'importe quel entier de $k=2$ à $k=1000$. Il y a 999 tels couples.

2e cas : $p^2-3p-2mp+m^2-3m+2=0$

On veut compter le nombre de couples (m,p) d'entiers strictement positifs qui satisfont à :

$$1\le m\le p\le 1000 \quad \text{et à} \quad m+p\ge 3 \quad \text{et à} \quad p^2-3p-2mp+m^2-3m+2=0$$

On commence par cette dernière équation. On la considère comme équation du second degré en p (dont les coefficients sont en fonction de m) :

$$p^2 - p(2m+3) + (m^2 - 3m + 2) = 0$$

D'après la formule bien connue, cette équation admet une solution p si et seulement si :

$$\begin{aligned} p &= \frac{(2m+3) \pm \sqrt{(2m+3)^2 - 4(m^2-3m+2)}}{2} \\ &= \frac{(2m+3) \pm \sqrt{(4m^2+12m+9) - (4m^2-12m+8)}}{2} \\ &= \frac{(2m+3) \pm \sqrt{24m+1}}{2} \end{aligned}$$

Or puisque $m \geq 1$, alors $24m+1 \geq 25$, d'où $\sqrt{24m+1} \geq 5$.
Donc $\dfrac{(2m+3) - \sqrt{24m+1}}{2} \leq \dfrac{(2m+3)-5}{2} = m-1$.
En d'autres mots si $p = \dfrac{(2m+3) - \sqrt{24m+1}}{2}$, alors $p \leq m-1$. Or d'après l'énoncé, $p \geq m$, ce qui crée une situation impossible.
Donc dans le 2^e^ cas, on cherche les couples (m,p) d'entiers strictement positifs qui satisfont à :

$$\text{(I) } 1 \leq m \leq p \leq 1000 \quad \text{et à} \quad \text{(II) } m+p \geq 3 \quad \text{et à} \quad \text{(III) } p = \frac{(2m+3)+\sqrt{24m+1}}{2}$$

D'après (III), pour que p soit un entier, il faut que $\sqrt{24m+1}$ soit un entier. Il faut donc que $24m+1$ soit un carré parfait.
Puisque $24m+1$ est toujours un entier impair, $24m+1$ doit être un carré parfait impair.
Puisque $24m+1$ est 1 de plus qu'un multiple de 3 (car $24m$ est un multiple de 3), alors $24m+1$ n'est pas un multiple de 3.
Donc si m donne une valeur entière à p, alors $24m+1$ doit être un carré parfait qui n'est pas un multiple de 3.
On cherche donc les carrés parfaits impairs qui sont de la forme $24m+1$ et qui ne sont pas des multiples de 3.
Or, tous les carrés parfaits impairs qui ne sont pas des multiples de 3 sont de la forme $24m+1$. (Cette propriété sera démontrée à la toute fin.)
Les valeurs de $24m+1$ que l'on cherche sont tous les carrés parfaits impairs qui ne sont pas des multiples de 3.

On vérifie ensuite que (II) est toujours vérifiée.
On peut supposer que $m \geq 1$. D'après la formule qui exprime p en fonction de m, on voit que $p \geq \dfrac{(2(1)+3)+\sqrt{24(1)+1}}{2} = 5$, d'où $m+p \geq 1+5 = 6$. La condition $m+p \geq 3$ est donc toujours vérifiée.

On vérifie ensuite qu'une partie de (I) est toujours vérifiée.
On remarque que $p = \dfrac{(2m+3)+\sqrt{24m+1}}{2} \geq \dfrac{2m}{2} = m$. Donc, la condition $p \geq m$ est toujours vérifiée.

On veut donc compter le nombre de couples (m, p) d'entiers strictement positifs tels que $p \leq 1000$ et $p = \dfrac{(2m+3)+\sqrt{24m+1}}{2}$.

