Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique

Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Les solutions de 8ième année suit les solutions de 7ième année

Concours Gauss 2010

(7e et 8e années – Secondaire I et II)

mercredi le 12 mai 2010

Solutions

Personnel du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique

Ed Anderson
Lloyd Auckland
Terry Bae
Janet Baker
Steve Brown
Ersal Cahit
Karen Cole
Jennifer Couture
Frank DeMaio
Fiona Dunbar
Jeff Dunnett
Mike Eden
Barry Ferguson
Judy Fox
Steve Furino
Sandy Graham
Angie Hildebrand
Judith Koeller
Joanne Kursikowski
Angie Murphy
Dean Murray
Jen Nissen
J.P. Pretti
Linda Schmidt
Kim Schnarr
Jim Schurter
Carolyn Sedore
Ian VanderBurgh
Troy Vasiga

Comité du concours Gauss

Mark Bredin (président), St. John's Ravenscourt School, Winnipeg, MB
Kevin Grady (président adjoint), Cobden District P.S., Cobden, ON
John Grant McLoughlin, University of New Brunswick, Fredericton, NB
JoAnne Halpern, Thornhill, ON
David Matthews, University of Waterloo, Waterloo, ON
Allison McGee, All Saints C.H.S., Kanata, ON
Kim Stenhouse, William G. Davis P.S., Cambridge, ON
David Switzer, Sixteenth Ave. P.S., Richmond Hill, ON
Tanya Thompson, Nottawa, ON
Chris Wu, Amesbury M.S., Toronto, ON

7^e année

1. La bande qui correspond à *poisson* monte jusqu'au nombre 40 sur l'axe vertical. Donc, 40 élèves ont répondu « poisson ».

RÉPONSE : (D)

2. On a $\frac{20}{25} = \frac{80}{100} = 80\,\%$ (ou $\frac{20}{25} = 0{,}80 = 80\,\%$).
Donc, la note de Tanya correspond à $80\,\%$.

RÉPONSE : (C)

3. On respecte la priorité des opérations. Donc $4 \times 5 + 5 \times 4$ est égal à $20 + 20$, ou 40.

RÉPONSE : (E)

4. Pour situer le point $(-2, -3)$, on part de l'origine, soit du point $(0, 0)$, et on bouge de 2 unités vers la gauche, puis de 3 unités vers le bas.
Les coordonnées $(-2, -3)$ correspondent au point D.

RÉPONSE : (D)

5. Charbel part du 11^e étage et descend de 2 étages. Il arrive au 9^e étage.
À partir du 9^e étage, il descend de 4 étages. Il arrive au 5^e étage et il sort.
Donc, Charbel est sorti de l'ascenseur au 5^e étage.

RÉPONSE : (D)

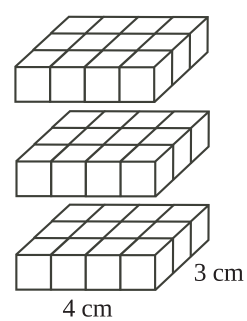
6. La réponse de la multiplication, soit 10 000,3, est 1000 fois plus grande que 10,0003. On peut le constater en divisant 10 000,3 par 10,0003 ou en voyant que les chiffres du nombre 10,0003 bougent de trois places, par rapport à la virgule, pour obtenir le nombre 10 000,3, qui est plus grand. Donc, le nombre $\square$ est égal à 1000.

RÉPONSE : (B)

7. Les quatre angles de la figure, soit les angles de $150°$, $90°$, $x°$ et $90°$, forment un angle plein, soit un angle de $360°$.
Or, la somme des mesures des trois angles connus est égale à $150° + 90° + 90°$, ou $330°$.
Donc $x° = 360° - 330°$, ou $x° = 30°$.

RÉPONSE : (D)

8. *Solution 1*
La base du prisme mesure 4 cm sur 3 cm. Pour construire la première couche de cubes, il faut donc placer 4 rangées de 3 cubes pour un total de 4×3 cubes, ou 12 cubes.
Puisque le prisme a une hauteur de 3 cm, il faut placer 3 couches de 12 cubes pour le construire, soit un total de 3×12 cubes, ou 36 cubes.



Solution 2
Le nombre de petits cubes correspond au volume du prisme.
Le volume d'un prisme est égal au produit de l'aire de la base et de la hauteur, ou $V = A_{\text{base}} \times h$.
Or, l'aire de la base est égale à 4×3 cm^2, ou 12 cm^2.
Le volume est donc égal à 3×12 cm^3, ou 36 cm^3. Il faut donc 36 cubes pour construire le prisme.

RÉPONSE : (E)

9. Le cadran indique 3:33. La prochaine fois que tous les chiffres seront identiques, le cadran indiquera 4:44. De 3:33 à 4:44, il y a 1 heure et 11 minutes, soit 60 minutes + 11 minutes, ou 71 minutes.

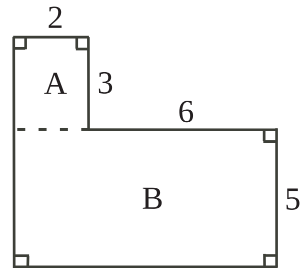
RÉPONSE : (A)

10. Puisque 700 est le produit de 35 et de y, alors $35 \times y = 700$, ou $y = 700 \div 35$, ou $y = 20$.
Puisque 20 est le produit de 5 et de x, alors $5 \times x = 20$, ou $x = 20 \div 5$, ou $x = 4$.

