Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
www.cemc.uwaterloo.ca

Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiaire 2011

le mardi 22 novembre 2011
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le mercredi 23 novembre 2011
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

Solutions

Partie A

1. Puisque le champ est rectangulaire, il a deux côtés de 100 m et deux côtés de 50 m.
   Il a un périmètre de 300 m, car $100 + 50 + 100 + 50 = 300$.
   Puisque Joey marche autour du champ 5 fois, il marchera 5×300 m, ou 1500 m.

   Réponse : 1500

2. *Solution 1*
   Puisque $a + b = 9 - c$ et $a + b = 5 + c$, alors $9 - c = 5 + c$.
   Donc $9 - 5 = c + c$, ou $2c = 4$, d'où $c = 2$.

   Solution 2
   Puisque $a + b = 9 - c$, alors $c = 9 - a - b$.
   Puisque $a + b = 5 + c$, alors $a + b = 5 + 9 - a - b$, d'où $2a + 2b = 14$, ou $a + b = 7$.
   Puisque $c = 9 - a - b$, ou $c = 9 - (a + b)$, alors $c = 9 - 7$, ou $c = 2$.

   Réponse : 2

3. *Solution 1*
   Supposons qu'Ophélie travaille un total de n semaines.
   Elle reçoit donc 51 \$ pour la première semaine et 100 \$ par semaine pendant $(n - 1)$ semaines.
   Puisque la moyenne de son salaire hebdomadaire est de 93 \$, on a $\dfrac{51 + (n-1) \times 100}{n} = 93$.
   Donc :

$$\begin{aligned} 51 + 100(n-1) &= 93n \\ 51 + 100n - 100 &= 93n \\ 100n - 49 &= 93n \\ 100n - 93n &= 49 \\ 7n &= 49 \\ n &= 7 \end{aligned}$$

   La moyenne du salaire hebdomadaire d'Ophélie est de 93 \$ après 7 semaines.

   Solution 2
   On procède par essais systématiques en écrivant le salaire total et la moyenne de son salaire hebdomadaire dans un tableau :

Semaine	Salaire cette semaine (\$)	Salaire total (\$)	Moyenne du salaire hebdomadaire (\$)
1	51	51	51,00
2	100	151	$151 \div 2 = 75{,}50$
3	100	251	$251 \div 3 \approx 83{,}67$
4	100	351	$351 \div 4 = 87{,}75$
5	100	451	$451 \div 5 = 90{,}20$
6	100	551	$551 \div 6 \approx 91{,}83$
7	100	651	$651 \div 7 = 93{,}00$

   La moyenne du salaire hebdomadaire d'Ophélie est de 93 \$ après 7 semaines.

   Réponse : 7

4. Lorsqu'on jette le dé rouge, il y a 6 résultats équiprobables. Pour chacun de ces résultats, il y a 6 résultats équiprobables lorsqu'on jette le dé bleu.
Lorsqu'on jette les deux dés, le nombre de résultats équiprobables est donc égal à 6×6, ou 36. (Ces résultats sont 1 rouge et 1 bleu, 1 rouge et 2 bleu, 1 rouge et 3 bleu, ..., 6 rouge et 6 bleu.)
Le tableau ci-dessous indique la somme des deux numéros pour chaque résultat :

		Dé bleu					
		1	2	3	4	5	6
	1	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
Dé	3	4	5	6	7	8	9
rouge	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

Or, les seuls carrés parfaits de 2 à 12 sont 4 (c.-à-d. 2^2) et 9 (c.-à-d. 3^2). Donc, 7 des 36 résultats équiprobables possibles sont des carrés parfaits.
Donc, la probabilité pour que la somme soit un carré parfait est de $\frac{7}{36}$.

Réponse : $\frac{7}{36}$

5. Puisque le triangle ADP est isocèle et que $\angle ADP = 2x^\circ$, alors $\angle DAP = \angle DPA = \frac{1}{2}(180-2x)^\circ$, ou $\angle DAP = \angle DPA = 90^\circ - x^\circ$.
Puisque le triangle CDP est isocèle et que $\angle CDP = 2x^\circ$, alors $\angle DCP = \angle DPC = 90^\circ - x^\circ$.
Puisque le triangle BAP est isocèle et que $\angle BAP = (x+5)^\circ$, alors $\angle BPA = \frac{1}{2}(180^\circ - (x+5)^\circ)$, ou $\angle BPA = \frac{1}{2}(175 - x)^\circ$.
Or, les mesures des quatre angles qui ont leur sommet au point P ont une somme de 360°. Donc :

