Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique
Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Fermat 2010

(11e année – Secondaire V)

le jeudi 25 février 2010

Solutions

1. L'expression est formée de deux demis et de trois tiers, ce qui vaut deux unités. Donc, la somme est égale à 2.

Réponse : (A)

2. La quantité 2 % est équivalente à la fraction $\frac{2}{100}$. Donc, « 2 % de 1 » est égal à $\frac{2}{100}$.

Réponse : (A)

3. *Solution 1*
Puisque $PQ = 1$ et $QR = 2PQ$, alors $QR = 2$.
Puisque $QR = 2$ et $RS = 3QR$, alors $RS = 3(2) = 6$.
Donc $PS = PQ + QR + RS$, d'où $PS = 1 + 2 + 6$, ou $PS = 9$.

Solution 2
D'après les renseignements donnés, on a :

$$PS = PQ + QR + RS = PQ + QR + 3QR = PQ + 4QR = PQ + 4(2PQ) = 9PQ$$

Donc $PS = 9(1)$, ou $PS = 9$.

Réponse : (C)

4. On reporte $u = -6$ dans l'expression $x = \frac{1}{3}(3 - 4u)$, pour obtenir $x = \frac{1}{3}(3 - 4(-6))$, ou $x = \frac{1}{3}(3 + 24)$, ou $x = \frac{1}{3}(27)$, ou $x = 9$.

Réponse : (C)

5. *Solution 1*
Puisque $2^x = 16$, alors $2^{x+3} = 2^3 2^x$, ou $2^{x+3} = 8(16)$, ou $2^{x+3} = 128$.

Solution 2
Puisque $2^x = 16$ et $2^4 = 16$, alors $x = 4$.
Puisque $x = 4$, alors $2^{x+3} = 2^7$, ou $2^{x+3} = 128$.

Réponse : (D)

6. Un quadrillage 12 sur 12 contiendra 11 lignes verticales intérieures et 11 lignes horizontales intérieures. (Dans le quadrillage 4 sur 4 donné, il y a 3 lignes verticales intérieures et 3 lignes horizontales intérieures.)
Chacune des 11 lignes verticales intérieures coupe chacune des 11 lignes horizontales intérieures pour créer un point d'intersection intérieur.
Ainsi chaque ligne intérieure verticale produit 11 points d'intersection intérieurs.
Le nombre de points d'intersection intérieurs est donc égal à 11×11, ou 121.

Réponse : (B)

7. Puisque PQS est un segment de droite et que $\angle PQR = 110^\circ$, alors $\angle RQS = 180^\circ - \angle PQR$, d'où $\angle RQS = 70^\circ$.
Puisque la somme des mesures d'angles du triangle QRS est égale à 180°, alors :

$$\begin{aligned} 70^\circ + (3x)^\circ + (x+14)^\circ &= 180^\circ \\ 70 + 3x + x + 14 &= 180 \\ 4x &= 96 \\ x &= 24 \end{aligned}$$

Réponse : (D)

8. Chaque bande verticale correspond à $\frac{1}{2}$ de la surface du rectangle.
La bande de gauche est divisée en trois parties égales. Donc, $\frac{2}{3}$ de la bande de gauche est ombrée, ce qui correspond à $\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}$ de la surface, ou $\frac{1}{3}$ de la surface du grand rectangle.
La bande de droite est divisée en quatre parties égales. Donc, $\frac{2}{4}$, ou $\frac{1}{2}$ de la bande de droite est ombrée, ce qui correspond à $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ de la surface, ou $\frac{1}{4}$ de la surface du grand rectangle.
Donc, la fraction du rectangle initial qui est ombrée est égale à $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$, ou $\frac{4}{12} + \frac{3}{12}$, ou $\frac{7}{12}$.

Réponse : (E)

9. D'après la définition, $(5\nabla 1) + (4\nabla 1)$ est égal à $5(5-1) + 4(4-1)$, ou $5(4) + 4(3)$, ou $20 + 12$, ou 32.

Réponse : (D)

10. Puisque $2x^2 = 9x - 4$, alors $2x^2 - 9x + 4 = 0$.
Donc $(2x-1)(x-4) = 0$, d'où $2x = 1$, ou $x = 4$.
Puisque $x \neq 4$, alors $2x = 1$.

Réponse : (B)

11. Puisque les pièces de 1 \$, dans le sac, ont une valeur totale de 400 \$, alors il y a 400 pièces de 1 \$ dans le sac.
Puisqu'une pièce de 1 \$ a la même masse que 4 pièces de 10 ¢, alors 400 pièces de 1 \$ ont la même masse que 1600 pièces de 10 ¢ (car $4(400) = 1600$).
Donc, le sac qui contient les pièces de 10 ¢ contient 1600 pièces. Les pièces de 10 ¢ dans ce sac ont une valeur totale de 160 \$.