Réponse : (B)

11. *Solution 1*

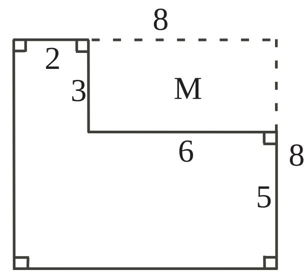
On trace un segment à tirets, d'une longueur de 2 unités, comme dans la figure ci-contre, de manière à diviser la figure en deux rectangles, A et B.



Le rectangle A a une aire de 2×3, ou 6 unités carrées. La longueur du rectangle B mesure 6 unités plus les 2 unités du segment à tirets. Le rectangle a donc une longueur de 8 unités. Le rectangle B a donc une aire de 8×5, ou 40 unités carrées. La figure a donc une aire de $6 + 40$, ou 46 unités carrées.

Solution 2

On trace les segments à tirets comme dans la figure ci-contre, soit un tiret de 6 unités et un tiret de 3 unités. Le grand rectangle ainsi formé a une longueur de 8 unités $(2 + 6)$ et une largeur de 8 unités $(3 + 5)$ (il s'agit donc d'un carré).



L'aire de la figure initiale est égale à celle du grand carré moins celle du rectangle M. Elle est donc égale à $(8 \times 8) - (6 \times 3)$, soit $64 - 18$, ou 46 unités carrées.

Réponse : (C)

12. Chaque école recycle $\frac{3}{4}$ d'une tonne de papier.
Ensemble, les 4 écoles recyclent $4 \times \frac{3}{4}$ tonnes, soit $\frac{12}{4}$ tonnes, ou 3 tonnes.
Puisqu'on épargne 24 arbres en recyclant 1 tonne de papier, on épargne 3×24 arbres, ou 72 arbres, en recyclant 3 tonnes.

Réponse : (B)

13. *Solution 1*

La moyenne de 5 entiers consécutifs est égale au nombre du milieu. En effet, puisque les nombres ont une moyenne de 21, si on partageait les quantités de façon équitable, on aurait 21, 21, 21, 21 et 21. Or, puisque les nombres sont consécutifs, le 2$^{\text{e}}$ nombre est 1 de moins que le 21 du milieu, tandis que le 4$^{\text{e}}$ nombre est 1 de plus que le 21 du milieu. De même, le 1$^{\text{er}}$ nombre est 2 de moins que le 21 du milieu, tandis que le 5$^{\text{e}}$ nombre est 2 de plus que le 21 du milieu. Les nombres sont donc $21 - 2$, $21 - 1$, 21, $21 + 1$, $21 + 2$, ou 19, 20, 21, 22 et 23. Le plus petit nombre est 19.

Solution 2

Puisque les cinq nombres consécutifs ont une moyenne de 21, le plus petit des nombres est inférieur à 21. On procède par tâtonnements.

Supposons que le 1$^{\text{er}}$ nombre est 20. Les nombres sont donc 20, 21, 22, 23 et 24 et leur moyenne est égale à $\dfrac{20 + 21 + 22 + 23 + 24}{5}$, ou 22. Les nombres sont donc trop grands.

Supposons que le 1$^{\text{er}}$ nombre est 19. Les nombres sont donc 19, 20, 21, 22 et 23 et leur moyenne est égale à $\dfrac{19 + 20 + 21 + 22 + 23}{5}$, ou 21, ce qui est la moyenne donnée.

Donc, le plus petit des cinq nombres est 19.

Réponse : (E)

14. *Solution 1*
Puisque le sac ne contient que des menthes vertes et des menthes rouges, et que 75 % des menthes sont vertes, alors 25 % des menthes sont rouges, car $100\,\% - 75\,\% = 25\,\%$.
Le rapport du nombre de menthes vertes au nombre de menthes rouges est donc égal à 75 : 25, ou 3 : 1.

Solution 2
Puisque 75 % des menthes sont vertes, alors $\frac{3}{4}$ des menthes sont vertes.
Puisque le sac ne contient que des menthes vertes et des menthes rouges, alors $\frac{1}{4}$ des menthes sont rouges, car $1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$. Il y a donc 3 fois plus de menthes vertes que de menthes rouges. Le rapport du nombre de menthes vertes au nombre de menthes rouges est donc égal à 3 : 1.
Réponse : (B)

15. Puisque l'aire du carré N est quatre fois l'aire du carré M, elle est égale à 4×100 cm^2, ou 400 cm^2. Puisque $\sqrt{400} = 20$ (ou $20 \times 20 = 400$), alors chaque côté du carré N a une longueur de 20 cm. Donc, le carré N a un périmètre de 4×20 cm, ou 80 cm.
Réponse : (C)

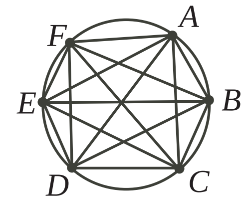
16. On détermine d'abord la *constante magique*, c'est-à-dire la somme des nombres qui est la même pour chaque rangée, chaque colonne et chaque diagonale. D'après la 1re colonne, la constante magique est égale à $(+1) + (-4) + (-3)$, ou -6.
On examine la diagonale qui va de la case supérieure gauche à la case inférieure droite. Les deux nombres de cette diagonale, soit $+1$ et -5, ont une somme de -4.
Pour obtenir une somme de -6 dans cette diagonale, il faut que le nombre du milieu soit -2.
Dans l'autre diagonale, les deux nombres connus, soit -3 et -2, ont une somme de -5.
Pour obtenir une somme de -6 dans cette diagonale, il faut que Y soit égal à -1.
Voici le carré magique rempli au complet :