$$\begin{aligned}
\angle DPC + \angle DPA + \angle BPA + \angle BPC &= 360^\circ \\
(90^\circ - x^\circ) + (90^\circ - x^\circ) + \tfrac{1}{2}(175 - x)^\circ + (10x - 5)^\circ &= 360^\circ \\
(90 - x) + (90 - x) + \tfrac{1}{2}(175 - x) + (10x - 5) &= 360 \\
(180 - 2x) + (180 - 2x) + (175 - x) + (20x - 10) &= 720 \\
15x + 525 &= 720 \\
15x &= 195 \\
x &= 13
\end{aligned}$$

Donc $x = 13$.

Réponse : 13

6. *Solution 1*
On écrit 6^{16} sous la forme $(2 \cdot 3)^{16}$, ou $2^{16}3^{16}$.
Soit d un diviseur entier positif de 6^{16}. En factorisation première, ce diviseur est formé d'un maximum de 16 facteurs 2 et 16 facteurs 3. Il ne peut inclure un autre facteur premier que 2 ou 3. Sachant que d est un diviseur entier positif de 6^{16}, alors $d = 2^m 3^n$, m et n étant des entiers quelconques tels que $0 \le m \le 16$ et $0 \le n \le 16$.
Puisqu'il y a 17 valeurs possibles de m et 17 valeurs possibles de n, le nombre de diviseurs possibles d est égal à 17×17, ou 289 .
À une exception près, soit 6^8 qui est la racine carrée de 6^{16}, il est possible d'apparier les diviseurs de 6^{16} deux à deux de manière que le produit de chaque paire soit égal à 6^{16}. (Par exemple, on

peut apparier $2^4 3^{13}$ et $2^{12}3^3$, dont le produit est égal à $2^4 3^{13} \times 2^{12}3^3 = 2^{4+12}3^{13+3} = 2^{16}3^{16}$.)
Puisqu'il y a 289 diviseurs en tout, il y a $\frac{1}{2}(289-1)$ paires, ou 144 paires de diviseurs qui ont un produit égal à 6^{16}.
Pour déterminer le produit de tous les diviseurs entiers positifs de 6^{16}, on peut multiplier toutes les paires ensemble, de même que le seul autre diviseur, soit 6^8.
On obtient donc $(6^{16})^{144} \cdot 6^8 = 6^{16(144)+8} = 6^{2312}$.
Donc $k = 2312$.

Solution 2
On écrit 6^{16} sous la forme $(2 \cdot 3)^{16}$, ou $2^{16}3^{16}$.
Soit d un diviseur entier positif de 6^{16}. En factorisation première, ce diviseur est formé d'un maximum de 16 facteurs 2 et 16 facteurs 3. Il ne peut inclure un autre facteur premier que 2 ou 3. Sachant que d est un diviseur entier positif de 6^{16}, alors $d = 2^m 3^n$, m et n étant des entiers quelconques tels que $0 \le m \le 16$ et $0 \le n \le 16$.
On considère les 17 diviseurs de la forme $2^0 3^n$, lorsque n varie de 0 à 16.
Ces diviseurs sont $3^0, 3^1, 3^2, \ldots, 3^{15}, 3^{16}$. Leur produit est égal à :

$$3^0 \cdot 3^1 \cdot 3^2 \cdot \ldots \cdot 3^{15} \cdot 3^{16} = 3^{0+1+2+\cdots+15+16}$$

D'après le renseignement utile donné au début,

$$0 + 1 + 2 + \cdots + 15 + 16 = 1 + 2 + \cdots + 15 + 16 = \tfrac{1}{2}(16)(17) = 136$$

Ces diviseurs ont donc un produit égal à 3^{136}.
On considère ensuite les 17 diviseurs de la forme $2^1 3^n$ lorsque n varie de 0 à 16.
Ces diviseurs sont $2^1 3^0, 2^1 3^1, 2^1 3^2, \ldots, 2^1 3^{15}, 2^1 3^{16}$. Leur produit est égal à :

$$2^1 3^0 \cdot 2^1 3^1 \cdot 2^1 3^2 \cdot \ldots \cdot 2^1 3^{15} \cdot 2^1 3^{16} = 2^{17} 3^{0+1+2+\cdots+15+16} = 2^{17} 3^{136}$$

