Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Euclide 2010

le mercredi 7 avril 2010

Solutions

1. (a) *Solution 1*
Puisque $3^x = 27$, alors $3^{x+2} = 3^x 3^2$, d'où $3^{x+2} = 27 \cdot 9$, ou $3^{x+2} = 243$.

Solution 2
Puisque $3^x = 27$ et $27 = 3^3$, alors $x = 3$.
Donc $3^{x+2} = 3^5$, ou $3^{x+2} = 243$.

(b) Puisque $2^5 3^{13} 5^9 x = 2^7 3^{14} 5^9$, alors $x = \dfrac{2^7 3^{14} 5^9}{2^5 3^{13} 5^9}$, d'où $x = 2^2 3^1$, ou $x = 12$.

(c) Les droites d'équations $y = x + 2$ et $y = -\frac{1}{2}x + 2$ se coupent au point B sur l'axe des ordonnées. Puisque la droite d'équation $y = x + 2$ a une ordonnée à l'origine de 2, alors B a pour coordonnées $(0, 2)$.
On détermine l'abscisse à l'origine de chaque droite en posant $y = 0$.
Si $y = x + 2$ et $y = 0$, alors $x + 2 = 0$, d'où $x = -2$. Donc, A a pour coordonnées $(-2, 0)$.
Si $y = -\frac{1}{2}x + 2$ et $y = 0$, alors $0 = -\frac{1}{2}x + 2$, d'où $\frac{1}{2}x = 2$, ou $x = 4$. Donc, C a pour coordonnées $(4, 0)$.
Puisque BO est perpendiculaire à AC, on considère la base AC du triangle ABC et la hauteur correspondante BO.
On a $BO = 2$ et $AC = 4 - (-2)$, ou $AC = 6$.
Donc, l'aire du triangle ABC est égale à $\frac{1}{2} \times AC \times BO$, ou $\frac{1}{2} \times 6 \times 2$, ou 6.

2. (a) Soit r, v et b les masses respectives des colis rouge, vert et bleu.
On sait que $r + v + b = 60$, $r + v = 25$ et $v + b = 50$.
On soustrait la deuxième équation de la première, membre par membre, pour obtenir $b = 35$ qu'on reporte dans la troisième équation. On obtient $v + 35 = 50$, d'où $v = 15$.
Donc, le colis vert a une masse de 15 kg.

(b) Soit p un palindrome qui est la somme des trois entiers consécutifs $a - 1$, a et $a + 1$.
Donc $p = (a - 1) + a + (a + 1)$, ou $p = 3a$. Donc, p est un multiple de 3.
Les plus grands palindromes inférieurs à 200 sont 191, 181 et 171.
On remarque que 191 et 181 ne sont pas divisibles par 3, mais que 171 est divisible par 3.
On peut le vérifier comme suit :

> Un entier positif est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

Donc ni 191, ni 181 n'est la somme de trois entiers consécutifs.
L'entier 171 est égal à $56 + 57 + 58$. Donc, 171 est le plus grand palindrome inférieur à 200 qui est la somme de trois entiers consécutifs.

(c) *Solution 1*
Puisque $(x + 1)(x - 1) = 8$, alors $x^2 - 1 = 8$, ou $x^2 = 9$.
Donc $(x^2 + x)(x^2 - x) = x(x + 1)x(x - 1) = x^2(x + 1)(x - 1) = x^2(x^2 - 1) = 9(8) = 72$.

Solution 2
Puisque $(x + 1)(x - 1) = 8$, alors $x^2 - 1 = 8$, ou $x^2 = 9$, d'où $x = \pm 3$.
Si $x = 3$, alors $(x^2 + x)(x^2 - x) = (3^2 + 3)(3^2 - 3) = (9 + 3)(9 - 3) = 12(6) = 72$.
Si $x = -3$, alors $(x^2 + x)(x^2 - x) = ((-3)^2 + (-3))((-3)^2 - (-3)) = (9 - 3)(9 + 3) = 72$.
Dans chaque cas, $(x^2 + x)(x^2 - x) = 72$.

3. (a) *Solution 1*

L'abeille met 60 minutes pour se rendre de H à F, passe 30 minutes à F, met 45 minutes pour se rendre de F à G, passe 60 minutes à G, puis se rend de G à H.
Puisque $60+30+45+60=195$, la tournée a pris 195 minutes plus le temps que l'abeille a mis pour se rendre de G à H.
Puisque l'abeille vole à une vitesse constante, le rapport de deux distances est égal au rapport des temps correspondants. Donc $\dfrac{HF}{GF}=\dfrac{60 \text{ minutes}}{45 \text{ minutes}}=\dfrac{4}{3}$.
Puisque $\dfrac{HF}{GF}=\dfrac{4}{3}$ et que le triangle FGH est rectangle en F, il est semblable à un triangle rectangle remarquable 3-4-5. Donc $\dfrac{HG}{GF}=\dfrac{5}{3}$.
Le rapport du temps mis pour se rendre de H à G au temps mis pour se rendre de F à G est aussi égal à $\frac{5}{3}$. L'abeille a donc mis $\frac{5}{3}\times 45$ minutes, ou 75 minutes, pour se rendre de G à H.
L'abeille s'est donc absentée de la ruche pendant $(195+75)$ minutes, ou 270 minutes.

Solution 2

L'abeille met 60 minutes pour se rendre de H à F, passe 30 minutes à F, met 45 minutes pour se rendre de F à G, passe 60 minutes à G, puis se rend de G à H.
Puisque $60+30+45+60=195$, la tournée a pris 195 minutes plus le temps que l'abeille a mis pour se rendre de G à H.
Puisque l'abeille vole à une vitesse constante, le rapport de deux distances est égal au rapport des temps correspondants.
On peut donc utiliser le théorème de Pythagore en se servant des *temps* :

$$\begin{aligned}\text{Temps de } G \text{ à } H &= \sqrt{(\text{Temps de } H \text{ à } F)^2+(\text{Temps de } F \text{ à } G)^2}\\ &= \sqrt{60^2+45^2}\\ &= \sqrt{5625}\\ &= 75\end{aligned}$$

puisque le temps est positif.
L'abeille s'est donc absentée de la ruche pendant $(195+75)$ minutes, ou 270 minutes.