Réponse : (C)

12. Supposons que la première fois, chacune des 7 personnes a reçu q bonbons.
Donc, $7q$ bonbons ont été distribués et il est resté 3 bonbons. Puisqu'on a distribué k bonbons, alors $k = 7q + 3$.
On multiplie chaque membre par 3 pour obtenir $3k = 21q + 9$.
Lorsqu'on distribue $21q+9$ bonbons à 7 personnes, chacune reçoit $3q+1$ bonbons, pour un total de $21q + 7$ bonbons. Il en reste donc 2. (Les 7 personnes ne peuvent pas recevoir plus de $3q + 1$ bonbons, puisque $7(3q + 2) = 21q + 14$, ce qui correspond à plus de bonbons qu'il n'y en a.)
Donc, il resterait 2 bonbons à la fin.

Réponse : (B)

13. Les 50 nombres, qui ont une moyenne de 76, ont une somme de 50(76), ou 3800.
Les 40 nombres qui ont une moyenne de 80 ont une somme de 40(80), ou 3200.
Donc, les 10 autres nombres ont une somme de $3800 - 3200$, ou 600.
La moyenne de ces 10 nombres est donc égale à $\frac{600}{10}$, ou 60.

Réponse : (A)

14. L'énoncé (A) n'est pas nécessairement vrai, puisque les amis auraient pu attraper 2, 3, 3 et 3 poissons.
L'énoncé (B) n'est pas nécessairement vrai, puisque les amis auraient pu attraper 1, 1, 1, et 8 poissons.
L'énoncé (C) n'est pas nécessairement vrai, puisque les amis auraient pu attraper 2, 3, 3, et 3 poissons.
L'énoncé (E) n'est pas nécessairement vrai, puisque les amis auraient pu attraper 1, 1, 1, et 8 poissons.
Donc, l'énoncé (D) est celui qui doit être vrai.

On peut le confirmer, puisque si les quatre amis avaient chacun attrapé au moins trois poissons, ils auraient attrapé au moins 12 poissons en tout. Or, ils n'ont attrapé que 11 poissons en tout.

Réponse : (D)

15. Si $-1 < \sqrt{p} - \sqrt{100} < 1$, alors $-1 < \sqrt{p} - 10 < 1$, d'où $9 < \sqrt{p} < 11$.
Puisque $\sqrt{p}$ est suérieur à 9, alors p est supérieur à 9^2, ou 81.
Puisque $\sqrt{p}$ est inférieur à 11, alors p est inférieur à 11^2, ou 121.
Donc $81 < p < 121$.
Puisque p est un entier, alors $82 \le p \le 120$.
Le nombre d'entiers p qui vérifient la condition est donc égal à $120 - 82 + 1$, ou 39.

Réponse : (D)

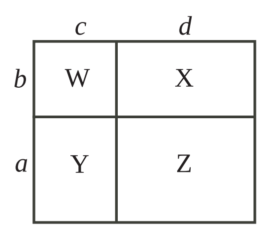
16. On remarque que $2010 = 10(201) = 2(5)(3)(67)$ et que 67 est un nombre premier.
Les diviseurs positifs de 2010 sont donc 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30, 67, 134, 201, 335, 402, 670, 1005 et 2010.
Les couples (a, b) pour lesquels $ab = 2010$ et $a > b$ sont donc $(2010, 1)$, $(1005, 2)$, $(670, 3)$, $(402, 5)$, $(335, 6)$, $(201, 10)$, $(134, 15)$, $(67, 30)$.
Le couple $(a, b) = (67, 30)$ admet la plus petite valeur de $a - b$, soit $a - b = 37$.

Réponse : (A)

17. Puisque $PQRS$ est un rectangle, PQ est perpendiculaire à QR.
Donc, l'aire du triangle PQR est égale à $\frac{1}{2}(PQ)(QR)$, ou $\frac{1}{2}(5)(3)$, ou $\frac{15}{2}$.
Puisque $PT = TU = UR$, alors les triangles PTQ, TUQ et URQ ont la même aire. (Les bases respectives PT, TU et UR sont de même longueur et leur hauteur est égale à la distance du point Q au segment PR.)
Donc, l'aire du triangle TUQ est égale à $\frac{1}{3}(\frac{15}{2})$, ou $\frac{5}{2}$.
De même, l'aire du triangle TUS est égale à $\frac{5}{2}$.
L'aire du quadrilatère $STQU$ est égale à la somme de l'aire du triangle TUQ et de l'aire du triangle TUS. Elle est donc égale à $\frac{5}{2} + \frac{5}{2}$, ou 5.

