Concours canadien de mathématiques

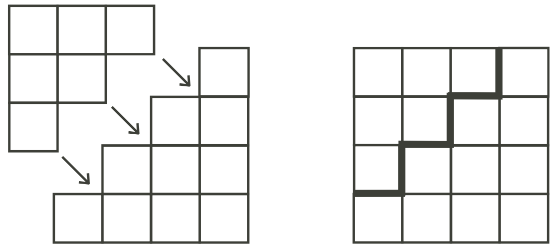
Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Fryer 2010

le vendredi 9 avril 2010

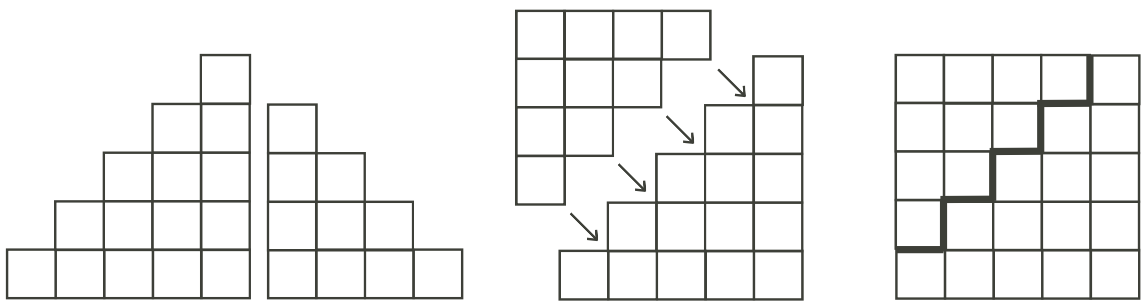
Solutions

1. (a) On peut placer le morceau de droite à la gauche de l'autre morceau, comme il est indiqué ci-dessous. On obtient ainsi 4 rangées de 4 carreaux, soit un carré contenant 16 carreaux.



(b) *Solution 1*
Les 4 rangées supérieures de la figure 5 sont identiques aux rangées de la figure 4. La rangée du bas de la figure 5 contient deux carreaux de plus que la rangée du bas de la figure 4, soit $7 + 2$ carreaux, ou 9 carreaux.
En tout, la figure 5 contient $1 + 3 + 5 + 7 + 9$ carreaux, ou 25 carreaux.

Solution 2
La rangée du bas de la figure 5 contient deux carreaux de plus que la rangée du bas de la figure 4, soit $7 + 2$ carreaux, ou 9 carreaux. On utilise la méthode de la partie (a) pour couper la figure 5 en deux morceaux qu'on peut placer comme dans les figures suivantes. On obtient un carré 5 sur 5 qui contient 25 carreaux.



(c) On compte le nombre de carreaux qui forment la rangée du bas des 5 premières figures et on inscrit les résultats dans le tableau suivant :

Numéro de la figure	Nombre de carreaux dans la rangée du bas
1	1
2	3
3	5
4	7
5	9

Puisque le nombre de carreaux dans la rangée du bas d'une figure est toujours 2 de plus que le nombre de carreaux dans la rangée du bas de la figure précédente, on peut prolonger le tableau.

Numéro de la figure	Nombre de carreaux dans la rangée du bas
6	11
7	13
8	15
9	17
10	19

Donc, la rangée du bas de la figure 10 compte 19 carreaux.

(d) *Solution 1*
Les 9 rangées supérieures de la figure 11 sont indentiques aux rangées de la figure 9. Puisque la figure 11 compte 11 rangées, la différence entre le nombre total de carreaux qui forment la figure 11 et le nombre total de carreaux qui forment la figure 9 est égale au nombre total de carreaux dans les rangées 10 et 11 de la figure 11.
Dans la rangée 10 de la figure 11, il y a le même nombre de carreaux que dans la rangée du bas de la figure 10, soit 19.
D'après la partie (c), on sait que dans la rangée du bas de la figure 11, il y a 2 carreaux de plus que dans la rangée du bas de la figure 10, soit $19 + 2$ carreaux, ou 21 carreaux.
Donc, la différence entre le nombre total de carreaux qui forment la figure 11 et le nombre total de carreaux qui forment la figure 9 est égal à $19 + 21$, ou 40.

Solution 2
On utilise la méthode de la partie (a) pour montrer que la figure 11 peut être découpée de manière à former un carré 11 sur 11 qui contient 121 carreaux.
De même, la figure 9 peut être découpée de manière à former un carré 9 sur 9 qui contient 81 carreaux.
Donc, la différence entre le nombre total de carreaux qui forment la figure 11 et le nombre total de carreaux qui forment la figure 9 est égal à $121 - 81$, ou 40.

2. (a) La moyenne d'un ensemble de nombres est égale à la somme de ces nombres divisée par le nombre de nombres dans l'ensemble.
Donc, la moyenne des entiers donnés est égale à $\frac{71+72+73+74+75}{5}$, ou $\frac{365}{5}$, ou 73.