De façon générale, on considère les 17 diviseurs de la forme $2^m 3^n$, lorsque n varie de 0 à 16 et m étant fixe. Ces diviseurs sont $2^m 3^0, 2^m 3^1, 2^m 3^2, \ldots, 2^m 3^{15}, 2^m 3^{16}$. Leur produit est égal à :

$$2^m 3^0 \cdot 2^m 3^1 \cdot 2^m 3^2 \cdot \ldots \cdot 2^m 3^{15} \cdot 2^m 3^{16} = 2^{17m} 3^{0+1+2+\cdots+15+16} = 2^{17m} 3^{136}$$

Pour obtenir le produit de tous les diviseurs, on multiplie ensemble les produits de tous ces ensembles de 17 diviseurs.
On obtient :

$$\begin{aligned}
&2^0 3^{136} \cdot 2^{17(1)} 3^{136} \cdot 2^{17(2)} 3^{136} \cdot \ldots \cdot 2^{17(15)} 3^{136} \cdot 2^{17(16)} 3^{136} \\
&\quad = 2^{17(0+1+2+\cdots+15+16)} (3^{136})^{17} \\
&\quad = 2^{17(136)} 3^{17(136)} \\
&\quad = 2^{2312} 3^{2312} \\
&\quad = 6^{2312}
\end{aligned}$$

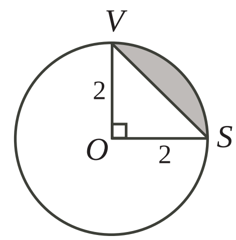
Le produit est égal à 6^{2312}. Donc $k = 2312$.

Réponse : 2312

Partie B

1. (a) Puisque le cercle a un rayon de 2, son aire est égale à $\pi 2^2$, ou 4π.
Le secteur ombré a un angle au centre de 90°, ce qui correspond à un quart d'un angle plein (360°).
Donc, le secteur ombré a une aire égale à un quart de l'aire du cercle, c'est-à-dire $\frac{1}{4} \times 4\pi$, ou π.

(b) On nomme les sommets comme dans la figure ci-contre.
L'aire de la région ombrée est égale à l'aire du secteur OSV moins celle du triangle OSV.
D'après la partie (a), le secteur a une aire égale à π.
Puisque le triangle est rectangle et qu'il a une base et une hauteur de longueur 2, alors son aire est égale à $\frac{1}{2}(2)(2)$, ou 2.
L'aire de la région ombrée est donc égale à $\pi - 2$.

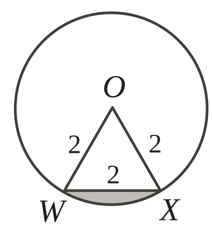


(c) Puisque le triangle PQR est équilatéral, sa hauteur PT coupe la base QR en son milieu.
Puisque $QR = 2$, alors $QT = TR = 1$.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle PTQ, on a

$$PT = \sqrt{PQ^2 - QT^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$$

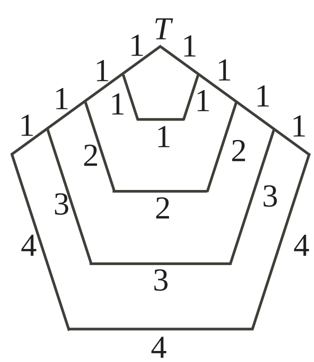
puisque $PT > 0$.
Le triangle PQR a donc une base QR de longueur 2 et une hauteur PT de longueur $\sqrt{3}$.
L'aire du triangle PQR est donc égale à $\frac{1}{2}(2)(\sqrt{3})$, ou $\sqrt{3}$.

(d) On nomme les sommets comme dans la figure ci-contre.
L'aire de la région ombrée est égale à l'aire du secteur WOX moins celle du triangle OWX.
D'après la partie (c), l'aire du triangle OWX est égale à $\sqrt{3}$, puisque le triangle OWX est congruent au triangle PQR.
Puisque le triangle OWX est équilatéral, $\angle WOX = 60°$; puisque $\dfrac{60°}{360°} = \dfrac{1}{6}$, cet angle est un sixième d'un angle plein.



Donc, l'aire du secteur WOX est un sixième de l'aire du cercle. Or $\frac{1}{6}(4\pi) = \frac{2}{3}\pi$.
Donc, l'aire de la région ombrée est égale à $\frac{2}{3}\pi - \sqrt{3}$.

2. (a) Voici la figure 4 indiquant les longueurs des segments :



La longueur des lignes est donc égale à $11 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 4$, ou 38.
(On pourrait aussi utiliser des méthodes semblables à celles des parties (b) ou (c).)

