Le CENTRE d'ÉDUCATION
en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE
www.cemc.uwaterloo.ca

Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiare

le mardi 22 novembre 2011
(Amérique du Nord et Amérique du Sud)

le mercredi 23 novembre 2011
(hors de l'Amérique du Nord et de l'Amérique du Sud)

UNIVERSITY OF WATERLOO

WATERLOO MATHEMATICS

Durée : 2 heures

L'utilisation de la calculatrice est permise, pourvu que celle-ci ne soit ni programmable, ni munie d'affichage graphique.

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal.
Le questionnaire est divisé en deux parties.

PARTIE A

1. Cette partie est composée de six questions de 5 points chacune.
2. **Écrire la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse.** Le maximum des points est attribué pour une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. Une partie des points sera attribuée **pour du travail pertinent** inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse.

PARTIE B

1. Cette partie est composée de trois questions de 10 points chacune.
2. **Les solutions complètes doivent être écrites aux endroits appropriés du cahier-réponse.** Le brouillon doit être fait ailleurs. Si le cahier est rempli, le surveillant ou la surveillante distribuera des feuilles lignées. Insérer ces feuilles dans le cahier-réponse. Inscrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille insérée.
3. Des points sont attribués pour les solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

Remarque : À la fin du concours, insérer la feuille de renseignements à l'intérieur du cahier-réponse.

Une liste sera publiée, sur le site Web du CEMI au www.cemc.uwaterloo.ca, portant le nom des candidats qui ont obtenu le plus grand nombre de points.

Concours canadien de mathématiques de niveau intermédiare

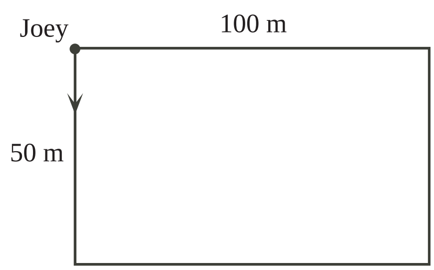
Remarques :	1.	Prière de lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
	2.	Inscrire toutes les solutions dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
	3.	Les réponses et les calculs doivent être exprimés à l'aide de nombres exacts, tels que 4π et $2+\sqrt{7}$, plutôt que 12,566 ... ou 4,646 ...
	4.	**L'utilisation de la calculatrice est permise**, pourvu que celle-ci ne soit ni programmable, ni munie d'affichage graphique.
	5.	Les figures ne sont pas dessinées à l'échelle. Elles servent d'aide seulement.

Renseignement utile
Il peut être utile de savoir que pour tout entier strictement positif n, la somme des n entiers de 1 à n est égale à $\frac{1}{2}n(n+1)$; c.-à-d. que $1+2+3+\cdots+(n-1)+n = \frac{1}{2}n(n+1)$.

PARTIE A

Pour chaque problème dans la partie A, le maximum des points est attribué pour une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. Une partie des points sera attribuée pour du travail pertinent inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse.

1. Joey est situé à un coin du champ rectangulaire illustré ci-contre. S'il marche autour du champ 5 fois, combien de mètres marchera-t-il ?

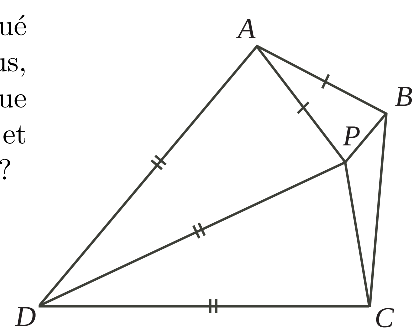


2. Sachant que $a+b=9-c$ et $a+b=5+c$, quelle est la valeur de c ?

3. Ophélie reçoit 51 \$ pour la première semaine de son emploi d'été à temps partiel. À chacune des semaines suivantes, elle reçoit 100 \$. Combien de semaines doit-elle travailler en tout pour que la moyenne de son salaire hebdomadaire soit de 93 \$?

4. Un dé est un cube dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On jette un dé rouge et un dé bleu. On calcule la somme des numéros sur les faces supérieures des deux dés. Quelle est la probabilité pour que cette somme soit un carré parfait ?

5. Dans la figure ci-contre, le point P est situé à l'intérieur du quadrilatère $ABCD$. De plus, $DA = DP = DC$ et $AP = AB$. Sachant que $\angle ADP = \angle CDP = 2x^\circ$, $\angle BAP = (x+5)^\circ$ et $\angle BPC = (10x-5)^\circ$, quelle est la valeur de x ?