+1	−6	−1
−4	−2	0
−3	+2	−5

Réponse : (A)

17. Le plus petit entier de trois chiffres qui est 17 de plus qu'un entier de deux chiffres est 100 (100 est 17 de plus que 83 ; de fait, 100 est le plus petit entier possible de trois chiffres).
Or, 101 est 17 de plus que 84, 102 est 17 de plus que 85, et ainsi de suite. Si on continue de cette manière, on arrive à 117 qui est 17 de plus que 100, mais 100 n'est pas un entier de deux chiffres.
Donc, le plus grand entier de trois chiffres qui est 17 de plus qu'un entier de deux chiffres est 116 (116 est 17 de plus que 99).
Donc, chaque entier de 100 à 116 est 17 de plus qu'un entier de deux chiffres. Il y en a 17.
Réponse : (A)

18. *Solution 1*



On nomme les 6 points A, B, C, D, E et F, comme dans la figure ci-contre. On joint chaque paire de points par un segment.
Du point A, on trace 5 segments, soit un segment qui se rend à chacun des points de B à F.
Du point B, on trace 4 nouveaux segments, soit un segment qui se rend à chacun des points de C à F, car le segment AB a déjà été tracé.

De même, on trace 3 nouveaux segments à partir du point C, 2 à partir du point D et 1 à partir du point E. On ne trace aucun nouveau segment à partir du point F, puisque ce point a déjà été relié aux autres points.
En tout, il y a $5 + 4 + 3 + 2 + 1$ segments, ou 15 segments.

Solution 2
On nomme les 6 points A, B, C, D, E et F, comme dans la figure précédente.
À partir de chacun des 6 points, on peut tracer 5 segments de droite, soit 1 segment vers chacun des 5 autres points. Il semble donc y avoir un total de 30 segments ($6 \times 5 = 30$).
Or selon cette méthode de compter, chaque segment est compté deux fois, soit une fois à chaque extrémité. Par exemple, le segment AD est compté une fois de A vers D et une fois de D vers A.
On doit donc diviser le nombre de segments par 2 : $30 \div 2 = 15$. Il y a donc un total de 15 segments.

Réponse : (D)

19. Plus le numérateur d'une fraction est grand et plus le dénominateur est petit, plus la fraction est grande. Pour obtenir la plus grande somme possible, il faut donc choisir 6 et 7 comme numérateurs et 3 et 4 comme dénominateurs. On a :

$$\frac{7}{3} + \frac{6}{4} = \frac{28}{12} + \frac{18}{12} = \frac{46}{12} = \frac{23}{6}$$

Normalement, on devrait aussi calculer $\frac{7}{4} + \frac{6}{3}$ (qui est égal à $3\frac{3}{4}$), pour choisir laquelle des deux sommes est la plus grande, mais on peut voir que $\frac{23}{6}$ est la plus grande valeur des 5 choix de réponses. L'autre somme doit donc être plus petite. La plus grande somme possible est donc égale à $\frac{23}{6}$.

Réponse : (E)

20. *Solution 1*
On détermine les quatre personnes qui *peuvent* être assises au milieu. La cinquième sera donc celle qui *ne peut pas* occuper cette chaise.
D'abord supposons que Safa et Mia, qui sont l'une à côté de l'autre, occupent les chaises 1 et 2. Alors Jean et Alex, qui ne sont pas l'un à côté de l'autre, occupent les chaises 3 et 5, dans n'importe quel ordre. Donc, Jean et Alex peuvent occuper la chaise du milieu.
Ensuite, supposons que Safa et Mia occupent les chaises 2 et 3, dans n'importe quel ordre.
Les chaises 1, 4 et 5 sont vides, ce qui permet à Jean et à Alex de ne pas être assis l'un à côté de l'autre. Ceci montre que Safa et Mia peuvent occuper la chaise du milieu.
Puisque Alex, Jean, Safa et Mia peuvent être assis au milieu, il faut donc que ce soit Tom qui ne peut pas être assis au milieu.

Solution 2
Supposons que Tom est assis au milieu, dans la chaise 3.
Puisque Safa est à côté de Mia, elles occupent les chaises 1 et 2 ou les chaises 4 et 5.
Dans un cas, les chaises 4 et 5 restent libres et dans l'autre, les chaises 1 et 2 restent libres.
Puisque Alex et Jean ne sont pas assis l'un à côté de l'autre, cette situation est impossible.
Donc, Tom n'est pas assis au milieu.
Or, selon la question, il y a une seule réponse. Il s'agit donc de Tom.

Réponse : (E)

21. En 3 heures, le vélo, qui avance à une vitesse constante de 15 km/h, parcourt un total de 3×15 km, ou 45 km.
Au départ de l'autobus, le vélo a une avance de 195 km.
Pour rattraper le vélo en 3 heures, l'autobus doit donc parcourir 195 km plus les 45 km additionnels parcourus par le vélo pendant ces 3 heures, soit un total de 240 km.
Pour parcourir 240 km en 3 heures, l'autobus doit voyager à une vitesse moyenne de $240 \div 3$ km/h, ou 80 km/h.