(b) On détermine la différence en imaginant la figure 8 et en déterminant ce qu'il faut y ajouter pour produire la figure 9.
On obtient la figure 9 en ajoutant à la figure 8 un pentagone régulier ayant des côtés de longueur 9 et en enlevant les segments qui chevauchent.
La longueur des côtés d'un tel pentagone est égale à $5 \cdot 9$, ou 45.
Les segments qui chevauchent et que l'on doit enlever proviennent des deux segments de la figure 8 qui partent du sommet T. Ils ont chacun une longueur de 8.
La différence entre la longueur des lignes de la figure 9 et celle de la figure 8 est donc égale à $5 \cdot 9 - 2 \cdot 8$, c'est-à-dire à $45 - 16$, ou 29.

(c) *Solution 1*
La figure 100 est formée de 100 pentagones réguliers ayant des côtés de longueurs 1 à 100, ayant chacun un sommet T de manière que les deux côtés issus de T chevauchent avec ceux des autres pentagones.
On peut tracer la figure 100 en traçant d'abord deux côtés de longueurs 100 issus de T, puis en ajoutant les trois autres côtés de chaque pentagone.
La longueur des lignes de la figure 100 est donc égale à :

$$\begin{aligned} &3(1) + 3(2) + \cdots + 3(99) + 3(100) + 2(100) \\ &\quad = 3(1 + 2 + \cdots + 99 + 100) + 2(100) \\ &\quad = 3(\tfrac{1}{2}(100)(101)) + 200 \\ &\quad = 150(101) + 200 \\ &\quad = 15\,150 + 200 \\ &\quad = 15\,350 \end{aligned}$$

Solution 2
On peut déterminer la longueur des lignes de la figure 100 en déterminant celle de la figure 99 et en ajoutant la longueur des lignes qu'il faut ajouter pour passer de la figure 99 à la figure 100.
De même, on peut déterminer la longueur des lignes de la figure 99 en déterminant celle de la figure 98 et en ajoutant la longueur des lignes qu'il faut ajouter pour passer de la figure 98 à la figure 99.
De façon gégérale, on peut déterminer la longueur des lignes de la figure k en déterminant celle de la figure $(k-1)$ et en ajoutant la longueur des lignes qu'il faut ajouter pour passer de la figure $(k-1)$ à la figure k.
On utilise un processus itératif en calculant la longueur des lignes de la figure 1, en ajoutant la longueur des lignes qu'il faut pour obtenir celle de la figure 2, en ajoutant la longueur des lignes qu'il faut pour obtenir celle de la figure 3 et ainsi de suite jusqu'à la figure 100.
Pour obtenir la différence entre la longueur des lignes de la figure k et celle de la figure $(k-1)$, on peut utiliser la même méthode que pour la partie (b) :

> On imagine la figure $(k-1)$ et on détermine ce qu'il faut y ajouter pour produire la figure k.
> On obtient la figure k en ajoutant à la figure $(k-1)$ un pentagone régulier ayant des côtés de longueur k et en enlevant les segments qui chevauchent.
> La longueur des lignes d'un tel pentagone est égale à $5k$.
> Les segments qui chevauchent et que l'on doit enlever proviennent des deux segments de la figure $(k-1)$ qui partent du sommet T. Ils ont chacun une longueur $(k-1)$.

La différence entre la longueur des lignes de la figure k et celle de la figure $(k-1)$ est donc égale à $5k - 2(k-1)$, ou $3k+2$.

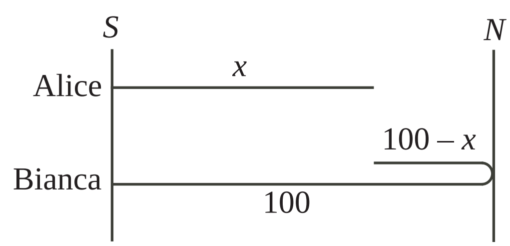
Donc pour passer de la longueur des lignes de la figure 1 (qui est de 5) à celle de la figure 100, il faut ajouter chaque valeur de $3k+2$ (cette expression provient du calcul ci-haut) lorsque k varie de 2 à 100.
La longueur des lignes de la figure 100 est donc égale à :

$$\begin{aligned}
&5 + (3(2)+2) + (3(3)+2) + \cdots + (3(99)+2) + (3(100)+2)\\
&\quad = (3(1)+2) + (3(2)+2) + (3(3)+2) + \cdots + (3(99)+2) + (3(100)+2)\\
&\quad = 3(1+2+3+\cdots+99+100) + 100(2)\\
&\quad = 3(\tfrac{1}{2}(100)(101)) + 200\\
&\quad = 150(101) + 200\\
&\quad = 15\,150 + 200\\
&\quad = 15\,350
\end{aligned}$$

