Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Galois 2010

le vendredi 9 avril 2010

Solutions

©2010 Le Centre d'éducation en mathématiques et en informatique

1. (a) La nouvelle pomme de douche laisse passer 13 L d'eau à la minute.
Pour utiliser 260 L d'eau à ce taux, Émilie prendrait $\frac{260}{13}$ minutes, ou 20 minutes.

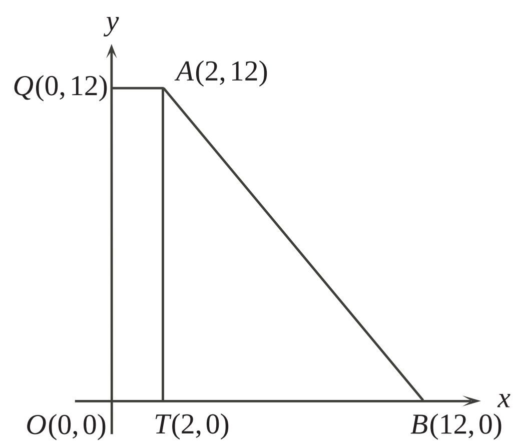
(b) En utilisant la nouvelle pomme de douche, Émilie utilise 5 L (c.-à-d. 18 L $-$ 13 L) d'eau par minute de moins que lorsqu'elle utilisait la vieille pomme de douche.
Si elle prend une douche de 10 minutes, Émilie utilise donc 50 L (c.-à-d. 10×5 L) moins d'eau.

(c) D'après la partie (b), Émilie épargne 5 L d'eau par minute en utilisant la nouvelle pomme de douche.
Si elle prend une douche de 15 minutes, Émilie épargne 75 L (c.-à-d. 15×5 L) d'eau.
Puisque l'eau coûte 8 cents par 100 L, Émilie épargnera 6 cents (c.-à-d. $\frac{8}{100} \times 75$ cents) en utilisant la nouvelle pomme de douche.

(d) *Solution 1*
L'eau coûte 8 cents par 100 L et Émilie épargne 5 L d'eau par minute.
Avec la nouvelle pomme de douche, elle épargne donc $\frac{8}{100} \times 5$ cents par minute, soit $\frac{8}{20}$ cents par minute, ou $\frac{2}{5}$ cents par minute.
Pour épargner 30 \$, Émilie devra passer $3000 \div \frac{2}{5}$ minutes, soit $3000 \times \frac{5}{2}$ minutes, ou 7500 minutes sous la douche.

Solution 2
D'après la partie (c), Émilie épargne 6 cents lorsqu'elle prend une douche de 15 minutes.
Puisque $3000 \div 6 = 500$, elle aura besoin de 15×500 minutes, ou 7500 minutes, sous la douche pour épargner 30 \$.

2. (a) *Solution 1*
Soit T le point $(2, 0)$. T est situé sur OB de manière que AT soit vertical.
Puisque QO et AT sont verticaux et que QA et OT sont horizontaux, $QATO$ est un rectangle.
L'aire du rectangle $QATO$ est égale à $QA \times QO$, soit 2×12, ou 24.
Puisque AT est perpendulaire à TB, alors dans le triangle ATB, AT est la hauteur qui correspond à la base TB.
L'aire du triangle ATB est égale à $\frac{1}{2} \times TB \times AT$, c'est-à-dire à $\frac{1}{2} \times (12 - 2) \times 12$, ou 60.
L'aire du quadrilatère $QABO$ est égale à la somme de l'aire du rectangle $QATO$ et de l'aire du triangle ATB, c'est-à-dire à $24 + 60$, ou 84.



Solution 2
Puisque QA et OB sont horizontaux, QA est parallèle à OB.
Donc, $QABO$ est un trapèze.
Puisque QO est perpendiculaire à OB, QO est la hauteur du trapèze.
Donc, l'aire de $QABO$ est égale à $\frac{1}{2} \times QO \times (QA + OB)$, ou $\frac{1}{2} \times 12 \times (2 + 12)$, ou 84.

(b) Puisque CO est perpendiculaire à OB, alors dans le triangle COB, CO est la hauteur qui correspond à la base OB. L'aire du triangle COB est égale à $\frac{1}{2} \times OB \times CO$, soit $\frac{1}{2} \times 12 \times p$, ou $6p$.

(c) Puisque QA est perpendiculaire à QC, alors dans le triangle QCA, QC est la hauteur qui correspond à la base QA. L'aire du triangle QCA est égale à $\frac{1}{2} \times QA \times QC$, soit $\frac{1}{2} \times 2 \times (12 - p)$, ou $12 - p$.

(d) On obtient l'aire du triangle ABC en soustrayant l'aire des triangles COB et QCA de l'aire du quadrilatère $QABO$.
D'après les parties (a), (b) et (c), l'aire du triangle ABC est donc égale à $84-6p-(12-p)$, ou $72 - 5p$.
Puisque l'aire du triangle ABC est égale à 27, alors $72 - 5p = 27$, d'où $5p = 45$, ou $p = 9$.