(b) *Solution 1*

Puisque $\angle OPB=90^\circ$, alors OP et PB sont perpendiculaires et le produit de leur pente est donc égal à -1.
La pente de OP est égale à $\dfrac{4-0}{p-0}$, ou $\dfrac{4}{p}$. La pente de PB est égale à $\dfrac{4-0}{p-10}$, ou $\dfrac{4}{p-10}$.
On a donc :

$$\begin{aligned}\frac{4}{p}\cdot\frac{4}{p-10} &= -1\\ 16 &= -p(p-10)\\ p^2-10p+16 &= 0\\ (p-2)(p-8) &= 0\end{aligned}$$

Donc $p=2$ ou $p=8$.

Solution 2

Puisque le triangle OPB est rectangle en P, alors $OP^2+PB^2=OB^2$ selon le théorème de Pythagore.

Puisque O et B ont pour coordonnées respectives $(0,0)$ et $(10,0)$, alors $OB = 10$.
De plus, $OP^2 = (p-0)^2+(4-0)^2$, ou $OP^2 = p^2+16$. De même, $PB^2 = (10-p)^2+(4-0)^2$, ou $PB^2 = p^2 - 20p + 116$.
Donc :

$$\begin{aligned}(p^2 + 16) + (p^2 - 20p + 116) &= 10^2\\ 2p^2 - 20p + 32 &= 0\\ p^2 - 10p + 16 &= 0\\ (p-2)(p-8) &= 0\end{aligned}$$

Donc $p = 2$ ou $p = 8$.

4. (a) Supposons que Tanya a acheté x chèvres et y hélicoptères.
On a donc $19x + 17y = 201$.
Puisque x et y sont des entiers non négatifs, alors $19x \le 201$, d'où $x \le 10$.
Si $x = 10$, alors $17y = 201 - 19x$ devient $17y = 11$, qui n'admet aucune solution entière, puisque 11 n'est pas divisible par 17.
Si $x = 9$, alors $17y = 201 - 19x$ devient $17y = 30$, qui n'admet aucune solution entière.
Si $x = 8$, alors $17y = 201 - 19x$ devient $17y = 49$, qui n'admet aucune solution entière.
Si $x = 7$, alors $17y = 201 - 19x$ devient $17y = 68$, d'où $y = 4$.
On a $19(7) + 17(4) = 201$. Donc, Tanya a acheté 7 chèvres et 7 hélicoptères.
(On peut vérifier que si $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$, l'équation n'admet aucune valeur entière de y.)

(b) *Solution 1*
On a :

$$\begin{aligned}(x+8)^4 &= (2x+16)^2\\ (x+8)^4 - 2^2(x+8)^2 &= 0\\ (x+8)^2((x+8)^2 - 2^2) &= 0\\ (x+8)^2((x+8)+2)((x+8)-2) &= 0\\ (x+8)^2(x+10)(x+6) &= 0\end{aligned}$$

Donc $x = -8$ ou $x = -10$ ou $x = -6$.

Solution 2
On a :

$$\begin{aligned}(x+8)^4 &= (2x+16)^2\\ (x+8)^4 - 2^2(x+8)^2 &= 0\\ (x+8)^2((x+8)^2 - 2^2) &= 0\\ (x+8)^2(x^2 + 16x + 64 - 4) &= 0\\ (x+8)^2(x^2 + 16x + 60) &= 0\\ (x+8)^2(x+10)(x+6) &= 0\end{aligned}$$

Donc $x = -8$ ou $x = -10$ ou $x = -6$.

Solution 3
Puisque $(x+8)^4 = (2x+16)^2$, alors $(x+8)^2 = 2x+16$ ou $(x+8)^2 = -(2x+16)$.
D'après la 1re équation, $x^2+16x+64 = 2x+16$, ou $x^2+14x+48 = 0$, ou $(x+6)(x+8) = 0$.
D'après la 2e équation, $x^2+16x+64 = -2x-16$, ou $x^2+18x+80 = 0$, ou $(x+10)(x+8) = 0$.
Donc $x = -8$ ou $x = -10$ ou $x = -6$.

5. (a) *Solution 1*

On fait appel au fait que $g(x) = g(f(f^{-1}(x)))$.
Puisque $f(x) = 2x + 1$, la fonction f est définie par $y = 2x + 1$. Donc, la fonction f^{-1} est définie par $x = 2y + 1$, ou $2y = x - 1$, ou $y = \frac{1}{2}(x - 1)$. Donc $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x - 1)$.
Puisque $g(f(x)) = 4x^2 + 1$, alors :

$$\begin{array}{rcl} g(x) & = & g(f(f^{-1}(x))) \\ & = & g(f(\frac{1}{2}(x-1))) \\ & = & 4(\frac{1}{2}(x-1))^2 + 1 \\ & = & 4 \cdot \frac{1}{4}(x-1)^2 + 1 \\ & = & (x-1)^2 + 1 \\ & = & x^2 - 2x + 2 \end{array}$$

Solution 2

On utilise les expressions algébriques de $f(x)$ et de $g(f(x))$ pour obtenir $g(x)$.
Puisque $f(x)$ est une expression du premier degré et que $g(f(x))$ est une expression du second degré, il est probable que $g(x)$ soit une expression du second degré.
Puisque $f(x) = 2x + 1$, alors $(f(x))^2 = 4x^2 + 4x + 1$.
Puisque $g(f(x))$ n'admet aucun terme en x, on soustrait $2f(x)$ pour éliminer le terme $4x$, ce qui donne :

$$(f(x))^2 - 2f(x) = (4x^2 + 4x + 1) - 2(2x + 1) = 4x^2 - 1$$

Pour obtenir $g(f(x))$, on ajoute 2, ce qui donne $4x^2 + 1$.
Donc $g(f(x)) = (f(x))^2 - 2f(x) + 2$. Donc $g(x) = x^2 - 2x + 2$.

Solution 3

On utilise les expressions algébriques de $f(x)$ et de $g(f(x))$ pour construire celle de $g(x)$.
Puisque $f(x)$ est une expression du premier degré et que $g(f(x))$ est une expression du second degré, il est probable que $g(x)$ soit une expression du second degré.
Soit $g(x) = ax^2 + bx + c$, a, b et c étant des nombres réels. Donc :

$$\begin{array}{rcl} g(f(x)) & = & g(2x+1) \\ & = & a(2x+1)^2 + b(2x+1) + c \\ & = & a(4x^2 + 4x + 1) + b(2x+1) + c \\ & = & 4ax^2 + (4a + 2b)x + (a + b + c) \end{array}$$

Or, on sait que $g(f(x)) = 4x^2 + 1$. On compare les coefficients deux à deux pour conclure que $4a = 4$, $4a + 2b = 0$ et $a + b + c = 1$.
D'après la première équation, $a = 1$.
D'après la deuxième équation, $b = -2a$, d'où $b = -2$.
D'après la troisième équation, $c = 1 - a - b$, d'où $c = 2$.
Donc $g(x) = x^2 - 2x + 2$.