3. (a) *Solution 1*
Puisque Bianca a nagé 600 m pendant qu'Alice a nagé 400 m, le rapport de leurs vitesses est de 600 : 400, ou 3 : 2.
Donc à n'importe quel instant, le rapport de la distance parcourue par Bianca à la distance parcourue par Alice est de 3 : 2.
Alice a nagé 4 longueurs de la piscine. On vérifie si les nageuses se croisent pendant chacune de ces longueurs.

1re longueur d'Alice

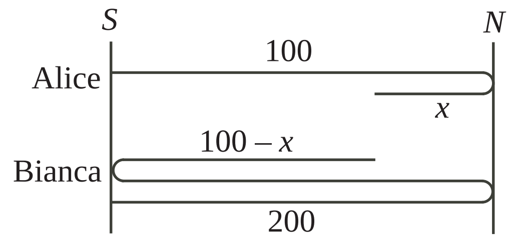
Supposons qu'Alice et Bianca se croisent pendant cette longueur.
Au moment du croisement, Alice a parcouru x m en direction N, x étant un nombre de 0 à 100.
Pendant ce temps, Bianca a parcouru $\frac{3}{2}$ de la distance parcourue par Alice. La distance parcourue par Bianca est donc entre $\frac{3}{2} \times 0$ m et $\frac{3}{2} \times 100$ m, c'est-à-dire entre 0 m et 150 m.



Si Alice et Bianca se croisent pendant cette longueur, Bianca doit donc se déplacer vers S. Elle a donc entamé sa deuxième longueur. Elle a donc parcouru 100 m (une longueur) plus $(100-x)$ m lorsqu'elle croise Alice.
Puisque le rapport des distances parcourues est de 3 : 2, on a $\dfrac{200-x}{x} = \dfrac{3}{2}$. Donc $400 - 2x = 3x$, ou $5x = 400$, ou $x = 80$.
Ce résultat est à l'intérieur de l'intervalle de 0 à 100. Donc, Alice et Bianca se croisent pendant la première longueur d'Alice.

2$^{\text{e}}$ longueur d'Alice

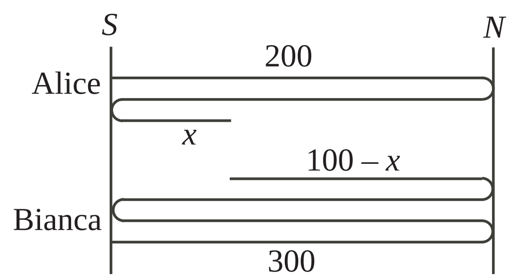
Si Alice et Bianca se croisent pendant cette longueur, Alice se déplace vers S et elle a parcouru entre 100 m et 200 m.
Soit $(100+x)$ m la distance qu'Alice a parcourue, x étant un nombre de 0 à 100. D'après le rapport des vitesses, on peut conclure que Bianca a parcouru entre 150 m et 300 m.



Puisqu'elles se croisent, Bianca nage vers N. Elle en est donc à sa troisième longueur. Elle a parcouru 200 m (deux longueurs) plus $(100-x)$ m pour un total de $[200+(100-x)]$ m, ou $(300-x)$ m. Puisque le rapport des distances parcourues est de 3 : 2, on a $\dfrac{300-x}{100+x}=\dfrac{3}{2}$.
Donc $600-2x=300+3x$, d'où $5x=300$, ou $x=60$.
Ce résultat est à l'intérieur de l'intervalle de 0 à 100. Alice a parcouru 160 m et Bianca a parcouru 240 m. Donc, Alice et Bianca se croisent pendant la deuxième longueur d'Alice.

