Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Hypatie 2010

le vendredi 9 avril 2010

Solutions

1. (a) Le coût en avion comprend des frais de réservation de 100 \$ plus 0,10 \$ le kilomètre.
Pour parcourir 3250 km en avion de A à B, le coût est de 100 \$ + 3250 × 0,10 \$, soit 100 \$ + 325 \$, ou 425 \$.

(b) Puisque le triangle ABC est rectangle, on peut utiliser le théorème de Pythagore.
Donc $BC^2 = AB^2 - CA^2$, d'où $BC^2 = 3250^2 - 3000^2$, ou $BC^2 = 1\,562\,500$.
Donc $BC = 1250$ km (puisque $BC > 0$).
Piravena voyage $3250 + 1250 + 3000$ ou 7500 km en total.

(c) Pour voyager en avion de B à C, le coût est de 100 \$ + 1250 × 0,10 \$, ou 225 \$.
Pour voyager en autocar de B à C, le coût est de 1250 × 0,15 \$, ou 187,50 \$.
Puisque Piravena a choisi le moyen de transport le moins dispendieux pour chaque étape, elle a pris l'autocar de B à C.
Pour voyager en avion de C à A, le coût est de 100 \$ + 3000 × 0,10 \$, ou 400 \$.
Pour voyager en autocar de C à A, le coût est de 3000 × 0,15 \$, ou 450 \$.
Puisque Piravena a choisi le moyen de transport le moins dispendieux pour chaque étape, elle a pris l'avion de C à A.
On peut vérifier : 425 \$ + 187,50 \$ + 400 \$ = 1012,50 \$, ce qui correspond au coût indiqué.

2. (a) On reporte $x = 6$ dans l'identité $f(x)-f(x-1) = 4x-9$ qui devient $f(6)-f(5) = 4\times 6-9$.
Puisque $f(5) = 18$, on a $f(6) - 18 = 24 - 9$, d'où $f(6) - 18 = 15$, ou $f(6) = 33$.

(b) On reporte $x = 5$ dans l'identité $f(x)-f(x-1) = 4x-9$ qui devient $f(5)-f(4) = 4\times 5-9$.
Puisque $f(5) = 18$, on a $18 - f(4) = 20 - 9$, d'où $18 - f(4) = 11$, ou $f(4) = 7$.
On reporte $x = 4$ dans l'identité $f(x)-f(x-1) = 4x-9$ qui devient $f(4)-f(3) = 4\times 4-9$.
Puisque $f(4) = 7$, on a $7 - f(3) = 16 - 9$, d'où $7 - f(3) = 7$, ou $f(3) = 0$.

(c) Puisque $f(5) = 18$, alors $2(5^2) + 5p + q = 18$, d'où $50 + 5p + q = 18$, ou $5p + q = -32$.
Puisque $f(3) = 0$, alors $2(3^2) + 3p + q = 0$, d'où $18 + 3p + q = 0$, ou $3p + q = -18$.
On résout le système de deux équations :

$$\begin{aligned} 5p + q &= -32 \\ 3p + q &= -18 \end{aligned}$$

On soustrait la deuxième équation de la première, membre par membre, pour obtenir $2p = -14$, ou $p = -7$. On reporte $p = -7$ dans la première équation pour obtenir $5(-7) + q = -32$, d'où $-35 + q = -32$, ou $q = 3$.
Donc $p = -7$ et $q = 3$ et $f(x) = 2x^2 + px + q$ devient $f(x) = 2x^2 - 7x + 3$.