Réponse : (B)

22. Lorsqu'on lance une pièce de monnaie, il y a 2 résultats possibles, soit pile (P) ou face (F).
Lorsqu'on lance deux pièces de monnaie, il y a 4 (2×2) résultats possibles : PP, PF, FP et FF.
Lorsqu'on lance trois pièces de monnaie, il y a 8 ($2 \times 2 \times 2$) résultats possibles : PPP, PPF, PFP, PFF, FPP, FPF, FFP et FFF.
Or, 2 des 8 résultats sont favorables, soit PPP et FFF.
Donc, la probabilité de gagner au *jeu de monnaie* est égale à $\frac{2}{8}$, ou $\frac{1}{4}$.

Réponse : (B)

23. Puisque $\text{E} \times \text{R} \times \text{E} = 49$, alors $\text{E} = 7$ et $\text{R} = 1$ ou bien $\text{E} = 1$ et $\text{R} = 49$.
Or, le mot TROT a une valeur de 18 et R est donc un diviseur de 18. Donc $R \neq 49$.
Donc $\text{E} = 7$ et $\text{R} = 1$.
Puisque $\text{T} \times \text{R} \times \text{O} \times \text{T} = 18$ et que $\text{R} = 1$, on a $\text{T} \times \text{O} \times \text{T} = 18$.
Donc $\text{T} = 3$ et $\text{O} = 2$ ou bien $\text{T} = 1$ et $\text{O} = 18$.
Or, $\text{R} = 1$ et toutes les lettres ont une valeur différente. Donc, T ne peut être égal à 1.
Donc, $\text{T} = 3$ et $\text{O} = 2$.
Le mot TOME a une valeur de 168. Donc $\text{T} \times \text{O} \times \text{M} \times \text{E} = 168$, ou $3 \times 2 \times \text{M} \times 7 = 168$.
Donc $42 \times \text{M} = 168$, d'où $\text{M} = 168 \div 42$, ou $\text{M} = 4$.
Le mot ROSE a une valeur de 70. Donc $\text{R} \times \text{O} \times \text{S} \times \text{E} = 70$, ou $1 \times 2 \times \text{S} \times 7 = 70$.
Donc $14 \times \text{S} = 70$, d'où $\text{S} = 70 \div 14$, ou $\text{S} = 5$.
Donc, le mot METS a une valeur égale à $\text{M} \times \text{E} \times \text{T} \times \text{S}$, ou $4 \times 7 \times 3 \times 5$, ou 420.

Réponse : (C)

24. La somme de deux nombres pairs est paire. La somme de deux nombres impairs est paire. La somme d'un nombre pair et d'un nombre impair est impaire.
Donc, la somme $m + n$ est seulement paire si m et n sont tous deux pairs ou tous deux impairs.
Si $m = 2$, alors n doit être pair et supérieur à 2. Il peut donc être égal à 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18 ou 20. Il y a donc 9 couples (m, n) lorsque $m = 2$.
Si $m = 4$, alors n doit être pair et supérieur à 4. Il peut donc être égal à 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18 ou 20. Il y a donc 8 couples (m, n) lorsque $m = 4$.
On continue de cette manière. À chaque fois que m augmente de 2, le nombre de valeurs de n diminue de 1 et le nombre de couples (m, n) diminue de 1. La dernière valeur de m que l'on considère est $m = 18$ pour laquelle il n'y a qu'une valeur de n, soit $n = 20$.

Donc, le nombre de couples (m, n) où m et n sont pairs est égal à $9+8+7+6+5+4+3+2+1$, ou 45.
De même, si $m = 1$, alors n doit être impair et supérieur à 1. Il peut donc être égal à 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17 ou 19. Il y a donc 9 couples (m, n) lorsque $m = 1$.
Si $m = 3$, alors n doit être impair et supérieur à 3. Il peut donc être égal à 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17 ou 19. Il y a donc 8 couples (m, n) lorsque $m = 3$.
On continue de cette manière. À chaque fois que m augmente de 2, le nombre de valeurs de n diminue de 1 et le nombre de couples (m, n) diminue de 1. La dernière valeur de m que l'on considère est $m = 17$ pour laquelle il n'y a qu'une valeur de n, soit $n = 19$.
Donc, le nombre de couples (m, n) où m et n sont impairs est égal à $9+8+7+6+5+4+3+2+1$, ou 45.
Donc, le nombre total de couples (m, n) que l'on peut former en utilisant des nombres de la liste $\{1, 2, 3, \ldots, 20\}$, de manière que $m < n$ et que $m + n$ soit pair, est égal à $45 + 45$, ou 90.

Réponse : (B)

25. Si on utilise le tuyau A et le tuyau B en même temps, on remplit la piscine en 6 heures.
Donc le tuyau A, employé seul, met plus de 6 heures pour remplir la piscine.
Puisque a est un entier, on a donc $a \geq 7$.
De même le tuyau B, employé seul, met plus de 6 heures pour remplir la piscine.
Puisque b est un entier, on a donc $b \geq 7$.
Puisque le tuyau A, employé seul, remplit la piscine en a heures, la fraction de piscine qu'il remplit en 6 heures est égale à $\frac{6}{a}$.
Puisque le tuyau B, employé seul, remplit la piscine en b heures, la fraction de piscine qu'il remplit en 6 heures est égale à $\frac{6}{b}$.
Lorsqu'on utilise le tuyau A et le tuyau B en même temps, ils emplissent *une* piscine en 6 heures.
Donc $\frac{6}{a} + \frac{6}{b} = 1$.
Sachant que $a \geq 7$, que $b \geq 7$ et que a et b sont des entiers, on peut déterminer les valeurs de a et de b qui vérifient l'équation $\frac{6}{a} + \frac{6}{b} = 1$ par tâtonnements de façon systématique.
Par exemple, posons $a = 7$. L'équation devient $\frac{6}{7} + \frac{6}{b} = 1$, ou $\frac{6}{b} = 1 - \frac{6}{7}$, ou $\frac{6}{b} = \frac{1}{7}$. Or, on sait que $\frac{6}{42} = \frac{1}{7}$. Donc $b = 42$. On a donc trouvé une valeur possible de a, soit $a = 7$.
On continue de cette façon jusqu'à $a = 11$. Pour $a = 11$, l'équation devient $\frac{6}{11} + \frac{6}{b} = 1$, ou $\frac{6}{b} = 1 - \frac{6}{11}$, ou $\frac{6}{b} = \frac{5}{11}$, ou $\frac{30}{5b} = \frac{30}{66}$.
Puisqu'il n'y a aucune valeur entière de b pour laquelle $5b = 66$, l'équation n'admet aucune solution. Donc, $a = 11$ n'est pas une valeur possible.
Les autres valeurs possibles de a se trouvent dans le tableau suivant, de même que les valeurs correspondantes de b.