Réponse : (B)

18. Soit a, b, c et d les longueurs des segments indiqués ci-dessous.

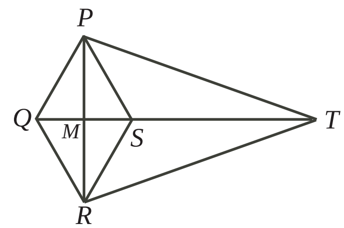


Le rectangle W mesure b sur c. Son périmètre $2b + 2c$ est égal à 2.
Le rectangle X mesure b sur d. Son périmètre $2b + 2d$ est égal à 3.
Le rectangle Y mesure a sur c. Son périmètre $2a + 2c$ est égal à 5.
Le rectangle Z mesure a sur d. Son périmètre est égal à $2a + 2d$.
Donc $2a + 2d = (2a + 2b + 2c + 2d) - (2b + 2c)$, ou $2a + 2d = (2a + 2c) + (2b + 2d) - (2b + 2c)$, d'où $2a + 2d = 5 + 3 - 2$, ou $2a + 2d = 6$.

Réponse : (A)

19. *Solution 1*

On remarque que les triangles PQS et RQS sont équilatéraux.
On trace le segment PR. Puisque $PQRS$ est un losange, alors PR et QS sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu M.
De plus, on a $QM = MS = \frac{1}{2}QS = 3$.



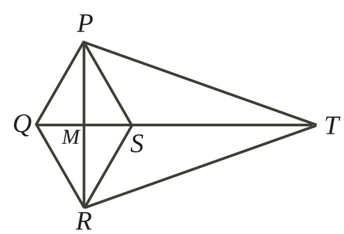
Puisque $\angle PSQ = 60°$ et $\angle PMS = 90°$, le triangle PMS est un triangle remarquable 30°-60°-90°. Donc $PM = \sqrt{3} \times MS$, ou $PM = 3\sqrt{3}$.
Puisque $PT = TR$, le triangle PRT est isocèle.
Puisque M est le milieu de PR, alors TM est perpendiculaire à PR.
Puisque SM est aussi perpendiculaire à PR, alors S est situé sur TM.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle PMT et puisque $MT > 0$, on a :

$$MT = \sqrt{PT^2 - PM^2} = \sqrt{14^2 - (3\sqrt{3})^2} = \sqrt{196 - 27} = \sqrt{169} = 13$$

Donc $ST = MT - MS$, d'où $ST = 13 - 3$, ou $ST = 10$.

Solution 2

On remarque que les triangles PQS et RQS sont équilatéraux.
On trace le segment PR. Puisque $PQRS$ est un losange, alors PR et QS sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu M.
Puisque $PT = TR$, le triangle PRT est isocèle.
Puisque M est le milieu de PR, alors TM est perpendiculaire à PR.
Puisque SM est aussi perpendiculaire à PR, alors S est situé sur TM.



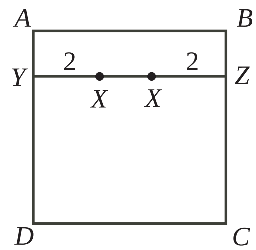
Puisque $\angle PSQ = 60°$, alors $\angle PST = 180° - 60°$, ou $\angle PST = 120°$.
Dans le triangle PST, on sait que $\angle PST = 120°$, que $PS = 6$ et que $PT = 14$.
D'après la loi du cosinus :

$$\begin{array}{rcl} PT^2 & = & PS^2 + ST^2 - 2(PS)(ST)\cos(\angle PST) \\ 14^2 & = & 6^2 + ST^2 - 2(6)(ST)\cos(120°) \\ 196 & = & 36 + ST^2 + 6ST \qquad \text{(puisque } \cos(120°) = -\frac{1}{2}\text{)} \\ 0 & = & ST^2 + 6ST - 160 \\ 0 & = & (ST - 10)(ST + 16) \end{array}$$

Donc $ST = 10$ ou $ST = -16$. Puisque $ST > 0$, alors $ST = 10$.

RÉPONSE : (D)

20. Soit $ABCD$ le carré.
Supposons que le point X est situé à 1 unité du côté AB.
X est donc situé sur un segment de droite YZ à 1 unité au-dessous du côté AB.
Puisque X est situé sur YZ, il est automatiquement à 4 unités du côté DC.
Puisque X doit être à 2 unités du côté AD ou du côté BC, il y a deux positions possibles pour X sur le segment YZ :



Dans chaque cas, X est situé à 3 unités du quatrième côté. Il est donc à 1, 2, 3 et 4 unités des quatre côtés.
On peut recommencer en plaçant X à 2, 3 ou 4 unités du côté AB. Dans chaque cas, il y a deux positions possibles pour X.
En tout, le nombre de positions possibles pour le point X est égal à 4(2), ou 8. Ces positions sont différentes, puisqu'il y a deux positions différentes sur quatre segments parallèles.