3$^{\text{e}}$ longueur d'Alice

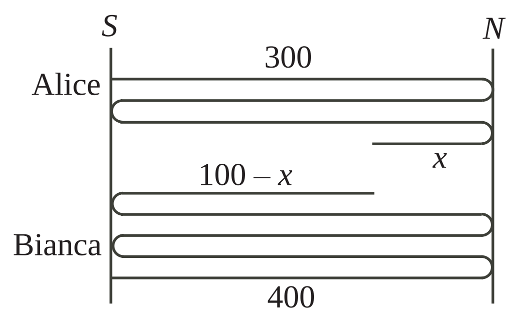
Si Alice et Bianca se croisent pendant cette longueur, Alice se déplace vers N et elle a parcouru entre 200 m et 300 m.
Soit $(200+x)$ m la distance qu'Alice a parcourue, x étant un nombre de 0 à 100. D'après le rapport des vitesses, on peut conclure que Bianca a parcouru entre 300 m et 450 m. Puisqu'elles se croisent, Bianca nage vers S. Elle en est donc à sa quatrième longueur. Elle a donc parcouru $(400-x)$ m en tout.



On a donc $\dfrac{400-x}{200+x}=\dfrac{3}{2}$. Donc $800-2x=600+3x$, d'où $5x=200$, ou $x=40$.
Ce résultat est à l'intérieur de l'intervalle de 0 à 100. Alice a parcouru 240 m et Bianca a parcouru 480 m. Donc, Alice et Bianca se croisent pendant la troisième longueur d'Alice.

4$^{\text{e}}$ longueur d'Alice

Si Alice et Bianca se croisent pendant cette longueur, Alice se déplace vers S et elle a parcouru entre 300 et 400 m.
Soit $(300+x)$ m la distance qu'Alice a parcourue, x étant un nombre de 0 à 100. D'après le rapport des vitesses, on peut conclure que Bianca a parcouru entre 450 m et 600 m. Puisqu'elles se croisent, Bianca nage vers N. Elle en est donc à sa cinquième longueur. Elle a donc parcouru $(500-x)$ m en tout.



On a donc $\dfrac{500-x}{300+x}=\dfrac{3}{2}$. Donc $1000-2x=900+3x$, d'où $5x=100$, ou $x=20$.
Ce résultat est à l'intérieur de l'intervalle de 0 à 100. Alice a parcouru 320 m et Bianca a parcouru 480 m. Donc, Alice et Bianca se croisent pendant la quatrième longueur d'Alice.

Donc, Alice et Bianca se sont croisées 4 fois avant de se croiser à S.

Solution 2

Puisque Bianca a nagé 600 m pendant qu'Alice a nagé 400 m, le rapport de leurs vitesses est de 600 : 400, ou 3 : 2.

Donc pendant qu'Alice parcourt d m, Bianca parcourt $\frac{3}{2}d$ m.

Lorsqu'elles se croisent à S, Alice a parcouru 400 m et Bianca a parcouru 600 m, pour un total de 1000 m.

D'après la propriété importante n° 1 ci-après, Alice et Bianca auraient pu se croiser après avoir parcouru un total de 200 m, de 400 m, de 600 m ou de 800 m.

Or, on ne sait pas si elles se sont croisées après ces distances. Il faut donc le vérifier.

– Si Alice a parcouru d m (et Bianca a parcouru $\frac{3}{2}d$ m) et qu'elles ont parcouru un total de 200 m, alors $d + \frac{3}{2}d = 200$, ou $\frac{5}{2}d = 200$, ou $d = 80$. Alice a donc parcouru 80 m et Bianca a parcouru $\frac{3}{2} \times 80$ m, ou 120 m. Au point de rencontre à 20 m de N, Alice nage vers N et Bianca nage vers S. Puisqu'elles se rencontrent dans la piscine tout en nageant dans des directions opposées, il s'agit donc d'un croisement.

– Dans le cas où $d + \frac{3}{2}d = 400$, on a $\frac{5}{2}d = 400$, ou $d = 160$. Dans ce cas, Alice a parcouru 160 m et Bianca a parcouru $\frac{3}{2} \times 160$ m, ou 240 m. Au point de rencontre à 40 m de S, Alice nage vers S et Bianca nage vers N. Il s'agit donc d'un croisement.

– Dans le cas où $d + \frac{3}{2}d = 600$, on a $\frac{5}{2}d = 600$, ou $d = 240$. Dans ce cas, Alice a parcouru 240 m et Bianca a parcouru $\frac{3}{2} \times 240$ m, ou 360 m. Au point de rencontre à 40 m de S, Alice nage vers N et Bianca nage vers S. Il s'agit donc d'un croisement.

– Dans le cas où $d + \frac{3}{2}d = 800$, on a $\frac{5}{2}d = 800$, ou $d = 320$. Dans ce cas, Alice a parcouru 320 m et Bianca a parcouru $\frac{3}{2} \times 320$ m, ou 480 m. Au point de rencontre à 20 m de N, Alice nage vers S et Bianca nage vers N. Il s'agit donc d'un croisement.