3. (a) Puisque le triangle ABE est équilatéral, alors $\angle ABE = 60^\circ$.
Or $\angle PBC = \angle ABC - \angle ABE$, d'où $\angle PBC = 90^\circ - 60^\circ$, ou $\angle PBC = 30^\circ$.
Puisque $AB = BC$, le triangle ABC est un triangle rectangle isocèle et on a donc $\angle BAC = \angle BCA = 45^\circ$. Donc $\angle BCP = \angle BCA = 45^\circ$ et :

$$\angle BPC = 180^\circ - \angle PBC - \angle BCP = 180^\circ - 30^\circ - 45^\circ = 105^\circ$$

(b) *Solution 1*

Dans le triangle PBQ, $\angle PBQ = 30°$ et $\angle BQP = 90°$. Donc $\angle BPQ = 60°$.
PBQ est donc un triangle remarquable 30° - 60° - 90°, d'où $PQ : PB : BQ = 1 : 2 : \sqrt{3}$.
Puisque $\frac{PQ}{BQ} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, alors $\frac{x}{BQ} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, d'où $BQ = \sqrt{3}x$.

Solution 2

Dans le triangle PQC, $\angle QCP = 45°$ et $\angle PQC = 90°$. Donc $\angle CPQ = 45°$.
Le triangle PQC est donc isocèle, d'où $QC = PQ = x$.
Puisque $BC = 4$, alors $BQ = BC - QC$, d'où $BQ = 4 - x$.

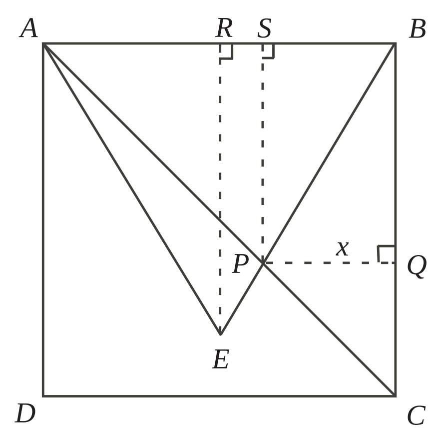
(c) *Solution 1*

Dans le triangle PQC, $\angle QCP = 45°$ et $\angle PQC = 90°$. Donc $\angle CPQ = 45°$.
Le triangle PQC est donc isocèle et $QC = PQ = x$.
Puisque $BC = 4$, alors $BC = BQ + QC$, d'où $BC = \sqrt{3}x + x = 4$. Donc $x(\sqrt{3} + 1) = 4$, ou $x = \frac{4}{\sqrt{3}+1}$.
On peut transformer pour rendre le dénominateur rationnel, ce qui donne $x = \frac{4}{\sqrt{3}+1} \times \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1}$, d'où $x = \frac{4(\sqrt{3}-1)}{3-1}$, ou $x = \frac{4(\sqrt{3}-1)}{2}$, ou $x = 2(\sqrt{3} - 1)$.

Solution 2

Dans le triangle PBQ, $\angle PBQ = 30°$ et $\angle BQP = 90°$. Donc $\angle BPQ = 60°$.
PBQ est donc un triangle remarquable 30° - 60° - 90°, d'où $PQ : PB : BQ = 1 : 2 : \sqrt{3}$.
Puisque $\frac{PQ}{BQ} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, alors $\frac{x}{4-x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, d'où $\sqrt{3}x = 4-x$, ou $\sqrt{3}x+x = 4$. Donc $x(\sqrt{3}+1) = 4$, ou $x = \frac{4}{\sqrt{3}+1}$.
On peut transformer pour rendre le dénominateur rationnel, comme dans la solution 1, ce qui donne $x = 2(\sqrt{3} - 1)$.