a	7	8	9	10	12	15	18	24	42
b	42	24	18	15	12	10	9	8	7

Une valeur de a supérieure à 42 fait en sorte que b soit inférieur à 7. Or, on sait que $b \geq 7$.
Il y a donc 9 valeurs possibles de a.
Remarque :
On peut réduire le temps consacré à la résolution de l'équation $\frac{6}{a} + \frac{6}{b} = 1$, si on reconnaît que si (a, b) est une solution, alors (b, a) est une solution ; si (a, b) n'est pas une solution, alors (b, a) n'est pas une solution.
Par exemple, lorsqu'on détermine que $a = 7$ et $b = 42$ vérifient l'équation, on peut conclure que $a = 42$ et $b = 7$ vérifient aussi l'équation (c.-à.d. que puisque $\frac{6}{7} + \frac{6}{42} = 1$, alors $\frac{6}{42} + \frac{6}{7} = 1$).
La symétrie des résultats dans le tableau est un reflet des valeurs interchangeables de a et de b.
Lorsqu'on reconnaît cette symétrie, on remplit le tableau par les deux bouts et on s'arrête à $a = 12$, $b = 12$.

Réponse : (C)

8e année

1. On respecte la priorité des opérations. Donc $2 + 3 \times 4 + 10$ est égal à $2 + 12 + 10$, ou 24.
   Réponse : (A)

2. L'athlète qui a gagné la course est celui qui a mis le moins de temps à la terminer.
   Donc, l'athlète C a gagné.
   Réponse : (C)

3. On reporte $x = 2$ et $y = 1$ dans l'expression $2x - 3y$ pour obtenir $2 \times 2 - 3 \times 1$.
   On respecte la priorité des opérations pour obtenir $4 - 3$, ou 1.
   Réponse : (B)

4. *Solution 1*
   Le membre gauche de l'équation est égal à 44×25, ou 1100.
   Or, on sait que $11 \times 100 = 1100$. L'équation devient donc $11 \times 100 = \square \times 100$.
   Par comparaison, on voit que le nombre $\square$ est égal à 11.

   Solution 2
   Le membre de gauche de l'équation, soit 44×25, peut être écrit sous la forme $11 \times 4 \times 25$, ou 11×100. L'équation devient donc $11 \times 100 = \square \times 100$.
   Par comparaison, on voit que le nombre $\square$ est égal à 11.
   Réponse : (A)

5. On calcule l'aire de 12 en multipliant la largeur et la longueur. Les seules possibilités, avec des entiers, sont donc 1×12, 2×6 et 3×4.
   Pour chacune, on calcule le périmètre en additionnant 2 fois la longueur et 2 fois la largeur.
   Le tableau suivant indique les résultats.

Largeur	Longueur	Périmètre
1	12	26
2	6	16
3	4	14

   Le plus petit périmètre possible est de 14 unités.
   Réponse : (D)

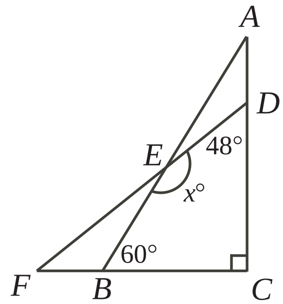
6. On remarque que la fraction $\frac{1}{4}$ paraît dans chaque expression. La grandeur relative de chaque somme dépend donc de la deuxième fraction seulement.
   Puisque $\frac{1}{3}$ est la plus grande des fractions $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{8}$ et $\frac{1}{7}$, on conclut que l'expression $\frac{1}{4} + \frac{1}{3}$ a la plus grande valeur.
   Réponse : (C)

7. Puisque 15 graines de tournesol pèsent environ 1 gramme, alors 300×15 graines, soit 4500 graines, pèsent environ 300 grammes. Il y a donc environ 4500 graines dans le sac.
   Réponse : (B)

8. Le cadran indique 10:25. La prochaine fois que tous les chiffres du cadran seront identiques, il sera 11:11. De 10:25 à 11:00, il y a 35 minutes. De 11:00 à 11:11, il y a 11 minutes. Donc, le plus petit nombre de minutes qui s'écouleront est égal à 46.
   Réponse : (D)

9. Charles reçoit $\frac{1}{3}$ des 84 biscuits. Ce nombre est égal à $84 \div 3$, ou 28.
   Il mange $\frac{3}{4}$ des 28 biscuits qu'il reçoit. Or, $\frac{1}{4}$ de 28 biscuits, c'est 7 biscuits. Charles mange donc 3×7 biscuits, ou 21 biscuits.
   Réponse : (E)

10. *Solution 1*
La somme des mesures d'angles d'un quadrilatère est égale à 360°.
Dans le quadrilatère $BCDE$ ci-dessous, on a donc $x + 48 + 90 + 60 = 180$, ou $x + 198 = 360$, d'où $x = 162$.