(b) *Solution 1*

Puisque les deux premiers termes ont une somme de 40 et que les trois premiers termes ont une somme de 76, le 3^e^ terme est égal à $76 - 40$, ou 36.
Puisque les trois premiers termes ont une somme de 76 et que les quatre premiers termes ont une somme de 130, le 4^e^ terme est égal à $130 - 76$, ou 54.
Puisque le 3^e^ terme est égal à 36 et que le 4^e^ terme est égal à 54, la raison géométrique de la suite est égale à $\frac{54}{36}$, ou $\frac{3}{2}$.

Donc, le 5e terme est égal à $54 \cdot \frac{3}{2}$, ou 81, et le 6e terme est égal à $81 \cdot \frac{3}{2}$, ou $\frac{243}{2}$.
Le 2e terme est égal à $36 \div \frac{3}{2}$, c'est-à-dire à $36 \cdot \frac{2}{3}$, ou 24 et le 1er terme est égal à $24 \div \frac{3}{2}$, c'est-à-dire à $24 \cdot \frac{2}{3}$, ou 16.
Les six premiers termes de la suite sont 16, 24, 36, 54, 81 et $\frac{243}{2}$.
Puisque le 1er terme est égal à 2^4 et que la raison est égale à $\frac{3}{2}$, alors le n^{ieme} terme de la suite est égal à $2^4\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}$, ou $\dfrac{3^{n-1}}{2^{n-5}}$.
Lorsque $n \geq 6$, cette expression devient une fraction dont le numérateur est impair et le dénominateur est pair. Donc lorsque $n \geq 6$, le n^{ieme} terme n'est pas un entier. (Aucun entier impair n'est divisible par un entier pair.)
Donc, il y a 5 entiers dans la suite.

Solution 2
Soit a le premier terme de la suite et r la raison géométrique. (Donc, les deuxième et troisième termes sont ar et ar^2, et ainsi de suite.) D'après les renseignements donnés, on a $a + ar = 40$, $a + ar + ar^2 = 76$ et $a + ar + ar^2 + ar^3 = 130$.
On soustrait la première équation de la deuxième, membre par membre, pour obtenir $ar^2 = 36$.
On soustrait la deuxième équation de la troisième, membre par membre, pour obtenir $ar^3 = 54$. Puisque $ar^3 = 54$ et $ar^2 = 36$, alors $r = \dfrac{ar^3}{ar^2}$, d'où $r = \dfrac{54}{36}$, ou $r = \dfrac{3}{2}$.
Puisque $ar^2 = 36$ et $r = \frac{3}{2}$, alors $a(\frac{3}{2})^2 = 36$, ou $\frac{9}{4}a = 36$, d'où $a = \frac{4}{9} \cdot 36$, ou $a = 16$.
Puisque $a = 16$ et $r = \frac{3}{2}$, les six premiers termes de la suite sont 16, 24, 36, 54, 81 et $\frac{243}{2}$.
Puisque le 1er terme est égal à 2^4 et que la raison est égale à $\frac{3}{2}$, alors le n^{ieme} terme de la suite est égal à $2^4\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}$, ou $\dfrac{3^{n-1}}{2^{n-5}}$.
Lorsque $n \geq 6$, cette expression devient une fraction dont le numérateur est impair et le dénominateur est pair. Donc lorsque $n \geq 6$, le n^{ieme} terme n'est pas un entier. (Aucun entier impair n'est divisible par un entier pair.)
Donc, il y a 5 entiers dans la suite.

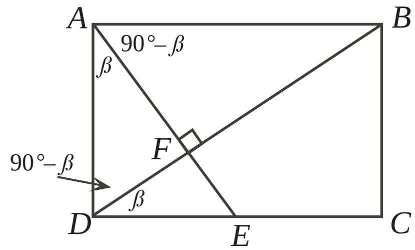
6. (a) Dans un triangle remarquable 30°-60°-90°, le rapport de la longueur de l'hypoténuse à la longueur du côté opposé à l'angle de 60° est de $2 : \sqrt{3}$.
Or, ABC, ACD, ADE, AEF, AFG et AGH sont tous des triangles remarquables 30°-60°-90°. Donc $\dfrac{AH}{AG} = \dfrac{AG}{AF} = \dfrac{AF}{AE} = \dfrac{AE}{AD} = \dfrac{AD}{AC} = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.
Donc $AH = \frac{2}{\sqrt{3}}AG = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 AF = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 AE = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^4 AD = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^5 AC = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^6 AB$.
(C'est-à-dire que pour se rendre de la longueur $AB = 1$ à la longueur AH, on multiplie successivement six fois par le facteur d'agrandissement $\frac{2}{\sqrt{3}}$.)
Donc $AH = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^6$, ou $AH = \frac{64}{27}$.

(b) *Solution 1*
Puisque le triangle AFD est rectangle en F, alors par le théorème de Pythagore :

$$AD = \sqrt{AF^2 + FD^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

puisque $AD > 0$.
Soit $\angle FAD = \beta$.

Puisque $ABCD$ est un rectangle, alors $\angle BAF = 90° - \beta$.
Puisque le triangle AFD est rectangle en F, alors $\angle ADF = 90° - \beta$.
Puisque $ABCD$ est un rectangle, alors $\angle BDC = 90° - (90° - \beta)$, ou $\angle BDC = \beta$.



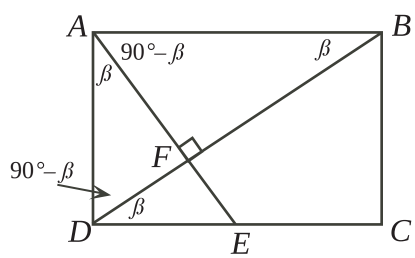
Puisque les triangles BFA, AFD et DFE sont rectangles et que chacun a un angle β ainsi qu'un angle $90° - \beta$, ils sont semblables.
Donc $\dfrac{AB}{AF} = \dfrac{DA}{DF}$, d'où $AB = \frac{4(2\sqrt{5})}{2}$, ou $AB = 4\sqrt{5}$.
De même, $\dfrac{FE}{FD} = \dfrac{FD}{FA}$, d'où $FE = \frac{2(2)}{4}$, ou $FE = 1$.
Puisque $ABCD$ est un rectangle, alors $BC = AD = 2\sqrt{5}$ et $DC = AB = 4\sqrt{5}$.
L'aire du quadrilatère $BCEF$ est égale à l'aire du triangle DCB moins l'aire du triangle DFE. Elle est donc égale à :

$$\tfrac{1}{2}(DC)(CB) - \tfrac{1}{2}(DF)(FE) = \tfrac{1}{2}(4\sqrt{5})(2\sqrt{5}) - \tfrac{1}{2}(2)(1) = 20 - 1 = 19$$

