Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
www.cemc.uwaterloo.ca

Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur

le mardi 22 novembre 2011
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le mercredi 23 novembre 2011
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

UNIVERSITY OF WATERLOO   WATERLOO MATHEMATICS

Durée : 2 heures

L'utilisation de la calculatrice est permise, pourvu que celle-ci ne soit ni programmable, ni munie d'affichage graphique.

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.
Le questionnaire est divisé en deux parties.

PARTIE A

1. Cette partie est composée de six questions de 5 points chacune.
2. **Écrire la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse.** Le maximum des points est attribué pour une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. Une partie des points sera attribuée **pour du travail pertinent** inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse.

PARTIE B

1. Cette partie est composée de trois questions de 10 points chacune.
2. **Les solutions complètes doivent être écrites aux endroits appropriés du cahier-réponse.** Le brouillon doit être fait ailleurs. Si le cahier est rempli, le surveillant ou la surveillante distribuera des feuilles lignées. Insérer ces feuilles dans le cahier-réponse. Inscrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille insérée.
3. Des points sont attribués pour les solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

Remarque : À la fin du concours, insérer la feuille de renseignements à l'intérieur du cahier-réponse.

Une liste sera publiée, sur le site Web du CEMI au www.cemc.uwaterloo.ca, portant le nom des candidats qui ont obtenu le plus grand nombre de points.

Concours canadien de mathématiques de niveau supérieur

Remarques :
1. Prière de lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Inscrire toutes les solutions dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Les réponses et les calculs doivent être exprimés à l'aide de nombres exacts, tels que 4π et $2+\sqrt{7}$, plutôt que $12{,}566\ldots$ ou $4{,}646\ldots$
4. **L'utilisation de la calculatrice est permise**, pourvu que celle-ci ne soit ni programmable, ni munie d'affichage graphique.
5. Les figures ne sont pas dessinées à l'échelle. Elles servent d'aide seulement.

PARTIE A

Pour chaque problème dans la partie A, le maximum des points est attribué pour une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. Une partie des points sera attribuée pour du travail pertinent inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse.

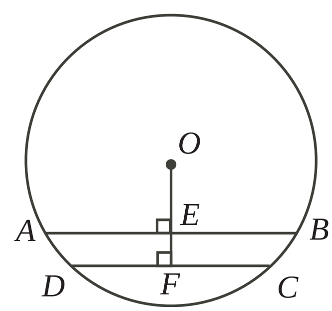
1. Déterminer la valeur de $2^4\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{2^4}\right)$.

2. Il y a quatre ans, Denis était trois fois plus âgé que Jean.
Dans cinq ans, Denis sera deux fois plus âgé que Jean.
Quel âge Denis a-t-il maintenant ?

3. Un dé est un cube dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On jette un dé rouge et un dé bleu. On calcule la somme des numéros sur les faces supérieures des deux dés. Quelle est la probabilité pour que cette somme soit un carré parfait ?

4. Déterminer combien le nombre 18 800 a de diviseurs positifs qui sont divisibles par 235.

5. Dans la figure ci-contre, le cercle a pour centre O. OF est perpendiculaire à DC au point F et il est perpendiculaire à AB au point E. Sachant que $AB=8$, $DC=6$ et $EF=1$, déterminer le rayon du cercle.



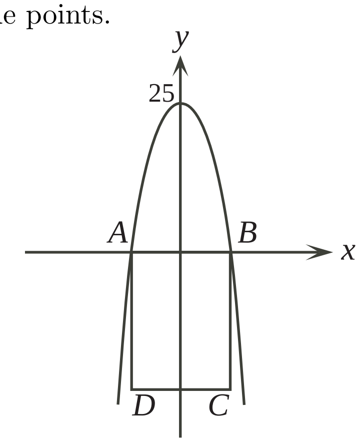
6. Dans un carré magique, les nombres de chaque rangée, de chaque colonne et de chaque diagonale ont la même somme. Le tableau ci-contre est un carré magique tel que $a, b, c, x, y, z > 0$. Exprimer le produit xyz en fonction de a, b et c.

$\log a$	$\log b$	$\log x$
p	$\log y$	$\log c$
$\log z$	q	r

PARTIE B

Pour chaque question dans la partie B, votre solution doit être bien organisée et doit aussi présenter certains mots d'explication ou de justification. Des points sont attribués pour les solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

1. Dans la figure ci-contre, la parabole d'équation $y = 25 - x^2$ coupe l'axe des abscisses aux points A et B.



   (a) Déterminer la longueur du segment AB.

   (b) On forme le rectangle $ABCD$ comme dans la figure, C et D étant au-dessous de l'axe des abscisses de manière que $BD = 26$. Déterminer la longueur du segment BC.

   (c) Le segment CD est prolongé dans les deux sens de manière à couper la parabole aux points E et F. Déterminer la longueur du segment EF.

2. (a) Déterminer d'abord deux entiers strictement positifs, x et y, tels que $\dfrac{2x + 11y}{3x + 4y} = 1$.

   On considère maintenant deux nombres rationnels u et v tels que $u < v$.
   On exprime u et v sous forme fractionnaire, soit $u = \dfrac{a}{b}$ et $v = \dfrac{c}{d}$, a, b, c et d étant des entiers strictement positifs et les fractions n'étant pas nécessairement irréductibles.
   La fraction $\dfrac{a+c}{b+d}$ est appelée une *médiante* de u et de v. Puisque u et v peuvent avoir plus d'un numérateur et plus d'un dénominateur, u et v peuvent avoir plus d'une médiante.
   En résolvant la partie (a), vous avez démontré que 1 est une médiante de $\dfrac{2}{3}$ et de $\dfrac{11}{4}$. De même, 2 est une médiante de $\dfrac{2}{3}$ et de $\dfrac{11}{4}$, puisque $\dfrac{2}{3} = \dfrac{6}{9}$ et $\dfrac{11}{4} = \dfrac{44}{16}$ et que $\dfrac{6+44}{9+16} = 2$.

   (b) Démontrer que la moyenne de u et de v, soit $\frac{1}{2}(u + v)$, est une médiante de u et de v.

   (c) Démontrer que toute médiante m de u et de v vérifie l'inégalité $u < m < v$.

3. On considère une suite de n entiers, $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, $n \geq 3$, dont les m premiers termes égalent tous -1 et les p autres termes, $p = n - m$, égalent tous 1. Une telle suite est appelée une *suite MP*.

   (a) Lorsque $m = 2$ et $p = 3$, la suite MP a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 devient $-1, -1, 1, 1, 1$. On considère tous les produits $a_i a_j a_k$, $i < j < k$, que l'on peut former à partir des termes de cette suite. Déterminer combien de ces produits égalent 1.

   (b) On considère tous les produits $a_i a_j a_k$, $i < j < k$, que l'on peut former à partir d'une suite MP $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$. Déterminer combien il y a de couples $(m,\, p)$, $1 \leq m \leq p \leq 1000$ et $m + p \geq 3$, pour lesquels exactement la moitié de ces produits égalent 1.