Réponse : (D)

21. *Solution 1*
Puisqu'il faut déterminer *la* valeur de $\dfrac{x-z}{y-z}$, cette valeur doit être la même, quelles que soient les valeurs de x, y et z qui vérifient l'équation $\dfrac{x-y}{z-y} = -10$.
Par exemple si $x = 10$, $y = 0$ et $z = -1$, alors $\dfrac{x-y}{z-y} = -10$. Ces valeurs doivent donc donner la valeur recherchée.
Dans ce cas, on a $\dfrac{x-z}{y-z} = \dfrac{10-(-1)}{0-(-1)}$, d'où $\dfrac{x-z}{y-z} = \dfrac{11}{1}$, ou $\dfrac{x-z}{y-z} = 11$.

Solution 2
On procède par manipulations algébriques :

$$\frac{x-z}{y-z} = \frac{(x-y)+(y-z)}{y-z} = \frac{x-y}{y-z} + \frac{y-z}{y-z} = -\frac{x-y}{z-y} + 1$$

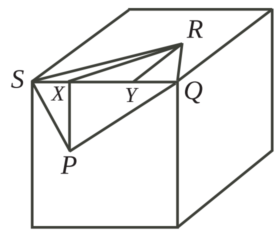
Puisque $\dfrac{x-y}{z-y} = -10$, alors $\dfrac{x-z}{y-z} = -(-10)+1$, ou $\dfrac{x-z}{y-z} = 11$.

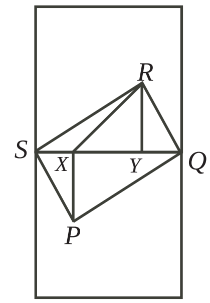
Réponse : (A)

22. Puisque $PQRS$ est un rectangle, alors $\angle SRQ = \angle SPQ = 90°$.
De plus, $SR = PQ = 20$ et $SP = QR = 15$.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle SPQ, et puisque $QS > 0$, alors

$$QS = \sqrt{SP^2 + PQ^2} = \sqrt{15^2 + 20^2} = \sqrt{225 + 400} = \sqrt{625} = 25$$

Aux points P et R, on abaisse des perpendiculaires PX et RY au segment SQ. On trace le segment RX.





On cherche la longueur RP.
Puisque le triangle SPQ est rectangle en P, alors :

$$\sin(\angle PSQ) = \frac{PQ}{SQ} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5} \qquad \cos(\angle PSQ) = \frac{SP}{SQ} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$$

Donc $XP = PS\sin(\angle PSQ)$, d'où $XP = 15(\frac{4}{5})$, ou $XP = 12$ et $SX = PS\cos(\angle PSQ)$, d'où $SX = 15(\frac{3}{5})$, ou $SX = 9$.
Puisque les triangles QRS et SPQ sont congruents (trois paires de côtés congrus deux à deux), alors $QY = SX = 9$ et $YR = XP = 12$.
Puisque $SQ = 25$, alors $XY = SQ - SX - QY$, d'où $XY = 25 - 9 - 9$, ou $XY = 7$.
Or, le triangle RYX est rectangle en Y. D'après le théorème de Pythagore :

$$RX^2 = YR^2 + XY^2 = 12^2 + 7^2 = 193$$

On considère ensuite le triangle PXR. Puisque RX est situé sur la face supérieure du cube et que PX est perpendiculaire à cette face, le triangle PXR est rectangle en X.
D'après le théorème de Pythagore et puisque $PR > 0$, alors :

$$PR = \sqrt{PX^2 + RX^2} = \sqrt{12^2 + 193} = \sqrt{144 + 193} = \sqrt{337} \approx 18{,}36$$

Parmi les choix de réponses, 18,4 est le plus près de cette longueur.

Réponse : (E)

23. On calcule quelques valeurs de t_n pour chercher une régularité possible :

n	$\sqrt{n}$	t_n	n	$\sqrt{n}$	t_n
1	1	1	11	3,32	3
2	1,41	1	12	3,46	3
3	1,73	2	13	3,61	4
4	2	2	14	3,74	4
5	2,24	2	15	3,87	4
6	2,45	2	16	4	4
7	2,65	3	17	4,12	4
8	2,83	3	18	4,24	4
9	3	3	19	4,36	4
10	3,16	3	20	4,47	4
			21	4,58	5

(Dans chaque cas, la colonne $\sqrt{n}$ donne une approximation de $\sqrt{n}$ au centième près.)
Donc, $t_n = 1$ pour 2 valeurs de n, $t_n = 2$ pour 4 valeurs de n, $t_n = 3$ pour 6 valeurs de n et $t_n = 4$ pour 8 valeurs de n.
On pose comme hypothèse que $t_n = k$ pour $2k$ valeurs de n. On prouvera l'hypothèse à la fin.