3. (a) Pour résoudre le système d'équations, on utilise la méthode par élimination.
On additionne les équations, membre par membre, pour obtenir $2x = 52$, ou $x = 26$.
On reporte $x = 26$ dans la première équation pour obtenir $26 + y = 42$, ou $y = 16$.
On a donc pour solution $(x,y) = (26,16)$.

(b) *Solution 1*
On utilise la méthode par élimination, comme dans la partie (a).
On additionne les équations, membre par membre, pour obtenir $2x = p + q$, ou $x = \frac{p+q}{2}$.
Or, p est un entier pair et q est un entier impair.
La somme d'un entier pair et d'un entier impair est toujours un entier impair.
Donc, $\frac{p+q}{2}$ représente un entier impair divisé par 2, ce qui n'est pas un entier.
Donc, le système d'équations n'admet aucune solution (x,y) pour laquelle x et y sont des entiers.

Solution 2
On utilise la méthode par élimination, comme dans la partie (a).
On additionne les équations, membre par membre, pour obtenir $2x = p + q$. Puisque la somme d'un entier pair et d'un entier impair est toujours un entier impair, le membre de droite de l'équation $2x = p + q$ est un nombre impair. Or, le membre de gauche de l'équation est un entier pair pour tout entier x. Donc, le système d'équations n'admet aucune solution (x,y) pour laquelle x et y sont des entiers.

(c) Le membre de gauche de l'équation, soit $x^2 - y^2$, est une différence de carrés.
On factorise l'expression $x^2 - y^2$ et l'équation $x^2 - y^2 = 420$ devient $(x + y)(x - y) = 420$.
Puisque x et y sont des entiers positifs, alors $x + y$ est un entier positif.
Puisque $(x + y)(x - y) = 420$ et que $x + y$ est un entier positif, alors $x - y$ est un entier positif.
Puisque x et y sont des entiers positifs, alors $x + y > x - y$.
On cherche donc deux entiers positifs qui ont un produit de 420.
On écrit toutes les possibilités pour lesquelles $x + y > x - y$:

$x+y$	$x-y$	$(x+y)(x-y)$
420	1	420
210	2	420
140	3	420
105	4	420
84	5	420
70	6	420
60	7	420
42	10	420
35	12	420
30	14	420
28	15	420
21	20	420

Chacune de ces possibilités génère un système d'équations.
Par exemple, pour 420 et 1, on a $(x+y)(x-y) = 420 \times 1$, d'où :

$$\begin{aligned} x+y &= 420 \\ x-y &= 1 \end{aligned}$$

D'après la partie (b), on sait que le système n'admet aucune solution (x,y) pour laquelle x et y sont des entiers strictement positifs si un des facteurs est pair alors que l'autre est impair. On peut donc éliminer du tableau les cas où un facteur est pair et l'autre est impair. Il reste les possibilités suivantes :

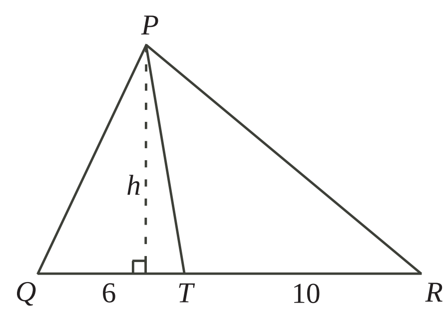
$x+y$	$x-y$	$(x+y)(x-y)$
210	2	420
70	6	420
42	10	420
30	14	420

D'après la partie (b), on sait aussi que pour déterminer la valeur de x, on additionne les deux équations, membre par membre, et qu'on divise ensuite chaque membre par 2. On reporte ensuite la valeur de x dans une ou l'autre équation pour déterminer la valeur de y. On complète les solutions à l'aide du tableau suivant :

$x+y$	$x-y$	$(x+y)(x-y)$	$2x$	x	y
210	2	420	212	106	104
70	6	420	76	38	32
42	10	420	52	26	16
30	14	420	44	22	8

Donc, les couples (x,y) d'entiers strictement positifs qui vérifient l'équation $x^2 - y^2 = 420$ sont $(106,104), (38,32), (26,16)$ et $(22,8)$.

4. (a) Au point P, on abaisse la hauteur du triangle PQT. On remarque que cette hauteur est aussi une hauteur du triangle PTR. Soit h la longueur de cette hauteur. Le rapport de l'aire du triangle PQT à celle du triangle PTR est égale à $\dfrac{\frac{1}{2} \times QT \times h}{\frac{1}{2} \times TR \times h}$, soit $\dfrac{QT}{TR}$, ou $\dfrac{6}{10}$, ou $\dfrac{3}{5}$.



(b) D'après la partie (a), on peut conclure que si deux triangles ont chacun une base sur une même droite ainsi qu'une même hauteur, alors le rapport de leur aire est égal au rapport de la longueur de leur base. On fera appel à cette conclusion dans les parties (b) et (c). On utilisera aussi la notation $|\triangle XYZ|$ pour représenter l'aire du triangle XYZ.