Donc, Alice et Bianca se sont croisées 4 fois avant de se croiser à S.

<u>Propriété importante n° 1</u>

Lorsque deux nageurs se croisent à un point, la distance totale parcourue par les deux nageurs doit être un multiple pair de 100 m (ce qui correspond à un multiple de 200 m).

En effet, soit K et L deux nageurs.

Si K et L se croisent à S, ils ont chacun nagé un nombre pair de longueurs de la piscine. Chacun a donc parcouru un multiple pair de 100 m. Donc, lorsqu'ils se croisent à S, la distance totale parcourue par les deux nageurs est un multiple pair de 100 m.

Si K et L se croisent à N, ils ont chacun nagé un nombre impair de longueurs de la piscine. Chacun a donc parcouru un multiple impair de 100 m. Donc, lorsqu'ils se croisent à N, la distance totale parcourue par les deux nageurs est encore un multiple pair de 100 m (car un multiple impair de 100 plus un multiple impair de 100 est un multiple pair de 100).

Qu'en est-il si K et L se rencontrent à un point P entre S et N ? Si P est situé à d m de S, alors :

– un des deux nage de S vers N. Il a donc parcouru un nombre pair de longueurs de la piscine (et donc un multiple pair de 100 m) plus les d m entre P et S et

– l'autre nage de N vers S. Il a donc parcouru un nombre impair de longueurs de la piscine (et donc un multiple impair de 100 m) plus les $(100 - d)$ m entre N et P.

Donc la distance totale parcourue par les deux nageurs est un multiple pair de 100 m plus un multiple impair de 100 m plus d m plus $(100 - d)$ m, ce qui correspond à un multiple pair de 100 m plus un multiple impair de 100 m plus 100 m. En tout, il s'agit d'un multiple pair de 100 m.

On a donc démontré que lorsque deux nageurs se croisent à un point, la distance totale parcourue par les deux nageurs doit être un multiple pair de 100 m (ce qui correspond à un multiple de 200 m).

(b) Charles et David se croisent la première fois lorsque Charles a nagé 90 m. Au point de croisement, Charles nage donc vers N et David nage vers S, ayant parcouru 10 m depuis N. Puisqu'il s'agit du premier croisement, David n'a nagé qu'une longueur de piscine plus 10 m additionnels, pour un total de 110 m. (Si David avait réussi plus le longueurs de piscine, il aurait fallu qu'il croise Charles plus tôt en nageant de N à S.)

Puisque David parcourt 110 m pendant que Charles parcourt 90 m, alors le rapport des vitesses est de 110 : 90, ou 11 : 9.

Donc pendant que Charles parcourt $9d$ m, David parcourt $11d$ m.

Charles et David arriveront à S ensemble lorsque les deux auront parcouru un multiple de 200 m.

Or, Charles et David arriveront ensemble à S lorsque Charles aura parcouru 1800 m et que David aura parcouru 2200 m, puisque $2200 : 1800 = 11 : 9$. Il s'agit de leur première rencontre à S, puisqu'il n'existe aucun multiple de 200 inférieur à 1800 qui donnera un autre multiple de 200 lorsqu'on le multiplie par $\frac{11}{9}$ (car il n'existe aucun multiple de 200 inférieur à 1800 qui est un multiple de 9).

À ce croisement, Charles a parcouru 1800 m et David a parcouru 2200 m, pour un total de 4000 m.

D'après la propriété importante n° 1, les croisements qui ont lieu avant la rencontre au point S doivent avoir lieu à des points tels que les nageurs ont parcouru une distance totale qui est un multiple de 200 m. Il y a 19 tels points. Ils correspondent à des distances de 200 m, 400 m, ..., 3600 m, 3800 m. (On remarque que $3800 = 19 \times 200$.)

D'après la propriété importante n° 2 ci-après, Charles et David se croisent bien à chacun de ces points.

Après le premier croisement, Charles et David se croiseront donc 18 autres fois avant d'arriver ensemble à S la première fois.

Propriété importante n° 2

Si la distance totale parcourue par deux nageurs est un multiple de 200 m, alors il y a point de croisement.

En effet, soit K et L deux nageurs.

Supposons que les deux nageurs arrivent à un point où la distance totale parcourue est un multiple de 200 m. On doit expliquer pourquoi il s'agit d'un point de croisement.