On remarque que $\sqrt{2010} \approx 44{,}83$. Donc $t_{2010} = 45$.
Donc, avant d'arriver à $t_{2010} = 45$, on a compté tous les termes $t_n \leq 44$.
D'après notre hypothèse, le nombre de termes t_n tels que $t_n \leq 44$ devrait être égal à :

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 86 + 88 = 2(1 + 2 + 3 + \cdots + 43 + 44) = 2\left(\tfrac{1}{2}(44)(45)\right) = 44(45) = 1980$$

Or, $\sqrt{1980} \approx 44{,}497$ et $\sqrt{1981} \approx 44{,}508$. Donc $t_{1980} = 44$ et $t_{1981} = 45$.
Puisque $t_{1981} = t_{2010} = 45$, alors chacun des termes de t_{1981} à t_{2010} est égal à 45. Il y a donc 30 termes qui égalent 45.
Donc, la somme demandée est égale à :

$$2\left(\tfrac{1}{1}\right) + 4\left(\tfrac{1}{2}\right) + 6\left(\tfrac{1}{3}\right) + \cdots + 86\left(\tfrac{1}{43}\right) + 88\left(\tfrac{1}{44}\right) + 30\left(\tfrac{1}{45}\right) = 2 + 2 + 2 + \cdots + 2 + 2 + \tfrac{2}{3}$$

Le terme 2 paraît 44 fois dans la somme précédente.
Donc, la somme est égale à $88\frac{2}{3}$.

On démontre maintenant l'hypothèse, soit que pour chaque entiers positif k, il y a $2k$ termes t_n qui égalent k :

Pour que $t_n = k$, il faut que $k - \frac{1}{2} \leq \sqrt{n} < k + \frac{1}{2}$ (en d'autres mots, il faut que l'entier le plus près de $\sqrt{n}$ soit égal à k).
Puisque n et k sont positifs, alors l'inéquation $k - \frac{1}{2} \leq \sqrt{n}$ est équivalente à l'inéquation $(k - \frac{1}{2})^2 \leq n$ et l'inéquation $\sqrt{n} < k + \frac{1}{2}$ est équivalente à l'inéquation $n < (k + \frac{1}{2})^2$.
Il faut donc que $(k - \frac{1}{2})^2 \leq n < (k + \frac{1}{2})^2$, ou $k^2 - k + \frac{1}{4} \leq n < k^2 + k + \frac{1}{4}$.
Puisque n est un entier, alors $k^2 - k + 1 \leq n \leq k^2 + k$.
Le nombre de valeurs de n est donc égal à $(k^2 + k) - (k^2 - k + 1) + 1$, ou $2k$.

Réponse : (C)

24. On calcule les numéros des sphères dans les quatre couches supérieures.
La couche du dessus comporte une seule sphère qui porte le numéro 1.
Chaque sphère de la 2^e^ couche ne touche qu'à une sphère de la couche au-dessus d'elle. Puisque cette sphère porte le numéro 1, chaque sphère de la 2^e^ couche porte aussi le numéro 1 :

$$\begin{array}{ccc} & 1 & \\ 1 & & 1 \end{array}$$

Dans la 3^e^ couche, chaque sphère du coin ne touche qu'à une sphère de la 2^e^ couche et chacune de ces dernières porte le numéro 1 ; chaque couche du coin porte donc le numéro 1. Les trois autres sphères de la 3^e^ couche (chacune est au milieu d'un « côté du triangle ») touchent à deux sphères de la 2^e^ couche, chacune portant le numéro 1. Ces trois autres sphères de la 3^e^ couche portent donc le numéro 2. Voici donc les numéros de la 3^e^ couche :

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 2 & & 2 & \\ 1 & & 2 & & 1 \end{array}$$

On complète la 4^e^ couche de la même façon pour obtenir :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 3 & & 3 & & \\ & 3 & & 6 & & 3 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \end{array}$$

On appelle *sphère externe* toute sphère qui n'est pas une sphère interne. Dans les quatre couches supérieures, seule la sphère numéro 6, dans la 4e couche, est interne ; les autres sphères sont externes. On utilisera aussi s'expression « somme des sphères » pour représenter la somme des numéros sur les sphères.
On peut remarquer plusieurs régularités :

(i) Dans toutes les couches, les sphères du coin portent le numéro 1.