6. Le produit de tous les diviseurs entiers positifs de 6^{16} est égal à 6^k, k étant un entier quelconque. Déterminer la valeur de k.

PARTIE B

Pour chaque question dans la partie B, la solution doit être bien organisée et doit aussi présenter certains mots d'explication ou de justification. Des points sont attribués pour les solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

1. Dans les figures A, B et D, les cercles ont pour centre O et ils ont un rayon de 2.
   (a) Déterminer l'aire de la région ombrée dans la figure A.
   (b) Déterminer l'aire de la région ombrée dans la figure B.
   (c) Dans la figure C, le triangle PQR est équilatéral et ses côtés ont une longueur de 2. Déterminer l'aire du triangle PQR.
   (d) Déterminer l'aire de la région ombrée dans la figure D.

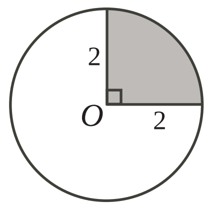


Figure A

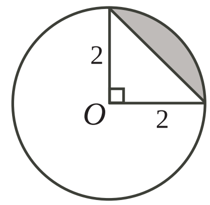


Figure B

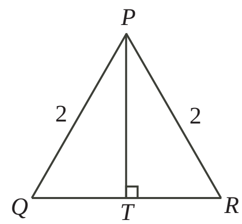


Figure C

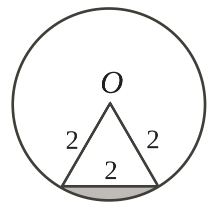


Figure D

2. Les figures suivantes forment une régularité. La figure 1 est un pentagone régulier avec des côtés de longueur 1. La figure 2 est composée d'un pentagone régulier, avec des côtés de longueur 2, qui est partiellement superposé sur le premier pentagone de manière que les deux pentagones partagent le même sommet T et que les côtés de part et d'autre de T chevauchent. De même, pour chaque valeur de n, $n > 1$, la figure n est composée d'un pentagone régulier, avec des côtés de longueur n, qui est partiellement superposé sur la figure précédente de manière que tous les pentagones partagent le même sommet T, et que les côtés de part et d'autre de T chevauchent. La *longueur des lignes* de chaque figure est la longueur totale des lignes qui paraissent dans la figure.

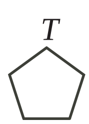


Figure 1
Longueur des lignes : 5

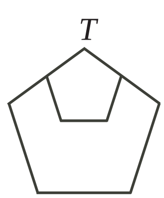


Figure 2
Longueur des lignes : 13

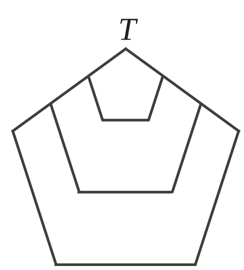


Figure 3
Longueur des lignes : 24

   (a) Determiner la longueur des lignes de la figure 4.
   (b) Déterminer la différence entre la longueur des lignes de la figure 9 et celle de la figure 8.
   (c) Determiner la longueur des lignes de la figure 100.

3. Six nageurs font des longueurs de piscine dans une piscine qui fait 100 m de long. Ils partent tous en même temps de l'extrémité sud (S) de la piscine, nagent jusqu'à l'extrémité nord (N), reviennent à S, puis à N, et ainsi de suite. Chacun nage à une vitesse constante et chacun fait ses virages, aux extrémités, de façon instantanée. On dit que deux nageurs *se croisent* lorsqu'ils se rencontrent l'un l'autre dans la piscine *tout en nageant dans des directions opposées*. On dit aussi qu'ils se croisent lorsqu'ils arrivent en même temps à N ou en même temps à S.

   (a) Supposons qu'Alice et Bianca se croisent à S lorsque Alice a nagé 400 m et que Bianca a nagé 600 m. Combien de fois se sont-elles croisées *avant* cela ?

   (b) Supposons que Charles et David se croisent la première fois lorsque Charles a nagé 90 m. Combien de fois se croiseront-ils de nouveau *avant* d'arriver ensemble à S la première fois ?

   (c) Supposons que Farouk nage plus vite qu'Éric. Démontrer que l'intervalle de temps entre deux occasions consécutives où Farouk et Éric se croisent est de longueur constante.