Solution 2
Dans le triangle ABC ci-dessus, $\angle BAC = 180° - 60° - 90°$, ou $\angle BAC = 30°$.
Puisque l'angle ADC est plat, $\angle ADE = 180° - 48°$, ou $\angle ADE = 132°$.
Dans le triangle AED, $\angle AED = 180° - 132° - 30°$, ou $\angle AED = 18°$.
Puisque l'angle AEB est plat, $x° = 180° - 18°$, ou $x° = 162°$.
Donc, x vaut 162.

Réponse : (E)

11. *Solution 1*
La moyenne de 5 entiers consécutifs est égale au nombre du milieu. En effet, puisque les nombres ont une moyenne de 21, si on partageait les quantités de façon équitable, on aurait 21, 21, 21, 21 et 21. Or, puisque les nombres sont consécutifs, le 2e nombre est 1 de moins que le 21 du milieu, tandis que le 4e nombre est 1 de plus que le 21 du milieu. De même, le 1er nombre est 2 de moins que le 21 du milieu, tandis que le 5e nombre est 2 de plus que le 21 du milieu. Les nombres sont donc $21 - 2$, $21 - 1$, 21, $21 + 1$, $21 + 2$, ou 19, 20, 21, 22 et 23. Le plus petit nombre est 19.

Solution 2
Puisque les cinq nombres consécutifs ont une moyenne de 21, le plus petit des nombres est inférieur à 21. On procède par tâtonnements.
Supposons que le 1er nombre est 20. Les nombres sont donc 20, 21, 22, 23 et 24 et leur moyenne est égale à $\dfrac{20 + 21 + 22 + 23 + 24}{5}$, ou 22. Les nombres sont donc trop grands.
Supposons que le 1er nombre est 19. Les nombres sont donc 19, 20, 21, 22 et 23 et leur moyenne est égale à $\dfrac{19 + 20 + 21 + 22 + 23}{5}$, ou 21, ce qui est la moyenne donnée.
Donc, le plus petit des cinq nombres est 19.

Réponse : (E)

12. Pour chaque 3 boules blanches dans le sac, il y a 2 boules rouges.
Puisque le sac contient 9 boules blanches, c'est-à-dire 3 groupes de 3 boules blanches, il contient 3 groupes de 2 boules rouges.
Il y a donc 6 boules rouges dans le sac.

Réponse : (D)

13. On évalue : $\left(\frac{11}{12}\right)^2 = \left(\frac{11}{12}\right) \times \left(\frac{11}{12}\right) = \frac{11 \times 11}{12 \times 12} = \frac{121}{144}$
Cette fraction est entre $\frac{1}{2}$ et 1, car $\frac{121}{144} > \frac{72}{144}$ et $\frac{121}{144} < \frac{144}{144}$.

Réponse : (B)

14. Pendant les 5 parties, le total des tirs qu'elle a reçus est égal à $10 + 13 + 7 + 11 + 24$, ou 65.
Pendant les 5 parties, le total des arrêts qu'elle a effectués est égal à $7 + 9 + 6 + 9 + 21$, ou 52.
Or $\frac{52}{65} = \frac{4}{5} = \frac{80}{100} = 80\,\%$ (ou $\frac{52}{65} = 0{,}80 = 80\,\%$).
Gina a donc arrêté $80\,\%$ des tirs qu'elle a reçus.

Réponse : (C)

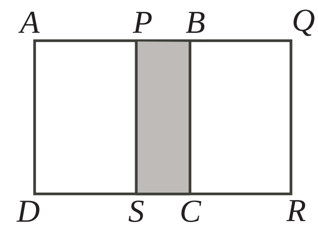
15. Pour déterminer la plus petite somme possible, on choisit les plus petits nombres comme chiffres des dizaines, soit 5 et 6.
Ensuite, on choisit les plus petits nombres qui restent comme chiffres des unités, soit 7 et 8.
Il y a donc deux sommes possibles qu'il faut évaluer :

$$\begin{array}{rr} & 57 \\ + & 68 \\ \hline & 125 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & 58 \\ + & 67 \\ \hline & 125 \end{array}$$

(Pourquoi faut-il que ces deux sommes soient égales ?)
La plus petite somme possible est de 125.

Réponse : (B)

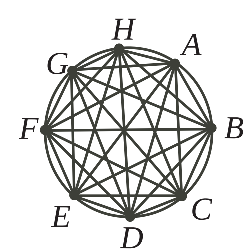
16. *Solution 1*
Puisque $AQ = 20$ et $AB = 12$, alors $BQ = AQ - AB$, d'où $BQ = 20 - 12$, ou $BQ = 8$.
Donc $PB = PQ - BQ$. d'où $PB = 12 - 8$, ou $PB = 4$.
Puisque $PS = 12$, l'aire du rectangle $PBCS$ est égale à 12×4, ou 48.