(ii) Dans les quatre premières couches, la somme respective des sphères sur un « côté de triangle » est égale à 1, 2, 4, 8. Il semble que la somme des sphères sur les « côtés de triangle » de la couche k est égale à 2^{k-1}.

(iii) Dans les quatre premières couches, la somme de toutes les sphères de la couche est égale à 1, 3, 9, 27. Il semble que la somme des sphères de la couche k est égale à 3^{k-1}.

On utilisera ces propriétés et on les prouvera à la fin.

Pour déterminer la somme des sphères internes, on calcule la somme de toutes les sphères et on soustrait la somme des sphères externes.
D'après la propriété (iii), la somme de toutes les sphères des 13 couches est égale à :

$$3^0 + 3^1 + 3^2 + \cdots + 3^{11} + 3^{12} = \frac{1(3^{13}-1)}{3-1} = \frac{1}{2}(3^{13}-1)$$

(Pour calculer la somme des puissances, on peut utiliser une calculatrice ou utiliser la formule pour la somme des termes d'une suite géométrique.)
Pour calculer la somme de toutes les sphères externes, on considère une couche particulière k, ($k \geq 2$). (Dans la 1re couche, la somme des sphères externes est égale à 1.)
Les sphères externes sont situées sur les trois « côtés de triangle » et sur chaque côté, leur somme est égale à 2^{k-1}, selon la propriété (ii). La somme des sphères externes semble donc être égale à $3(2^{k-1})$. Or, chaque sphère à l'extrémité d'un côté a été comptée deux fois. Il faut donc soustraire 3. Dans la couche k, la somme des sphères externes est donc égale à $3(2^{k-1})-3$. (On peut vérifier que cette expression donne les sommes des sphères externes des quatre premières couches.)
Donc, la somme de toutes les sphères externes est égale à :

$$\begin{aligned}
1 + (3(2^1)-3)) + (3(2^2)-3) + \cdots + (3(2^{12})-3) &= 1 + 3(2^1+2^2+\cdots+2^{12}) - 36 \\
&= 3\left(\frac{2(2^{12}-1)}{2-1}\right) - 35 \\
&= 3(2^{13}-2) - 35 \\
&= 3(2^{13}) - 41
\end{aligned}$$

Donc, la somme de toutes les sphères internes est égale à :

$$\tfrac{1}{2}(3^{13}-1) - 3(2^{13}) + 41 = 772\,626$$

Il reste à démontrer les propriétés précédentes :

(i) Chaque sphère de coin dans la couche k touche à une seule sphère de la couche $k-1$, soit une sphère de coin.
Donc, le numéro d'une sphère de coin de la couche k est égal au numéro de la sphère de coin de la couche $k-1$.
Puisque les sphères de coin des quatre premières couches portent le numéro 1, toutes les sphères de coin portent le numéro 1.

(ii) On considère un « côté de triangle » dans la couche k ($k \geq 2$), de même que le côté parallèle dans la couche $k+1$.
On considère une sphère numéro x sur le côté de la couche k.
Cette sphère touche à deux sphères sur le côté correspondant de la couche $k+1$.
De plus, les sphères du côté de la couche $k+1$ ne touchent à aucune sphère de la couche k qui ne sont pas situées sur le côté correspondant.
La sphère que l'on considère contribue x à la somme des sphères du côté de la couche k. Elle contribue donc x au nombre sur chacune des deux sphères qu'elle touche sur le côté de la couche $k+1$.
Donc, cette sphère numéro x dans la couche k contribue $2x$ à la somme des sphères du côté correspondant dans la couche $k+1$.
Donc, la somme des sphères sur le côté de la couche $k+1$ est égale à deux fois la somme des sphères sur le côté correspondant de la couche k.
Puisque les sommes des sphères sur les côtés des premières couches sont des puissances de 2, cette régularité se poursuit, puisqu'on continue à multiplier par 2.

(iii) On considère une sphère numéro x dans la couche k.
Cette sphère touche à trois sphères dans la couche $k+1$.
Donc, cette sphère contribue x à la somme de la couche k,et $3x$ à la somme de la couche $k+1$ (c.-à-d. x à chacune de trois sphères).
Donc, la somme des sphères de la couche $k+1$ est trois fois la somme des sphères de la couche k, puisque chaque sphère de la couche k contribue trois fois dans la couche $k+1$.
Puisque les sommes des sphères des premières couches sont des puissances de 3, cette régularité se poursuit, puisqu'on continue à multiplier par 3.