(b) (i) On additionne : $n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) + (n + 4) = 5n + 10$

(ii) Puisque la somme des cinq entiers consécutifs est égale à $5n + 10$, la moyenne de ces entiers est égale à $\dfrac{5n + 10}{5}$, ou $n + 2$.
Si n est un entier pair, alors $n + 2$ est un entier pair, puisqu'il est 2 de plus que n.
De même, si n est un entier impair, alors $n + 2$ est un entier impair.
Donc, si la moyenne des entiers, soit $n + 2$, est impaire, n doit être impair.

(c) *Solution 1*
On additionne : $n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) + (n + 4) + (n + 5) = 6n + 15$
Puisque la somme des 6 entiers consécutifs est égale à $6n + 15$, la moyenne de ces entiers est égale à $\dfrac{6n + 15}{6}$, soit $n + \frac{15}{6}$, ou $n + \frac{5}{2}$.
Or, quel que soit l'entier n, $n + \frac{5}{2}$ n'est jamais un entier.
Donc, la moyenne de six entiers consécutifs n'est jamais un entier.

Solution 2
Étant donné six entiers consécutifs, trois des entiers doivent être pairs et les trois autres doivent être impairs. Donc, leur somme est nécessairement impaire.
Or, le quotient d'un nombre impair divisé par un nombre pair, soit 6, ne peut pas être un entier. Donc, la moyenne de six entiers consécutifs n'est jamais un entier.

3. (a) Lorsque le train 1 roule à une vitesse de 60 km/h pendant 9 heures, il franchit une distance de 9×60 km, ou 540 km. Soit d km la distance entre Amville et Batton. On a donc $\frac{2}{3}d = 540$, d'où $d = \frac{540(3)}{2}$, ou $d = 810$.
La distance entre Amville et Batton est donc de 810 km.

(b) La distance entre Amville et Batton est de 810 km.
Deux tiers de cette distance est égale à $\frac{2}{3} \times 810$ km, ou 540 km.
Le train 2 a mis 6 heures pour parcourir 540 km.
Puisque $\frac{540}{6} = 90$, le train 2 voyage à une vitesse constante de 90 km/h.

(c) Soit t le nombre d'heures que le train 1 met pour se rendre d'Amville à Cuford. Puisque ce train voyage à une vitesse de 60 km/h, la distance d'Amville à Cuford est de $60t$ km.
Le train 2 quitte Batton $3\frac{1}{2}$ heures après de départ du train 1 d'Amville.
Puisque les deux trains arrivent à Cuford en même temps, le train 2 met $\left(t - 3\frac{1}{2}\right)$ heures pour aller de Batton à Cuford. Or, le train 2 voyage à une vitesse de 90 km/h. Donc, la distance de Batton à Cuford est de $90(t - 3\frac{1}{2})$ km.
La distance d'Amville à Cuford plus la distance de Cuford à Batton est égale à la distance d'Amville à Batton, soit 810 km.
Donc $60t + 90(t - 3\frac{1}{2}) = 810$, ou $60t + 90t - 315 = 810$, d'où $150t = 1125$, ou $t = 7\frac{1}{2}$.
Donc, le train 1 a mis $7\frac{1}{2}$ heures pour se rendre d'Amville à Cuford.
Puisque le train 1 est arrivé à Cuford à 21 h 00, il est parti d'Amville à 13 h 30.

4. (a) Un palindrome inférieur à 1000 doit être composé de 1, 2 ou 3 chiffres.
On considère donc 3 cas.

1^er^ cas : Les palindromes de 1 chiffre
Tous les entiers de 1 à 9 sont des palindromes, puisqu'on peut les lire de gauche à droite ou de droite à gauche. Il y a donc 9 palindromes de 1 chiffre.

2^e^ cas : Les palindromes de 2 chiffres
On cherche le nombre de palindromes parmi les entiers de 10 à 99.
Or, un palindrome de 2 chiffres doit avoir deux chiffres identiques.
Il y a donc 9 palindromes de 2 chiffres, soit 11,22,33,44,55,66,77,88 et 99.

3^e^ cas : Les palindromes de 3 chiffres
Les palindromes de 3 chiffres sont de la forme aba, a étant un chiffre de 1 à 9 et b étant un chiffre de 0 à 9. En effet, dans un palindrome de 3 chiffres, le premier chiffre ne peut être nul et il doit être égal au troisième chiffre, tandis que le deuxième chiffre peut être égal à n'importe quel entier de 0 à 9.
Puisque le chiffre des centaines a peut être égal à n'importe quel entier de 1 à 9, il y a 9 choix possibles pour a. Le chiffre des unités est par le fait même choisi en même temps que le chiffre des centaines.
Pour chacun de ces 9 choix, il y a 10 choix pour le chiffre des dizaines b, soit n'importe quel entier de 0 à 9.
En tout, il y a 9×10 façons de choisir a et b. Il y existe donc 90 palindromes de 3 chiffres.

Il y a donc 9 palindromes de 1 chiffre, 9 palindromes de 2 chiffres et 90 palindromes de 3 chiffres. Il y a donc 108 (soit $9 + 9 + 90$) palindromes inférieurs à 1000.