D'après un résultat précédent, les valeurs de m que l'on considère sont celles pour lesquelles $24m+1$ est un carré parfait impair qui n'est pas un multiple de 3.
Dans un tableau, on place les valeurs possibles de $24m+1$ (carrés parfaits impairs qui ne sont pas des multiples de 3), ainsi que les valeurs correspondantes de m et de p (selon la formule) :

$24m+1$	m	p
$5^2 = 25$	1	5
$7^2 = 49$	2	7
$11^2 = 121$	5	12
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$143^2 = 20449$	852	925
$145^2 = 21025$	876	950
$147^2 = 22201$	925	1001

Dans cette dernière rangée, on a $p > 1000$, ce qui dépasse les valeurs permises de p. On peut donc arrêter, car une plus grande valeur de $24m+1$ donnera une plus grande valeur de m et de là une plus grande valeur de p.
(On aurait pu obtenir la restriction sur les valeurs de m en résolvant l'inéquation $\dfrac{(2m+3)+\sqrt{24m+1}}{2} \leq 1000$.)

Il reste à compter le nombre de couples qui découlent de ce tableau.
On le fait en comptant le nombre de carrés parfaits impairs, de 5^2 à 145^2, qui ne sont pas des multiples de 3.
Cela est équivalent à compter le nombre d'entiers impairs, de 5 à 145, qui ne sont pas des multiples de 3.
De 5 à 145, il y a 71 entiers impairs. En effet, à partir de 5, on peut ajouter 70 fois le nombre 2 pour arriver à 145.
De 5 à 145, les multiples impairs de 3 sont $9, 15, 21, \cdots, 135, 141$. Il y en a 23, car à partir de 9, on peut ajouter 22 fois le nombre 6 pour arriver à 141.
Puisque $71 - 23 = 48$, il y a 48 entiers impairs, de 5 à 145, qui ne sont pas des multiples de 3.
Dans ce cas, il y a donc 48 couples (m, p).

En tout, le nombre de couples (m, p) pour lesquels exactement la moitié des termes $a_i a_j a_k$ ont un produit de 1 est égal à $999 + 48$, ou 1047.

Il reste à démontrer la propriété suivante qui a été utilisée ci-haut :

Chaque carré parfait impair qui n'est pas un multiple de 3 est de la forme $24m+1$.

Démonstration
Soit k^2 un carré parfait impair qui n'est pas un multiple de 3.
Puisque k^2 est impair, alors k est impair.
Puisque k^2 n'est pas un multiple de 3, alors k n'est pas un multiple de 3.

Puisque k est impair, il doit être de la forme $k = 6q - 1$ ou $k = 6q + 1$ ou $k = 6q + 3$, q étant un entier quelconque. (La forme $k = 6q + 5$ est équivalente à la forme $k = 6q - 1$.)
Puisque k n'est pas un multiple de 3, alors k ne peut pas être de la forme $6q + 3$ (qui est équivalente à $3(2q + 1)$).
Donc, on a $k = 6q - 1$ ou $k = 6q + 1$.
Dans le premier cas, $k^2 = (6q - 1)^2 = 36q^2 - 12q + 1 = 12(3q^2 - q) + 1$.
Dans le deuxième cas, $k^2 = (6q + 1)^2 = 36q^2 + 12q + 1 = 12(3q^2 + q) + 1$.
Si q est un entier pair, alors $3q^2$ est pair. Alors $3q^2 + q$ et $3q^2 - q$ sont tous deux pairs.
Si q est un entier impair, alors $3q^2$ est impair. Alors $3q^2 + q$ et $3q^2 - q$ sont tous deux pairs.
Si $k^2 = 12(3q^2 + q) + 1$, alors puisque $3q^2 + q$ est pair, il existe un entier x pour lequel $3q^2 + q = 2x$. On a donc $k^2 = 24x + 1$.
Si $k^2 = 12(3q^2 - q) + 1$, alors puisque $3q^2 - q$ est pair, il existe un entier y pour lequel $3q^2 - q = 2y$. On a donc $k^2 = 24y + 1$.
Dans chaque cas, k^2 est 1 de plus qu'un multiple de 24, ce qu'il fallait démontrer.