Solution 2
La somme de l'aire des carrés $ABCD$ et $PQRS$ est égale à $2 \times (12 \times 12)$, ou 2×144, ou 288.
L'aire du rectangle $AQRD$ est égale à 12×20, ou 240.
La différence entre ces aires est égale à $288 - 240$, ou 48. Donc, la partie cachée par les carrés partiellement superposés a une aire de 48. Supposons que le carré $ABCD$ est partiellement par dessus le carré $PQRS$. Une partie de ce dernier carré est donc cachée et son aire doit donc être égale à 48.
Or, elle forme un rectangle identique au rectangle $PBCS$, car celui-ci est formé par les parties qui chevauchent. Donc, le rectangle $PBCS$ a une aire de 48.

Réponse : (C)

17. *Solution 1*
On nomme les 8 points A, B, C, D, E, F, G et H, comme dans la figure ci-contre. On joint chaque paire de points par un segment.
Du point A, on trace 7 segments, soit un segment qui se rend à chacun des points de B à H.
Du point B, on trace 6 nouveaux segments, soit un segment qui se rend à chacun des points C à H, car le segment AB a déjà été tracé.
De même, on trace 5 nouveaux segments à partir du point C, 4 à partir du point D, 3 à partir du point E, 2 à partir du point F et 1 à partir du point G. On ne trace aucun nouveau segment à partir du point H, puisque ce point a déjà été relié aux autres points.
En tout, il y a $7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$ segments, ou 28 segments.



Solution 2
On nomme les 8 points A, B, C, D, E, F, G et H, comme dans la figure précédente.
À partir de chacun des 8 points, on peut tracer 7 segments de droite, soit 1 segment vers chacun des 7 autres points. Il semble donc y avoir un total de 56 segments ($8 \times 7 = 56$).
Or, selon cette méthode de compter, chaque segment est compté deux fois, soit une fois à chaque extrémité. Par exemple, le segment AD est compté une fois de A vers D et une fois de D vers A.
On doit donc diviser le nombre de segments par 2 : $56 \div 2 = 28$. Il y a donc un total de 28 segments.

Réponse : (E)

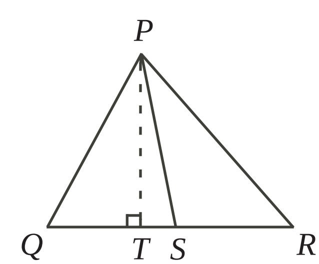
18. En 3 heures, le vélo, qui avance à une vitesse constante de 15 km/h, parcourt un total de 3×15 km, ou 45 km.
Au départ de l'autobus, le vélo a une avance de 195 km.
Pour rattraper le vélo en 3 heures, l'autobus doit donc parcourir 195 km plus les 45 km additionnels parcourus par le vélo pendant ces 3 heures, soit un total de 240 km.
Pour parcourir 240 km en 3 heures, l'autobus doit voyager à une vitesse moyenne de $240 \div 3$ km/h, ou 80 km/h.

Réponse : (B)

19. La figure 1 est formée de 1 carreau.
La figure 2 est formée de 1 carreau au milieu et de 4 autres carreaux, soit $1 + 4$ carreaux.
La figure 3 est formée de 1 carreau au milieu et de 4 groupes de 2 carreaux, soit $1+4\times 2$ carreaux.
La figure 4 est formée de 1 carreau au milieu et de 4 groupes de 3 carreaux, soit $1+4\times 3$ carreaux.
La figure 5 est formée de 1 carreau au milieu et de 4 groupes de 4 carreaux, soit $1+4\times 4$ carreaux.
Dans chaque cas, la figure est formée de 1 carreau au milieu et de 4 groupes de carreaux, le nombre de carreaux de chaque groupe étant égal à 1 de moins que le numéro de la figure.
Par exemple, la figure 10 sera formée de 1 carreau au milieu et de 4 groupes de 9 carreaux, soit $1 + 4 \times 9$ carreaux.
De façon générale, la figure N est formée de 1 carreau au milieu et de 4 groupes de $N - 1$ carreaux.
Donc, la figure 2010 sera formée de 1 carreau au milieu et de 4 groupes de 2009 carreaux, pour un total de $4 \times 2009 + 1$ carreaux, soit $8036 + 1$ carreaux, ou 8037 carreaux.

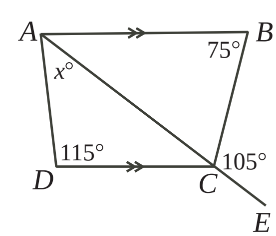
Réponse : (A)

20. On place un point T sur le côté QR de manière que PT soit perpendiculaire à QR.
Le segment PT est la hauteur de triangle PQS par rapport à la base QS. Il est aussi la hauteur du triangle PRS par rapport à la base SR.
Puisque les triangles PQS et PRS ont la même hauteur et la même aire, leurs bases correspondantes doivent être de même longueur.
Donc $QS = SR$.



Réponse : (D)

21. Puisque l'angle ACE est plat, $\angle ACB = 180° - 105°$, ou $\angle ACB = 75°$.
Dans le triangle ABC, $\angle BAC = 180° - 75° - 75°$, ou $\angle BAC = 30°$.
Puisque AB est parallèle à DC, $\angle ACD = \angle BAC = 30°$ (angles alternes-internes).
Dans le triangle ADC, $x° = 180° - 115° - 30°$, ou $x° = 35°$.
Donc, x a une valeur de 35.