Solution 2
Puisque le triangle AFD est rectangle en F, alors par le théorème de Pythagore :

$$AD = \sqrt{AF^2 + FD^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

puisque $AD > 0$.
Soit $\angle FAD = \beta$.
Puisque $ABCD$ est un rectangle, alors $\angle BAF = 90° - \beta$. Puisque le triangle BAF est rectangle en F, alors $\angle ABF = \beta$.
Puisque le triangle AFD est rectangle en F, alors $\angle ADF = 90° - \beta$.
Puisque $ABCD$ est un rectangle, alors $\angle BDC = 90° - (90° - \beta)$, ou $\angle BDC = \beta$.



Dans le triangle AFD, on a $\sin\beta = \dfrac{FD}{AD} = \dfrac{2}{2\sqrt{5}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\beta = \dfrac{AF}{AD} = \dfrac{4}{2\sqrt{5}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ et $\tan\beta = \dfrac{FD}{AF} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$.
Puisque $AF = 4$ et $\angle ABF = \beta$, alors $AB = \dfrac{AF}{\sin\beta}$, d'où $AB = \dfrac{4}{\frac{1}{\sqrt{5}}}$, ou $AB = 4\sqrt{5}$.
Puisque $FD = 2$ et $\angle FDE = \beta$, alors $FE = FD\tan\beta$, d'où $FE = 2 \cdot \frac{1}{2}$, ou $FE = 1$.
Puisque $ABCD$ est un rectangle, alors $BC = AD = 2\sqrt{5}$ et $DC = AB = 4\sqrt{5}$.

L'aire du quadrilatère $BCEF$ est égale à l'aire du triangle DCB moins l'aire du triangle DFE. Elle est donc égale à :

$$\frac{1}{2}(DC)(CB) - \frac{1}{2}(DF)(FE) = \frac{1}{2}(4\sqrt{5})(2\sqrt{5}) - \frac{1}{2}(2)(1) = 20 - 1 = 19$$

7. (a) On utilise les lois des exposants. Puisque $9 = 3^2$ et $27 = 3^3$, alors :

$$\begin{aligned} 3^{x-1}9^{\frac{3}{2x^2}} &= 27 \\ 3^{x-1}(3^2)^{\frac{3}{2x^2}} &= 3^3 \\ 3^{x-1}3^{\frac{3}{x^2}} &= 3^3 \\ 3^{x-1+\frac{3}{x^2}} &= 3^3 \end{aligned}$$

Puisque deux puissances de 3 sont égales, leurs exposants doivent être égaux. Donc :

$$\begin{aligned} x - 1 + \frac{3}{x^2} &= 3 \\ x^3 - x^2 + 3 &= 3x^2 \qquad \text{(on a multiplié chaque membre par } x^2\text{)} \\ x^3 - 4x^2 + 3 &= 0 \end{aligned}$$

Puisque l'équation est vérifiée par $x = 1$, alors $x - 1$ est un facteur du membre de gauche. On divise le membre de gauche par $x - 1$ pour obtenir l'autre facteur.
On obtient $(x - 1)(x^2 - 3x - 3) = 0$.
L'équation du second degré $x^2 - 3x - 3 = 0$ a pour racines :

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(-3)}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{2}$$

Donc, l'équation donnée a pour racines 1 et $\dfrac{3 \pm \sqrt{21}}{2}$.

(b) Aux points d'intersection des courbes, les valeurs de y sont égales.
Donc $\log_{10}(x^4) = (\log_{10} x)^3$.
Puisque $\log_{10}(a^b) = b \log_{10} a$, l'équation devient $4 \log_{10} x = (\log_{10} x)^3$.
Posons $u = \log_{10} x$. L'équation devient $4u = u^3$, ou $u^3 - 4u = 0$.
On peut factoriser le membre de gauche : $u^3 - 4u = u(u^2 - 4) = u(u + 2)(u - 2)$
L'équation devient $u(u + 2)(u - 2) = 0$, d'où $u = 0$ ou $u = -2$ ou $u = 2$.
Donc $\log_{10} x = 0$ ou $\log_{10} x = -2$ ou $\log_{10} x = 2$. Donc $x = 1$ ou $x = \frac{1}{100}$ ou $x = 100$.
Il reste à déterminer l'ordonnée des points d'intersection. Puisqu'une des courbes a pour équation $y = (\log_{10} x)^3$, on peut calculer les valeurs de y en utilisant $y = u^3$.
Les valeurs correspondantes de y sont $y = 0^3$, $y = (-2)^3$ et $y = 2^3$, c'est-à-dire $y = 0$, $y = -8$ et $y = 8$.
Les points d'intersection sont $(1, 0)$, $(\frac{1}{100}, -8)$ et $(100, 8)$.

8. (a) Si Oumar obtient 3 faces, Georges ne peut rien lancer et ne peut obtenir 1 face.
Si Oumar obtient 0, 1 ou 2 faces, Georges peut lancer à son tour et il lui est possible d'obtenir 1 face.
Voici donc les possibilités pour Georges d'obtenir exactement 1 face :
– Oumar lance 3 pièces et obtient 2 faces. Georges lance 1 pièce et obtient 1 face.
– Oumar lance 3 pièces et obtient 1 face. Georges lance 2 pièces et obtient 1 face.
– Oumar lance 3 pièces et obtient 0 face. Georges lance 3 pièces et obtient 1 face.
On détermine maintenant les probabilités.
Si on lance 3 pièces, il y a 8 résultats équiprobables possibles : FFF, FFP, FPF, FPP, PFF, PFP, PPF et PPP. Chacun de ces résultats a une probabilité de $\left(\frac{1}{2}\right)^3$, ou $\frac{1}{8}$.

Donc :

– La probabilité de lancer 3 pièces et d'obtenir 0 face est égale à $\frac{1}{8}$.
– La probabilité de lancer 3 pièces et d'obtenir 1 face est égale à $\frac{3}{8}$.
– La probabilité de lancer 3 pièces et d'obtenir 2 faces est égale à $\frac{3}{8}$.
– La probabilité de lancer 3 pièces et d'obtenir 3 faces est égale à $\frac{1}{8}$.