On a donc $\dfrac{|\triangle AEF|}{|\triangle DEF|} = \dfrac{AF}{FD} = \dfrac{3}{1}$. Donc $|\triangle AEF| = 3 \times |\triangle DEF|$, d'où $|\triangle AEF| = 3(17)$, ou $|\triangle AEF| = 51$.

Donc, $|\triangle AED| = |\triangle AEF| + |\triangle DEF|$, d'où $|\triangle AED| = 51 + 17$, ou $|\triangle AED| = 68$.

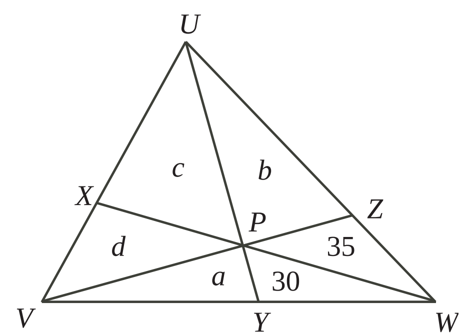
De même, $\dfrac{|\triangle ECD|}{|\triangle AED|} = \dfrac{EC}{AE} = \dfrac{2}{1}$. Donc, $|\triangle ECD| = 2 \times |\triangle AED|$, d'où $|\triangle ECD| = 2(68)$, ou $|\triangle ECD| = 136$.

Donc $|\triangle DCA| = |\triangle ECD| + |\triangle AED|$, d'où $|\triangle DCA| = 136 + 68$, ou $|\triangle DCA| = 204$.

Puisque D est le milieu de BC, $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{1}{1}$. Donc $\dfrac{|\triangle BDA|}{|\triangle DCA|} = \dfrac{BD}{DC} = \dfrac{1}{1}$.

Donc $|\triangle BDA| = |\triangle DCA| = 204$ et $|\triangle ABC| = |\triangle BDA| + |\triangle DCA|$, d'où $|\triangle ABC| = 204 + 204$, ou $|\triangle ABC| = 408$.

(c) Soit a, b, c et d l'aire respective des triangles PYV, PZU, UXP et XVP.



Puisque $\dfrac{|\triangle PYV|}{|\triangle PYW|} = \dfrac{VY}{YW} = \dfrac{4}{3}$, alors $|\triangle PYV| = \frac{4}{3} \times |\triangle PYW|$, d'où $|\triangle PYV| = \frac{4}{3}(30)$, ou $|\triangle PYV| = 40$. Donc $a = 40$.

De plus, $\dfrac{|\triangle VZW|}{|\triangle VZU|} = \dfrac{ZW}{ZU} = \dfrac{|\triangle PZW|}{|\triangle PZU|}$, d'où $|\triangle VZW| \times |\triangle PZU| = |\triangle PZW| \times |\triangle VZU|$.

Donc $\dfrac{|\triangle VZU|}{|\triangle PZU|} = \dfrac{|\triangle VZW|}{|\triangle PZW|}$, d'où $\dfrac{b+c+d}{b} = \dfrac{35+30+40}{35}$, ou $\dfrac{b+c+d}{b} = \dfrac{105}{35}$, ou $\dfrac{b+c+d}{b} = \dfrac{3}{1}$. Donc $b + c + d = 3b$, ou $c + d = 2b$.

De plus, on a $\dfrac{|\triangle UVY|}{|\triangle UYW|} = \dfrac{VY}{YW}$, d'où $\dfrac{40+c+d}{30+35+b} = \dfrac{4}{3}$.

Puisque $c + d = 2b$, la dernière équation devient $3(40 + 2b) = 4(65 + b)$, d'où $120 + 6b = 260 + 4b$, ou $2b = 140$, ou $b = 70$.

De plus, on a $\dfrac{|\triangle UXW|}{|\triangle XVW|} = \dfrac{UX}{XV}$, d'où $\dfrac{|\triangle UXW|}{|\triangle XVW|} = \dfrac{|\triangle UXP|}{|\triangle XVP|}$, d'où $\dfrac{35+b+c}{30+a+d} = \dfrac{c}{d}$.

Puisque $b = 70$ et $a = 40$, alors $\dfrac{105+c}{70+d} = \dfrac{c}{d}$, d'où $d(105 + c) = c(70 + d)$.

Donc $105d + cd = 70c + cd$, ou $105d = 70c$. Donc $\dfrac{d}{c} = \dfrac{70}{105}$, ou $\dfrac{d}{c} = \dfrac{2}{3}$, ou $d = \dfrac{2}{3}c$.

Puisque $c + d = 2b$, alors $c + d = 2(70)$, ou $c + d = 140$. On reporte $d = \frac{2}{3}c$ dans cette équation qui devient $c + \frac{2}{3}c = 140$, ou $\frac{5}{3}c = 140$. Donc $c = \frac{3}{5}(140)$, ou $c = 84$.

Donc, le triangle UXP a une aire de 84.