Supposons que K est à une extrémité de la piscine. Si K est à N, il a parcouru un multiple impair de 100 m. Puisque la distance totale parcourue est un multiple de 200 m (c'est-à-dire un multiple pair de 100 m), alors L doit aussi avoir parcouru un multiple impair de 100 m. L est donc aussi à N. Il y a donc croisement à ce point.

De même si K est à S, L doit aussi être à S et il y a croisement d'après la définition.

Supposons que la distance totale parcourue est un multiple de 200 m lorsque K n'est pas à une extrémité de la piscine. Donc, la distance parcourue par K n'est pas un multiple de 100 m. On peut représenter la distance que K a parcourue par $(100x + y)$ m, x étant un entier non négatif et y étant un nombre tel que $0 < y < 100$. (En d'autres mots, K a parcouru x longueurs de piscine plus y m.)

De même, la distance parcourue par L est représentée par $(100w + z)$ m, w étant un entier non négatif et z étant un nombre tel que $0 \leq z < 100$.

Puisque la somme de ces distances est un multiple de 200 m, alors $(100x+y)+(100w+z)=200p$, p étant un entier strictement positif.
On récrit l'équation sous la forme $y+z=200p-100x-100w$, ou $y+z=100(2p-x-w)$.
Le membre de droite de l'équation est donc un multiple de 100. Le membre de gauche doit donc l'être aussi. Puisque y et z sont tous les deux supérieurs à 0 et inférieurs à 100, alors $y+z$ est supérieur à 0 et inférieur à 200. Donc $y+z=100$.
On a donc $100=100(2p-x-w)$, d'où $1=2p-x-w$, ou $x+w+1=2p$.
Puisque le membre de droite est un entier pair, alors le membre de gauche l'est aussi. Donc $x+w$ est un entier impair.
Donc un des entiers x et w est pair et l'autre est impair. Donc, les deux nageurs nagent dans des directions différentes (l'un va vers N et l'autre, vers S).
Puisque $y+z=100$, alors les parties incomplètes de longueurs que chacun a nagées correspondent ensemble à une longueur de piscine. Puisque K et L nagent en directions opposées, ils sont au même endroit dans la piscine.
Puisque K et L nagent en directions opposées, il y a croisement.
Donc si la distance totale parcourue par deux nageurs est un multiple de 200 m, alors il y a point de croisement.

(c) *Solution 1*
D'après la propriété importante n° 1, si Éric et Farouk se croisent à un point, alors la distance totale qu'ils ont parcourue à ce point est un multiple de 200 m.
D'après la propriété importante n° 2, Éric et Farouk se croisent à chaque fois que la distance totale qu'ils ont parcourue est un multiple de 200 m.
Donc entre deux croisements consécutifs, la distance totale parcourue augmente de 200 m.
Puisque les vitesses sont constantes, le temps qu'ils mettent pour parcourir une distance totale de 200 m est toujours le même.
Donc, le temps qu'ils mettent entre deux croisements consécutifs est toujours le même.

Solution 2
Soit v_F m/s la vitesse de Farouk et v_E m/s celle d'Éric.
On considère deux croisements consécutifs.
Au premier croisement, on suppose qu'ils ont parcouru une distance totale de $200n$ m, n étant un entier strictement positif. (D'après la propriété importante n° 1, on sait que cette distance est un multiple de 200 m.)
Au croisement suivant, la distance totale parcourue sera égale à $(200n+200)$ m. (D'après la propriété importante n° 2, on sait que la distance totale parcourue est le multiple suivant de 200 m.)
Soit t s et T s les temps respectifs qu'ils ont nagés au premier et au deuxième croisements.
Or, le produit de la vitesse et du temps est égal à la distance. Donc au premier croisement, on a $v_Ft+v_Et=200n$, ou $t(v_F+v_E)=200n$.
Au deuxième croisement, on a $v_FT+v_ET=200n+200$, ou $T(v_F+v_E)=200n+200$. On soustrait la 1re équation de la 2e, membre par membre, pour obtenir $T(v_F+v_E)-t(v_F+v_E)=200$. On factorise le membre de gauche pour obtenir $(T-t)(v_F+v_E)=200$, d'où $T-t=\dfrac{200}{v_F+v_E}$.
Cela nous dit que l'intervalle de temps entre deux croisements consécutifs dépend seulement des deux vitesses, qui sont constantes.
Donc, le temps qu'ils mettent entre deux croisements consécutifs est toujours le même.