Si on lance 2 pièces, il y a 4 résultats équiprobables possibles : FF, FP, PF et PP. Chacun de ces résultats a une probabilité de $\left(\frac{1}{2}\right)^2$, ou $\frac{1}{4}$. Donc, la probabilité de lancer 2 pièces et d'obtenir 1 face est égale à $\frac{2}{4}$, ou $\frac{1}{2}$.

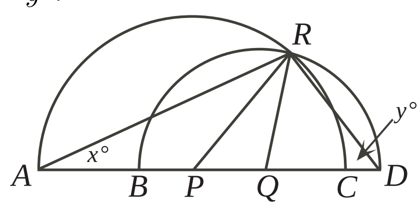
La probabilité de lancer 1 pièce et d'obtenir 1 face est égale à $\frac{1}{2}$.

Voici un résumé des possibilités :

– Oumar lance 3 pièces et obtient 2 faces (une probabilité de $\frac{3}{8}$) et Georges lance 1 pièce et obtient une face (une probabilité de $\frac{1}{2}$).
– Oumar lance 3 pièces et obtient 1 face (une probabilité de $\frac{3}{8}$) et Georges lance 2 pièces et obtient 1 face (une probabilité de $\frac{1}{2}$).
– Oumar lance 3 pièces et obtient 0 face (une probabilité de $\frac{1}{8}$) et Georges lance 3 pièces et obtient 1 face (une probabilité de $\frac{3}{8}$).

La probabilité pour que Georges obtienne exactement une face est égale à $\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\cdot\frac{3}{8}$, ou $\frac{27}{64}$.

(b) Soit $\angle PAR = x^\circ$ et $\angle QDR = y^\circ$.



Puisque PR et PA sont des rayons du grand demi-cercle, le triangle PAR est isocèle. Donc $\angle PRA = \angle PAR = x^\circ$.

Puisque QD et QR sont des rayons du petit demi-cercle, le triangle QRD est isocèle. Donc $\angle QRD = \angle QDR = y^\circ$.

Les mesures d'angles du triangle ARD ont une somme de 180°.

Donc $x^\circ + (x^\circ + 40^\circ + y^\circ) + y^\circ = 180^\circ$, d'où $2x + 2y = 140$, ou $x + y = 70$.

Donc $\angle ARD = x^\circ + 40^\circ + y^\circ$, ou $\angle ARD = (x + y + 40)^\circ$, ou $\angle ARD = 110^\circ$.

9. (a) (i) *Solution 1*

$$\begin{aligned}
\text{M.G.} &= \cot\theta - \cot 2\theta \\
&= \frac{\cos\theta}{\sin\theta} - \frac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta} \\
&= \frac{\sin 2\theta\cos\theta - \cos 2\theta\sin\theta}{\sin\theta\sin 2\theta} \\
&= \frac{\sin(2\theta-\theta)}{\sin\theta\sin 2\theta} \\
&= \frac{\sin\theta}{\sin\theta\sin 2\theta} \\
&= \frac{1}{\sin 2\theta} \\
&= \text{M.D.}
\end{aligned}$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Solution 2

$$\begin{aligned}
\text{M.G.} &= \cot\theta - \cot 2\theta \\
&= \frac{\cos\theta}{\sin\theta} - \frac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta} \\
&= \frac{\cos\theta}{\sin\theta} - \frac{\cos 2\theta}{2\sin\theta\cos\theta} \\
&= \frac{2\cos^2\theta - \cos 2\theta}{2\sin\theta\cos\theta} \\
&= \frac{2\cos^2\theta - (2\cos^2\theta - 1)}{\sin 2\theta} \\
&= \frac{1}{\sin 2\theta} \\
&= \text{M.D.}
\end{aligned}$$

Ce qu'il fallait démontrer.

(ii) Selon la partie (i), on a $\frac{1}{\sin 8^\circ} = \cot 4^\circ - \cot 8^\circ$, $\frac{1}{\sin 16^\circ} = \cot 8^\circ - \cot 16^\circ$ et ainsi de suite. Donc :

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{\sin 8^\circ} + \frac{1}{\sin 16^\circ} + \frac{1}{\sin 32^\circ} + \cdots + \frac{1}{\sin 4096^\circ} + \frac{1}{\sin 8192^\circ} \\
&= (\cot 4^\circ - \cot 8^\circ) + (\cot 8^\circ - \cot 16^\circ) + (\cot 16^\circ - \cot 32^\circ) + \\
&\qquad \cdots + (\cot 2048^\circ - \cot 4096^\circ) + (\cot 4096^\circ - \cot 8192^\circ) \\
&= \cot 4^\circ - \cot 8192^\circ
\end{aligned}$$

puisque la somme est téléscopée.
Puisque la fonction cotangeante a une période de 180° et que 8100° est un multiple de 180°, alors $\cot 8192^\circ = \cot 92^\circ$.
Donc :

$$\begin{aligned}
S &= \cot 4^\circ - \cot 92^\circ \\
&= \frac{\cos 4^\circ}{\sin 4^\circ} - \frac{\cos 92^\circ}{\sin 92^\circ} \\
&= \frac{\cos 4^\circ}{\sin 4^\circ} - \frac{-\sin 2^\circ}{\cos 2^\circ} \\
&= \frac{\cos 4^\circ}{2\sin 2^\circ\cos 2^\circ} + \frac{\sin 2^\circ}{\cos 2^\circ} \\
&= \frac{\cos 4^\circ + 2\sin^2 2^\circ}{2\sin 2^\circ\cos 2^\circ} \\
&= \frac{(1 - 2\sin^2 2^\circ) + 2\sin^2 2^\circ}{\sin 4^\circ} \\
&= \frac{1}{\sin 4^\circ}
\end{aligned}$$

Donc $\alpha = 4^\circ$.