(b) Les palindromes de 7 chiffres sont de la forme $abcdcba$, a,b,c et d étant des entiers ($1 \leq a \leq 9$ et $0 \leq b,c,d \leq 9$).
Puisque les trois derniers chiffres cba sont déterminés par le choix des trois premiers chiffres abc, le nombre de palindromes de 7 chiffres dépend du nombre de choix des quatre premiers chiffres $abcd$. Il y a 9 choix pour le 1^er^ chiffre a ; pour chacun de ces choix, il y a 10 choix pour le 2^e^ chiffre b ; pour chacun de ces choix, il y a 10 choix pour le 3^e^ chiffre c ; pour chacun de ces choix, il y a 10 choix pour le 4^e^ chiffre d.

En tout, il y a $9 \times 10 \times 10 \times 10$ choix pour les chiffres $abcd$ et il y a donc 9000 palindromes de 7 chiffres.

(c) Les palindromes 7 chiffres entre 1 000 000 et 2 000 000 commencent par un 1 et sont donc de la forme $1bcdcb1$.
Comme dans la partie (b), il y a 10 choix pour chacun des chiffres b, c et d. Le nombre de palindromes entre 1 000 000 et 2 000 000 est donc égal à $10 \times 10 \times 10$, ou 1000.
Si les palindromes de la partie (a) sont écrits en ordre croissant, les 1000 palindromes entre 1 000 000 et 2 000 000 sont les 1000 premiers.
De même, viennent ensuite les 1000 palindromes entre 2 000000 et 3 000 000, puis les 1000 palindromes entre 3 000 000 et 4 000 000.
Le 2125$^{\text{e}}$ est situé entre 3 000 000 et 4 000 000 et il doit donc être de la forme $3bcdcb3$.
Parmi les palindromes de la forme $3bcdcb3$, les plus petits sont de la forme $30cdc03$.
Puisqu'il y a 10 choix pour chacun des chiffres c et d, le nombre de tels palindromes est égal à 10×10, ou 100.
Le plus grand de ces 100 palindromes, soit 3099903, est le 2100$^{\text{e}}$ palindrome de la liste.
De même, il y a 100 palindromes de la forme $31cdc13$.
Le 2125$^{\text{e}}$ palindrome sera donc de cette forme.
Parmi les palindromes de la forme $31cdc13$, les plus petits sont de la forme $310d013$.
Puisqu'il y a 10 choix pour d, il y a 10 tels palindromes.
De même, viennent ensuite 10 palindromes de la forme $311d113$.
Le plus grand de ces 10 palindromes, soit 3119113, est le 2120$^{\text{e}}$ palindrome de la liste.
De même, viennent ensuite 10 palindromes de la forme $312d213$.
Le 2125$^{\text{e}}$ palindrome de la liste complète est le 5$^{\text{e}}$ de ces 10 palindromes, soit 3124213.

(d) Les palindromes de 6 chiffres sont de la forme $abccba$, a,b et c étant des entiers ($1 \leq a \leq 9$ et $0 \leq b,c \leq 9$).
Soit l'entier N formé de ces chiffres $abccba$.
On a donc $N = 100000a + 10000b + 1000c + 100c + 10b + a = 100001a + 10010b + 1100c$.
Or, les entiers $100001, 10010$ et 1100 sont divisibles par 11.
Donc $N = 11(9091a + 910b + 100c)$, ou $N = 11k$ ($k = 9091a + 910b + 100c$).
Pour que N soit divisible par 91, il faut que $11k$ soit divisible par 91.
Puisque 11 est un nombre premier et qu'il n'est pas un diviseur de 91, alors N est divisible par 91 si $k = 9091a + 910b + 100c$ est divisible par 91. On récrit k sous la forme :

$$\begin{aligned} k &= 9091a + 910b + 100c \\ &= (9100a - 9a) + 910b + (91c + 9c) \\ &= (9100a + 910b + 91c) + (9c - 9a) \\ &= 91(100a + 10b + c) + 9(c - a) \end{aligned}$$

Puisque $91(100a + 10b + c)$ est divisible par 91, alors quelles que soient les valeurs de a, de b et de c, k est divisible par 91 seulement si $9(c - a)$ est divisible par 91.
Puisque 9 et 91 n'ont aucun diviseur commun, $9(c - a)$ est seulement divisible par 91 si $(c - a)$ est divisible par 91.
Or $1 \leq a \leq 9$ et $0 \leq c \leq 9$. Donc 91 est un diviseur de $(c - a)$ seulement si $c - a = 0$, ou $c = a$.
Donc, les palindromes de 6 chiffres qui sont divisibles par 91 sont de la forme $abaaba$ ($1 \leq a \leq 9$ et $0 \leq b \leq 9$).
Puisqu'il y a 9 choix pour a et 10 choix pour b, le nombre de palindromes de 6 chiffres qui sont divisible par 91 est égal à 9×10, ou 90.