(d) *Solution 1*



La notation $|\triangle XYZ|$ représentera l'aire du triangle XYZ. On a donc $|\triangle APE| = |\triangle ABE| - |\triangle ABP|$.
Puisque le triangle ABE est équilatéral, $BE = EA = AB = 4$ et la hauteur au point E coupe AB en son milieu R. Donc $AR = RB = 2$.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle EBR, $ER^2 = BE^2 - RB^2$, d'où $ER^2 = 4^2 - 2^2$, ou $ER^2 = 12$.
Donc $ER = \sqrt{12}$, ou $ER = 2\sqrt{3}$, puisque $ER > 0$.
L'aire du triangle ABE est égale à $\frac{1}{2}(AB)(ER)$, ou $\frac{1}{2}(4)(2\sqrt{3})$, ou $4\sqrt{3}$.
Dans le triangle ABP, on abaisse la hauteur PS au sommet P.
PS et QB sont perpendiculaires à AB. PS est donc parallèle à QB.
De même, SB et PQ sont perpendiculaires à QB. SB est donc parallèle à PQ.
D'après les parties (b) et (c), $QB = 4 - x$, d'où $QB = 4 - 2(\sqrt{3} - 1)$, ou $QB = 6 - 2\sqrt{3}$.
Donc $|\triangle ABP| = \frac{1}{2}(AB)(PS)$, d'où $|\triangle ABP| = \frac{1}{2}(4)(6 - 2\sqrt{3})$, ou $|\triangle ABP| = 2(6 - 2\sqrt{3})$, ou $|\triangle ABP| = 12 - 4\sqrt{3}$.
Donc $|\triangle APE| = 4\sqrt{3} - (12 - 4\sqrt{3})$, ou $|\triangle APE| = 8\sqrt{3} - 12$.

Solution 2
La notation $|\triangle XYZ|$ représentera l'aire du triangle XYZ.
On a donc $|\triangle APE| = |\triangle ABE| - |\triangle ABP|$.
Or, $|\triangle ABP| = |\triangle ABC| - |\triangle BPC|$.
Donc $|\triangle APE| = |\triangle ABE| - (|\triangle ABC| - |\triangle BPC|)$,
ou $|\triangle APE| = |\triangle ABE| + |\triangle BPC| - |\triangle ABC|$.
Puisque le triangle ABE est équilatéral, $BE = EA = AB = 4$ et la hauteur au point E coupe AB en son milieu R.
ERB est donc un triangle remarquable 30°-60°-90°. Donc $ER : RB = \sqrt{3} : 1$, d'où $ER = (RB)\sqrt{3}$, ou $ER = 2\sqrt{3}$.
Donc $|\triangle ABE| = \frac{1}{2}(AB)(ER)$, d'où $|\triangle ABE| = \frac{1}{2}(4)(2\sqrt{3})$, ou $|\triangle ABE| = 4\sqrt{3}$.
Puisque PQ est une hauteur du triangle BPC, $|\triangle BPC| = \frac{1}{2}(BC)(PQ)$,
d'où $|\triangle BPC| = \frac{1}{2}(4)(2\sqrt{3} - 2)$, ou $|\triangle BPC| = 4\sqrt{3} - 4$.
Dans le triangle ABC, $\angle ABC = 90°$.
Donc $|\triangle ABC| = \frac{1}{2}(AB)(BC)$, d'où $|\triangle ABC| = \frac{1}{2}(4)(4)$, ou $|\triangle ABC| = 8$.
Donc $|\triangle APE| = |\triangle ABE| + |\triangle BPC| - |\triangle ABC|$, d'où $|\triangle APE| = (4\sqrt{3}) + (4\sqrt{3} - 4) - 8$, ou $|\triangle APE| = 8\sqrt{3} - 12$.

4. (a) On procède par factorisation :

$$x^4 - 6x^2 + 8 = 0$$
$$(x^2 - 4)(x^2 - 2) = 0$$

Donc $x^2 = 4$ ou $x^2 = 2$, d'où $x = \pm 2$ ou $x = \pm\sqrt{2}$.
Les valeurs réelles de x qui vérifient l'équation $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$ sont -2,2, $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$.