(b) *Solution 1*

On utilisera la notation suivante : $A = \angle BAC$, $B = \angle ABC$ et $C = \angle ACB$.
Il faut démontrer que $A < \frac{1}{2}(B+C)$. Puisque les mesures d'angles du triangle ABC ont une somme de 180°, alors $B+C = 180^\circ - A$. L'inégalité est équivalente à $A < \frac{1}{2}(180^\circ - A)$, c'est-à-dire à $\frac{3}{2}A < 90^\circ$ ou $A < 60^\circ$.
Il faut donc démontrer que $A < 60^\circ$.
On sait que $a < \frac{1}{2}(b+c)$. Donc $2a < b+c$, d'où $4a^2 < b^2+c^2+2bc$, puisque toutes les quantités sont positives.
D'après la loi du cosinus dans le triangle ABC, on a $a^2 = b^2+c^2-2bc\cos A$. Donc :

$$\begin{array}{rcl}
4a^2 & < & b^2+c^2+2bc \\
4(b^2+c^2-2bc\cos A) & < & b^2+c^2+2bc \\
4b^2+4c^2-8bc\cos A & < & b^2+c^2+2bc \\
4b^2+4c^2-8bc\cos A & < & b^2+c^2+2bc+3(b-c)^2 \qquad (\text{puisque } (b-c)^2 \geq 0) \\
4b^2+4c^2-8bc\cos A & < & b^2+c^2+2bc+3b^2-6bc+3c^2 \\
4b^2+4c^2-8bc\cos A & < & 4b^2+4c^2-4bc \\
-8bc\cos A & < & -4bc \\
\cos A & > & \frac{1}{2} \qquad (\text{puisque } 8bc > 0)
\end{array}$$

Puisque $2a < b+c$, a ne peut être la longueur du plus grand côté du triangle ABC (c'est-à-dire qu'on ne peut avoir $a \geq b$ et $a \geq c$). Donc, A est la mesure d'un angle aigu.
Puisque $\cos A > \frac{1}{2}$, alors $A < 60^\circ$.

Solution 2

On utilisera la notation suivante : $A = \angle BAC$, $B = \angle ABC$ et $C = \angle ACB$.
Il faut démontrer que $A < \frac{1}{2}(B+C)$. Puisque les mesures d'angles du triangle ABC ont une somme de 180°, alors $B+C = 180^\circ - A$, l'inégalité est équivalente à $A < \frac{1}{2}(180^\circ - A)$, c'est-à-dire à $\frac{3}{2}A < 90^\circ$ ou $A < 60^\circ$.
Il faut donc démontrer que $A < 60^\circ$.
On sait que $a < \frac{1}{2}(b+c)$, d'où $2a < b+c$.
D'après la loi des sinus dans le triangle ABC, $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$, d'où $b = \dfrac{a\sin B}{\sin A}$ et $c = \dfrac{a\sin C}{\sin A}$.
On obtient donc les inégalités suivantes :

$$\begin{array}{rcl}
2a & < & b+c \\
2a & < & \dfrac{a\sin B}{\sin A} + \dfrac{a\sin C}{\sin A} \\
2a\sin A & < & a\sin B + a\sin C \qquad (\text{puisque } \sin A > 0 \text{ lorsque } 0^\circ < A < 180^\circ) \\
2\sin A & < & \sin B + \sin C \qquad (\text{puisque } a > 0)
\end{array}$$

On fait appel à l'identité $\sin B + \sin C = 2\sin\left(\dfrac{B+C}{2}\right)\cos\left(\dfrac{B-C}{2}\right)$.

Puisque $\cos\theta \leq 1$ pour tout θ, alors $\sin B + \sin C \leq 2\sin\left(\dfrac{B+C}{2}\right) \cdot 1 = 2\sin\left(\dfrac{B+C}{2}\right)$.

Donc :

$$\begin{aligned}
2\sin A &< \sin B + \sin C \leq 2\sin\left(\frac{B+C}{2}\right) \\
2\sin A &< 2\sin\left(\frac{B+C}{2}\right) \\
2\sin A &< 2\sin\left(\frac{180^\circ - A}{2}\right) \\
4\sin(\tfrac{1}{2}A)\cos(\tfrac{1}{2}A) &< 2\sin(90^\circ - \tfrac{1}{2}A) \\
2\sin(\tfrac{1}{2}A)\cos(\tfrac{1}{2}A) &< \cos(\tfrac{1}{2}A)
\end{aligned}$$

Puisque $0^\circ < A < 180^\circ$, alors $\cos(\frac{1}{2}A) > 0$, d'où $\sin(\frac{1}{2}A) < \frac{1}{2}$.
Puisque $2a < b+c$, a ne peut être la longueur du plus grand côté du triangle ABC. Donc, A est la mesure d'un angle aigu.
Donc $\frac{1}{2}A < 30^\circ$, ou $A < 60^\circ$.

10. Soit a, b et c, $(0 < a \leq b \leq c)$ les longueurs de côtés d'un triangle.
Ces longueurs forment un triangle si $c < a+b$, $b < a+c$ et $a < b+c$.
Puisque $0 < a \leq b \leq c$, on a par le fait même $b < a+c$ et $a < b+c$. Il suffira donc de vérifier $c < a+b$.
Au lieu de considérer des triangles et des ensembles de triangles de façon explicite, on considère des triplets (a,b,c) et des ensembles de triplets (a,b,c) avec les conditions qui s'imposent.
Pour chaque entier $k \geq 3$, soit S_k l'ensemble des triplets (a,b,c) d'entiers strictement positifs tels que $0 < a \leq b \leq c$, $c < a+b$ et $a+b+c = k$.
Puisque $c < a+b$ et $a+b+c = k$, alors $c+c < a+b+c = k$, d'où $2c < k$, ou $c < \frac{1}{2}k$.
Puisque $0 < a \leq b \leq c$ et $a+b+c = k$, alors $k = a+b+c \leq c+c+c$, d'où $3c \geq k$, ou $c \geq \frac{1}{3}k$.

(a) On considère $T(10)$, qui représente le nombre de triplets dans l'ensemble S_{10}.
On cherche tous les triplets possibles (a,b,c) d'entiers positifs pour lesquels $0 < a \leq b \leq c$, $c < a+b$ et $a+b+c = 10$.
Il faut que $c < \frac{10}{2} = 5$ et que $c \geq \frac{10}{3}$. Donc $c = 4$.
Il faut donc que $0 < a \leq b \leq 4$ et $a+b = 6$.
Il y a deux possibilités, soit $(a,b,c) = (2,4,4)$ et $(a,b,c) = (3,3,4)$.
Donc $T(10) = 2$.

On considère $T(11)$. On cherche tous les triplets possibles (a,b,c) d'entiers positifs pour lesquels $0 < a \leq b \leq c$, $c < a+b$ et $a+b+c = 11$.
Il faut que $c < \frac{11}{2}$ et que $c \geq \frac{11}{3}$. Donc $c = 4$ ou $c = 5$.
Si $c = 4$, il faut que $0 < a \leq b \leq 4$ et que $a+b = 7$.
Il n'y a qu'une possibilité, soit $(a,b,c) = (3,4,4)$.
Si $c = 5$, il faut que $0 < a \leq b \leq 5$ et que $a+b = 6$.
Il y a trois possibilités, soit $(a,b,c) = (1,5,5)$, $(a,b,c) = (2,4,5)$ et $(a,b,c) = (3,3,5)$.
Donc $T(11) = 4$.