Réponse : (E)

25. Soit $f(x) = (1-x)^a(1+x)^b(1-x+x^2)^c(1+x^2)^d(1+x+x^2)^e(1+x+x^2+x^3+x^4)^f$. On remarque plusieurs identités algébriques que l'on peut vérifier en développant et en simplifiant :

$$\begin{aligned}
1-x^5 &= (1-x)(1+x+x^2+x^3+x^4)\\
1-x^3 &= (1-x)(1+x+x^2)\\
1-x^4 &= (1-x^2)(1+x^2) = (1-x)(1+x)(1+x^2)\\
1+x^3 &= (1+x)(1-x+x^2)\\
1-x^6 &= (1-x^3)(1+x^3) = (1-x)(1+x)(1-x+x^2)(1+x+x^2)
\end{aligned}$$

Ceci nous permet de regrouper des termes, de façon successive :

$$\begin{aligned}
&f(x)\\
&= (1-x)^a(1+x)^b(1-x+x^2)^c(1+x^2)^d(1+x+x^2)^e(1+x+x^2+x^3+x^4)^f\\
&= (1-x)^{a-e-f}(1+x)^b(1-x+x^2)^c(1+x^2)^d(1+x+x^2)^e(1-x)^e(1+x+x^2+x^3+x^4)^f(1-x)^f\\
&= (1-x)^{a-e-f}(1+x)^b(1-x+x^2)^c(1+x^2)^d(1-x^3)^e(1-x^5)^f\\
&= (1-x)^{a-e-f}(1+x)^{b-c}(1-x+x^2)^c(1+x)^c(1+x^2)^d(1-x^3)^e(1-x^5)^f\\
&= (1-x)^{a-e-f}(1+x)^{b-c}(1+x^3)^c(1+x^2)^d(1-x^3)^e(1-x^5)^f\\
&= (1-x)^{a-e-f}(1+x)^{b-c}(1+x^3)^c(1-x^3)^c(1+x^2)^d(1-x^3)^{e-c}(1-x^5)^f\\
&= (1-x)^{a-e-f}(1+x)^{b-c}(1-x^6)^c(1+x^2)^d(1-x^3)^{e-c}(1-x^5)^f\\
&= (1-x)^{a-e-f-d}(1+x)^{b-c-d}(1-x^6)^c(1+x^2)^d(1-x)^d(1+x)^d(1-x^3)^{e-c}(1-x^5)^f\\
&= (1-x)^{a-e-f-d}(1+x)^{b-c-d}(1-x^6)^c(1-x^4)^d(1-x^3)^{e-c}(1-x^5)^f\\
&= (1-x)^{a-d-e-f}(1+x)^{b-c-d}(1-x^3)^{e-c}(1-x^4)^d(1-x^5)^f(1-x^6)^c
\end{aligned}$$

Puisque $a > d + e + f$, $e > c$ et $b > c + d$, alors les exposants $a - d - e - f$, $b - c - d$ et $e - c$ sont des entiers strictement positifs.
Soit $A = a - d - e - f$, $B = b - c - d$, $C = e - c$, $D = d$, $E = f$ et $F = c$.
On veut que le développement de

$$f(x) = (1 - x)^A (1 + x)^B (1 - x^3)^C (1 - x^4)^D (1 - x^5)^E (1 - x^6)^F$$

ne contienne que les termes $1 - 2x$ lorsqu'on enlève les termes affectés d'un exposant supérieur à 6. On utilise les identités

$$(1 + y)^n = 1 + ny + \frac{n(n-1)}{2} y^2 + \cdots \qquad (*)$$

et

$$(1 - y)^n = 1 - ny + \frac{n(n-1)}{2} y^2 + \cdots \qquad (**)$$

que l'on peut démontrer en développant ou à l'aide du théorème du binôme.

Puisque le terme constant de chaque facteur est égal à 1, alors le terme constant de $f(x)$ est égal à 1, peu importe les valeurs de A, B, C, D, E et F.
On considère les deux premiers facteurs. Seuls ces facteurs ont une influence sur les coefficients de x et de x^2 dans le produit final. En effet, tout terme en x ou en x^2, dans le produit final, provient de ces facteurs qui sont ensuite multipliés par le terme constant 1 de chaque autre facteur.
On considère le produit des deux premiers facteurs, tout en laissant de côté les termes de degré supérieur à 2 :

$$\begin{aligned}
(1-x)^A(1+x)^B &= (1 - Ax + \frac{A(A-1)}{2}x^2 - \cdots)(1 + Bx + \frac{B(B-1)}{2}x^2 + \cdots) \\
&= 1 - Ax + \frac{A(A-1)}{2}x^2 + Bx - ABx^2 + \frac{B(B-1)}{2}x^2 + \cdots \\
&= 1 - (A - B)x + \left[\frac{A(A-1)}{2} + \frac{B(B-1)}{2} - AB\right] x^2 + \cdots
\end{aligned}$$