(b) On cherche le plus petit entier strictement positif N pour lequel :

$$\begin{aligned}
x^4 + 2010x^2 + N &= (x^2 + rx + s)(x^2 + tx + u) \\
x^4 + 2010x^2 + N &= x^4 + tx^3 + ux^2 + rx^3 + rtx^2 + rux + sx^2 + stx + su \\
x^4 + 2010x^2 + N &= x^4 + tx^3 + rx^3 + ux^2 + rtx^2 + sx^2 + rux + stx + su \\
x^4 + 2010x^2 + N &= x^4 + (t + r)x^3 + (u + rt + s)x^2 + (ru + st)x + su
\end{aligned}$$

Puisque l'égalité est vraie pour toutes les valeurs de x, les coefficients correspondants, dans chaque membre, sont égaux. Donc $t + r = 0$, $u + rt + s = 2010$, $ru + st = 0$ et $su = N$.
D'après la première de ces quatre équations, $t = -r$.
On reporte $t = -r$ dans la troisième équation pour obtenir $ru - rs = 0$, ou $r(u - s) = 0$.
Puisque $r \neq 0$, alors $u - s = 0$, ou $u = s$.
On reporte $u = s$ dans la quatrième équation qui devient $N = u^2$.
Donc, pour minimiser N, il faut minimiser u^2.
On reporte $t = -r$ et $s = u$ dans la deuxième équation qui devient $u + r(-r) + u = 2010$, ou $2u - r^2 = 2010$, d'où $u = \dfrac{2010 + r^2}{2}$.
Donc $u > 0$. Pour minimiser u^2, on minimise u ou, ce qui est équivalent, on minimise r.
Puisque u et r sont des entiers et que $r \neq 0$, alors u est minimisé lorsque $r = \pm 2$ (r doit être pair), c'est-à-dire lorsque $u = \dfrac{2014}{2}$, ou $u = 1007$.
Donc, le plus petit entier strictement positif N pour lequel l'expression $x^4 + 2010x^2 + N$ peut être factorisée sous la forme $(x^2 + rx + s)(x^2 + tx + u)$, r,s,t et u étant des entiers et $r \neq 0$, est $N = u^2$, d'où $N = 1007^2$, ou $N = 1\,014\,049$.

(c) On procède comme dans la partie (b), le coefficient 2010 étant remplacé par M. On apparie les coefficients des deux membres, deux à deux, pour obtenir quatre équations semblables, soit $t + r = 0$, $u + rt + s = M$, $ru + st = 0$ et $su = N$. Donc :

$$\begin{array}{rcl} N - M & = & su - (u + rt + s) \\ 37 & = & u^2 - (2u - r^2) \\ 37 & = & u^2 - 2u + r^2 \\ 37 + 1 & = & u^2 - 2u + 1 + r^2 \\ 38 & = & (u - 1)^2 + r^2 \end{array}$$

Donc $r = \pm\sqrt{38 - (u - 1)^2}$.
Dans le tableau suivant, on choisit des valeurs entières de u pour trouver des valeurs entières de r :

u	$(u-1)^2$	r
1	0	$\pm\sqrt{38}$
0 ou 2	1	$\pm\sqrt{37}$
-1 ou 3	4	$\pm\sqrt{34}$
-2 ou 4	9	$\pm\sqrt{29}$
-3 ou 5	16	$\pm\sqrt{22}$
-4 ou 6	25	$\pm\sqrt{13}$
-5 ou 7	36	$\pm\sqrt{2}$

On voit que dans chaque cas, la valeur de r n'est pas un entier.
Si on choisit n'importe quelle autre valeur entière de u, on a $(u - 1)^2 > 38$, ou $38 - (u - 1)^2 < 0$. Il n'y a donc aucune valeur réelle de r.
Ainsi si u admet une valeur entière, r ne peut admettre une valeur entière. Donc, u et r ne peuvent pas admettre à la fois des valeurs entières. Donc, l'expression $x^4 + Mx^2 + N$ ne peut pas être factorisée comme dans la partie (b), M et N étant des entiers pour lesquels $N - M = 37$.
Remarque : On aurait pu affirmer que $(u - 1)^2 + r^2$ représente la somme de deux carrés parfaits et puisque aucune paire de carrés parfaits parmi 0,1,4,9,16,25,36 n'admet une somme de 38, alors $(u - 1)^2 + r^2 \neq 38$, quelles que soient les valeurs entières de u et de r.