On considère $T(12)$. On cherche tous les triplets possibles (a,b,c) d'entiers positifs pour lesquels $0 < a \leq b \leq c$, $c < a+b$ et $a+b+c = 12$.
Il faut que $c < \frac{12}{2}$ et que $c \geq \frac{12}{3}$. Donc $c = 4$ ou $c = 5$.
Si $c = 4$, il faut que $0 < a \leq b \leq 4$ et que $a+b = 8$.
Il y a une seule possibilité, soit $(a,b,c) = (4,4,4)$.
Si $c = 5$, il faut que $0 < a \leq b \leq 5$ et que $a+b = 7$.

Il y a deux possibilités, soit $(a, b, c) = (2, 5, 5)$ et $(a, b, c) = (3, 4, 5)$.
Donc $T(12) = 3$.

(b) On démontre que $T(2m) = T(2m - 3)$ en créant une correspondance biunivoque entre les triplets de S_{2m} et les triplets de S_{2m-3}.
On rappelle que S_{2m} est l'ensemble de triplets (a, b, c) d'entiers strictement positifs tels que $0 < a \leq b \leq c$, $c < a + b$ et $a + b + c = 2m$.
De même, S_{2m-3} est l'ensemble de triplets (A, B, C) d'entiers strictement positifs tels que $0 < A \leq B \leq C$, $C < A + B$ et $A + B + C = 2m - 3$.

On considère un triplet (a, b, c) dans S_{2m} et un triplet correspondant $(a - 1, b - 1, c - 1)$.
On démontrera que $(a - 1, b - 1, c - 1)$ est dans l'ensemble S_{2m-3} :
- Puisque (a, b, c) est dans S_{2m}, alors $c < \frac{1}{2}(2m)$, ou $c < m$. Donc $b \leq c \leq m - 1$, d'où $a = 2m - b - c \geq 2$. Donc $a - 1$, $b - 1$ et $c - 1$ sont des entiers strictement positifs puisque a, b et c sont des entiers positifs et que $2 \leq a \leq b \leq c$.
- Puisque $2 \leq a \leq b \leq c$, alors $1 \leq a - 1 \leq b - 1 \leq c - 1$. Donc $0 < a - 1 \leq b - 1 \leq c - 1$.
- Puisque $a + b + c = 2m$, alors $c = 2m - (a + b)$. Donc, $a + b$ et c ont la même parité. Puisque $c < a+b$, alors $c \leq a+b-2$. (En d'autres mots, il est impossible que $c = a+b-1$.) Donc $c - 1 \leq (a - 1) + (b - 1) - 1$, c'est-à-dire que $c - 1 < (a - 1) + (b - 1)$.
- Puisque $a + b + c = 2m$, alors $(a - 1) + (b - 1) + (c - 1) = 2m - 3$.

Donc, $(a - 1, b - 1, c - 1)$ est dans S_{2m-3}, puisqu'il satisfait aux conditions de S_{2m-3}.
On remarque aussi que deux triplets distincts de S_{2m} correspondent à deux triplets distincts de S_{2m-3}. Donc, chaque triplet de S_{2m} correspond à un triplet distinct de S_{2m-3}.
Donc $T(2m) \leq T(2m - 3)$.

On considère un triplet (A, B, C) de S_{2m-3} et un triplet correspondant $(A+1, B+1, C+1)$.
On démontrera que $(A + 1, B + 1, C + 1)$ est dans l'ensemble S_{2m} :
- Puisque (A, B, C) est dans S_{2m-3}, alors A, B et C sont des entiers strictement positifs. Donc $A + 1$, $B + 1$ et $C + 1$ sont des entiers strictement positifs.
- Puisque $0 < A \leq B \leq C$, alors $1 < A + 1 \leq B + 1 \leq C + 1$. Donc $0 < A + 1 \leq B + 1 \leq C + 1$.
- Puisque $C < A + B$, alors $C + 1 < (A + 1) + (B + 1) - 1$. Donc $C + 1 < (A + 1) + (B + 1)$.
- Puisque $A + B + C = 2m - 3$, alors $(A + 1) + (B + 1) + (C + 1) = 2m$.

Donc $(A + 1, B + 1, C + 1)$ est dans S_{2m}.
On remarque aussi que deux triplets distincts de S_{2m-3} correspondent à deux triplets distincts de S_{2m}. Donc, chaque triplet de S_{2m-3} correspond à un triplet distinct de S_{2m}.
Donc $T(2m - 3) \leq T(2m)$.

Puisque $T(2m) \leq T(2m - 3)$ et $T(2m - 3) \leq T(2m)$, alors $T(2m) = T(2m - 3)$.

(c) On fait appel à deux propriétés importantes :
(P1) $T(2m) = T(2m - 3)$ pour tout entier m pour lequel $m \geq 3$
(P2) $T(k) \leq T(k + 2)$ pour tout entier k pour lequel $k \geq 3$
La propriété (P1) a été démontrée dans la partie (b).
On démontre (P2) :

On considère un triplet (a, b, c) dans S_k et un triplet correspondant $(a, b+1, c+1)$.
On démontre que le triplet $(a, b + 1, c + 1)$ est dans S_{k+2} :
- Puisque a, b et c sont des entiers strictement positifs, alors a, $b + 1$ et $c + 1$ le sont aussi.
- Puisque $0 < a \leq b \leq c$, alors $0 < a \leq b + 1 \leq c + 1$.
- Puisque $c < a + b$, alors $c + 1 < a + (b + 1)$.
- Puisque $a + b + c = k$, alors $a + (b + 1) + (c + 1) = k + 2$.

Donc, $(a, b+1, c+1)$ est dans l'ensemble S_{k+2}. On remarque que selon cette correspondance, des triplets distincts dans S_k correspondent à des triplets distincts dans S_{k+2}. Donc $T(k) \leq T(k+2)$.

Soit N le plus petit entiers positif n pour lequel $T(n) > 2010$.
N doit être impair :

En effet, si N était pair, alors selon (P1), on aurait $T(N-3) = T(N) > 2010$ et le nombre $n = N - 3$ serait un entier positif plus petit que N pour lequel $T(n) > 2010$. Ceci contredirait la définition de N comme étant le plus petit entier positif n pour lequel $T(n) > 2010$.