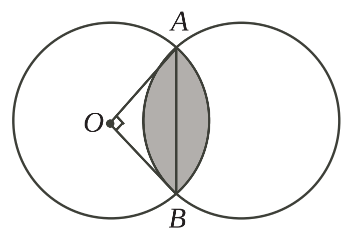


Réponse : (A)

22. On remarque r est la seule variable qui paraît dans chacun des trois produits $r \times s$, $u \times r$ et $t \times r$. Pour que l'expression $r \times s + u \times r + t \times r$ ait la plus grande valeur possible, on attribue donc à r la plus grande valeur disponible, soit 5.
Puisque chacune des variables s, u et t est multipliée par r exactement une fois et que les trois produits sont ensuite additionnés, il n'importe pas quelle valeur on attribue à chacune parmi 2, 3 et 4. On choisit donc $s = 2$, $u = 3$ et $t = 4$.
La plus grande valeur possible de l'expression $r \times s + u \times r + t \times r$ est égale à $5 \times 2 + 3 \times 5 + 4 \times 5$, ou $10 + 15 + 20$, ou 45.
Réponse : (B)

23. Puisque Karim a besoin de 12 heures pour pelleter toute la neige dans sa cour, il peut pelleter $\frac{1}{12}$ de toute cette neige à chaque heure.
Puisque Dany a besoin de 8 heures pour pelleter toute la neige dans la cour, il peut pelleter $\frac{1}{8}$ de toute la neige à chaque heure.
De même, Jean peut pelleter $\frac{1}{6}$ de toute la neige à chaque heure et Alexa peut pelleter $\frac{1}{4}$ de toute la neige à chaque heure.
Ensemble, ils peuvent pelleter $\frac{1}{12} + \frac{1}{8} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4}$, ou $\frac{2}{24} + \frac{3}{24} + \frac{4}{24} + \frac{6}{24}$, ou $\frac{15}{24}$ de la neige à chaque heure.
Ensemble, ils peuvent donc pelleter $\frac{15}{24} \div 60$, ou $\frac{15}{24} \times \frac{1}{60}$, ou $\frac{15}{1440}$, ou $\frac{1}{96}$ de la neige à chaque minute.
Ensemble, ils mettront donc 96 minutes pour pelleter toute la neige dans la cour de Karim.
Réponse : (D)

24. Soit A et B les points d'intersection des cercles et O le centre du cercle gauche.
On trace le segment AB qui, par symétrie, coupe la région ombrée en moitiés.
On trace les rayons OA et OB. On a $OA = OB = 10$ cm.
Puisque chaque cercle contient 25 %, ou $\frac{1}{4}$ de l'arc de l'autre cercle, $\angle AOB = \frac{1}{4} \times 360°$, ou $\angle AOB = 90°$.
Donc, l'aire du secteur AOB est $\frac{1}{4}$ de l'aire du cercle, soit $\frac{1}{4}\pi r^2$ cm^2, ou $\frac{1}{4}\pi 10^2$ cm^2, ou 25π cm^2.
L'aire du triangle AOB est égale à $\dfrac{OA \times OB}{2}$, ou $\dfrac{10 \times 10}{2}$ cm^2, ou 50 cm^2.
Si on soustrait l'aire du triangle AOB de l'aire du secteur AOB, on obtient la moitié de l'aire de la région ombrée.
Donc, l'aire de la région ombrée est égale à $2 \times (25\pi - 50)$ cm^2, ou environ $2 \times (28{,}5398)$ cm^2, ou $57{,}0796$ cm^2.
L'aire de la région ombrée est plus près de 57,08 cm^2.



Réponse : (A)

25. Les deux premiers termes de la suite sont 1 et x.
Puisque chacun des termes suivants est la somme des deux termes précédents, le 3^e terme est $1 + x$.
Le 4^e terme est donc $x + (1 + x)$, ou $1 + 2x$.
On continue de cette manière pour obtenir les 10 termes de la suite :

$$1, x, 1 + x, 1 + 2x, 2 + 3x, 3 + 5x, 5 + 8x, 8 + 13x, 13 + 21x, 21 + 34x.$$

Après le 1er terme, chacun des autres termes dépend de x. Chacun de ces termes pourrait donc égaler 463.

Le 2^e terme est égal à 463 si $x = 463$.
Le 3^e terme est égal à 463 si $1 + x = 463$, ou $x = 462$.
Le 4^e terme est égal à 463 si $1 + 2x = 463$, ou $2x = 462$, ou $x = 231$.
Le 5^e terme est égal à 463 si $2 + 3x = 463$, ou $3x = 461$, ou $x = \frac{461}{3}$.
Or, $\frac{461}{3}$ n'est pas un entier et le 5^e terme ne peut donc pas être égal à 463.
On continue de cette manière. Les résultats sont résumés dans le tableau suivant.

Terme	Expression	Équation	Valeur de x	x est-il un entier ?
2^e	x	$x = 463$	$x = 463$	Oui
3^e	$1 + x$	$1 + x = 463$	$x = 462$	Oui
4^e	$1 + 2x$	$1 + 2x = 463$	$x = 231$	Oui
5^e	$2 + 3x$	$2 + 3x = 463$	$x = \frac{461}{3}$	Non
6^e	$3 + 5x$	$3 + 5x = 463$	$x = 92$	Oui
7^e	$5 + 8x$	$5 + 8x = 463$	$x = \frac{458}{8}$	Non
8^e	$8 + 13x$	$8 + 13x = 463$	$x = 35$	Oui
9^e	$13 + 21x$	$13 + 21x = 463$	$x = \frac{450}{21}$	Non
10^e	$21 + 34x$	$21 + 34x = 463$	$x = 13$	Oui

Donc la somme de toutes les valeurs de x pour lesquelles le nombre 463 paraît dans la suite est égale à $463 + 462 + 231 + 92 + 35 + 13$, ou 1296.

Réponse : (B)