Ces trois termes sont le terme constant, le terme en x et le terme en x^2 du développement simplifié de $f(x)$.
Puisque $f(x)$ admet un terme $-2x$ et aucun terme en x^2, alors

$$A - B = 2 \qquad \text{et} \qquad \frac{A(A-1)}{2} + \frac{B(B-1)}{2} - AB = 0$$

Cette dernière équation devient $A^2 - A + B^2 - B - 2AB = 0$, ou $(A - B)^2 = A + B$.
Puisque $A - B = 2$, alors $A + B = 4$, d'où $2A = (A + B) + (A - B)$, ou $2A = 6$. Donc $A = 3$ et $B = 1$.
Les deux premiers facteurs de $f(x)$ sont donc $(1 - x)^3(1 + x)$.
On remarque que $(1-x)^3(1+x) = (1-3x+3x^2-x^3)(1+x)$, d'où $(1-x)^3(1+x) = 1-2x+2x^3-x^4$.
Donc $f(x) = (1 - 2x + 2x^3 - x^4)(1 - x^3)^C(1 - x^4)^D(1 - x^5)^E(1 - x^6)^F$.
Or, dans le produit final, il n'y a aucun terme en x^3. Puisque le premier facteur contient le terme « $+2x^3$ » et que ce terme paraîtrait dans le développement final, puisqu'il sera multiplié par chacun des termes constants des facteurs suivants, « $+2x^3$ » doit être annulé par un terme « $-2x^3$ ». Le seul autre facteur qui pourrait admettre un terme en x^3 est $(1-x^3)^C$. Pour annuler le terme « $+2x^3$ », le développement de $(1-x^3)^C$ doit inclure le terme « $-2x^3$ » qui sera multiplié par chacun des termes constants des facteurs suivants pour donner le terme « $-2x^3$ » dans le

développement final afin d'annuler le terme « $+2x^3$ ».
Pour que $(1-x^3)^C$ admette un terme $-2x^3$, il faut que $C=2$, d'après $(*)$.
Donc :

$$\begin{aligned}
f(x) &= (1-2x+2x^3-x^4)(1-x^3)^2(1-x^4)^D(1-x^5)^E(1-x^6)^F \\
&= (1-2x+2x^3-x^4)(1-2x^3+x^6)(1-x^4)^D(1-x^5)^E(1-x^6)^F \\
&= (1-2x+3x^4-3x^6+\cdots)(1-x^4)^D(1-x^5)^E(1-x^6)^F
\end{aligned}$$

Lorsqu'on simplifie à ce stade, on peut laisser de côté tout terme affecté d'un exposant supérieur à 6, puisqu'ils n'ont aucun effet sur les termes affectés d'un exposant plus petit dans les calculs qui suivent.
Pour annuler « $+3x^4$ », le facteur $(1-x^4)^D$ doit admettre le terme « $-3x^4$ », d'où $D=3$.
Donc :

$$\begin{aligned}
f(x) &= (1-2x+3x^4-3x^6+\cdots)(1-x^4)^3(1-x^5)^E(1-x^6)^F \\
&= (1-2x+3x^4-3x^6+\cdots)(1-3x^4+\cdots)(1-x^5)^E(1-x^6)^F \\
&= (1-2x+6x^5-3x^6+\cdots)(1-x^5)^E(1-x^6)^F
\end{aligned}$$

Pour annuler « $+6x^5$ », le facteur $(1-x^5)^E$ doit admettre le terme « $-6x^5$ », d'où $E=6$.
Donc :

$$\begin{aligned}
f(x) &= (1-2x+6x^5-3x^6+\cdots)(1-x^5)^6(1-x^6)^F \\
&= (1-2x+6x^5-3x^6+\cdots)(1-6x^5+\cdots)(1-x^6)^F \\
&= (1-2x+9x^6+\cdots)(1-x^6)^F
\end{aligned}$$

Pour annuler « $+9x^6$ », le facteur $(1-x^6)^F$ doit admettre le terme « $-9x^6$ », d'où $F=9$.

On a donc $A=3$, $B=1$, $C=2$, $D=3$, $E=6$ et $F=9$.
Puisque $D=d$, $E=f$ et $F=c$, alors $c=9$, $f=6$ et $d=3$.
Puisque $C=e-c$, $C=2$ et $c=9$, alors $e=11$.
Puisque $A=a-d-e-f$, $d=3$, $e=11$, $f=6$ et $A=3$, alors $a=3+3+11+6$, ou $a=23$.

Réponse : (E)