On cherche donc le plus petit entier impair positif N pour lequel $T(N) > 2010$.
On remarque que si on découvre une valeur de n pour laquelle $T(n) > 2010 \geq T(n-2)$, on aura alors déterminé la valeur de n que l'on cherche :

En effet, puisque n et $n-2$ sont impairs et puisque, selon la propriété (P2), tout entier positif impair k donnera $T(k) \leq T(n-2) \leq 2010$ et tout entier positif supérieur m donnera $T(m) \geq T(n) > 2010$.

On montre que la valeur de N est 309 en montrant que $T(309) > 2010$ et $T(307) \leq 2010$. (Ce choix de $N = 309$ est expliqué plus loin.)

Calcul de $T(309)$
On sait que $\frac{309}{3} \leq c < \frac{309}{2}$, d'où $103 \leq c \leq 154$.
Pour chaque valeur admissible de c, on doit compter le nombre de couples (a, b) d'entiers strictement positifs pour lesquels $a \leq b \leq c$ et $a + b = 309 - c$.
Par exemple si $c = 154$, il faut que $a \leq b \leq 154$ et que $a + b = 155$.
On obtient ainsi les couples $(1, 154), (2, 153), \ldots, (76, 79), (77, 78)$. Il y en a 77.
De même, si $c = 153$, il faut que $a \leq b \leq 153$ et que $a + b = 156$.
On obtient ainsi les couples $(3, 153), \ldots, (77, 79), (78, 78)$. Il y en a 76.
De façon générale, si c est pair, alors la valeur minimale possible de a se produit lorsque b est aussi grand que possible, c'est-à-dire lorsque $b = c$. Donc $a \geq 309 - 2c$.
De plus, la plus grande valeur possible de a se produit lorsque a et b sont aussi près l'une de l'autre que possible. Puisque c est pair, alors $309-c$ est impair. Donc, a et b ne peuvent être égaux, mais ils peuvent différer de 1. Dans ce cas, $a = 154 - \frac{1}{2}c$ et $b = 155 - \frac{1}{2}c$.
Donc si c est pair, le nombre de couples (a, b) possibles est égal à $(154-\frac{1}{2}c)-(309-2c)+1$, ou $\frac{3}{2}c - 154$. Le nombre de triplets possibles est donc égal à $\frac{3}{2}c - 154$.
De façon générale, si c est impair, alors la valeur minimale possible de a se produit lorsque b est aussi grand que possible, c'est-à-dire lorsque $b = c$. Donc $a \geq 309 - 2c$.
De plus, la plus grande valeur possible de a se produit lorsque a et b sont aussi près l'une de l'autre que possible. Puisque c est impair, alors $309 - c$ est pair. Donc a et b peuvent être égaux. Dans ce cas, $a = \frac{1}{2}(309 - c)$.
Donc si c est impair, le nombre de couples (a, b) possibles est égal à $\frac{1}{2}(309-c)-(309-2c)+1$, ou $\frac{3}{2}c - \frac{307}{2}$. Le nombre de triplets possibles est donc égal à $\frac{3}{2}c - \frac{307}{2}$.
Les valeurs paires possibles de c sont $104, 106, \ldots, 152, 154$ (il y en a 26) et les valeurs impaires possibles de c sont $103, 105, \ldots, 151, 153$ (il y en a 26).

Donc :

$$\begin{aligned}
T(309) &= \left(\tfrac{3}{2}(104)-154\right)+\left(\tfrac{3}{2}(106)-154\right)+\cdots+\left(\tfrac{3}{2}(154)-154\right)+\\
&\qquad \left(\tfrac{3}{2}(103)-\tfrac{307}{2}\right)+\left(\tfrac{3}{2}(105)-\tfrac{307}{2}\right)+\cdots+\left(\tfrac{3}{2}(153)-\tfrac{307}{2}\right)\\
&= \tfrac{3}{2}(104+106+\cdots+154)-26\cdot 154+\tfrac{3}{2}(103+105+\cdots+153)-26\cdot\tfrac{307}{2}\\
&= \tfrac{3}{2}(103+104+105+106+\cdots+153+154)-26\cdot 154-26\cdot\tfrac{307}{2}\\
&= \tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{1}{2}(103+154)(52)-26\cdot 154-26\cdot\tfrac{307}{2}\\
&= \tfrac{3}{2}(26)(257)-26\cdot 154-26\cdot\tfrac{307}{2}\\
&= 2028
\end{aligned}$$

Donc $T(309) > 2010$.

Calcul de $T(307)$

On sait que $\frac{307}{3} \le c < \frac{307}{2}$, d'où $103 \le c \le 153$.

Pour chaque valeur admissible de c, on doit compter le nombre de couples (a, b) d'entiers strictement positifs pour lesquels $a \le b \le c$ et $a + b = 307 - c$.

On utilise une méthode semblable à celle utilisée ci-haut pour $T(309)$.

Si n est pair, il y a $\frac{3}{2}c - 153$ triplets possibles.

Si n est impair, il y a $\frac{3}{2}c - \frac{305}{2}$ triplets possibles.

Les valeurs paires possibles de c sont $104, 106, \ldots, 150, 152$ (il y en a 25) et les valeurs impaires possibles de c sont $103, 105, \ldots, 151, 153$ (il y en a 26).

Donc :

$$\begin{aligned}
T(307) &= \left(\tfrac{3}{2}(104)-153\right)+\left(\tfrac{3}{2}(106)-153\right)+\cdots+\left(\tfrac{3}{2}(152)-153\right)+\\
&\qquad \left(\tfrac{3}{2}(103)-\tfrac{305}{2}\right)+\left(\tfrac{3}{2}(105)-\tfrac{305}{2}\right)+\cdots+\left(\tfrac{3}{2}(153)-\tfrac{305}{2}\right)\\
&= \tfrac{3}{2}(104+106+\cdots+152)-25\cdot 153+\tfrac{3}{2}(103+105+\cdots+153)-26\cdot\tfrac{305}{2}\\
&= \tfrac{3}{2}(103+104+105+106+\cdots+152+153)-25\cdot 153-26\cdot\tfrac{305}{2}\\
&= \tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{1}{2}(103+153)(51)-25\cdot 153-26\cdot\tfrac{305}{2}\\
&= \tfrac{3}{2}(51)(128)-25\cdot 153-26\cdot\tfrac{305}{2}\\
&= 2002
\end{aligned}$$

Donc $T(307) < 2010$.

Donc, le plus petit entier positif n pour lequel $T(n) > 2010$ est $n = 309$.

Pour compléter, on explique comment on pouvait deviner que la réponse était située près de $N = 309$.

On considère les valeurs de $T(n)$ pour des valeurs impaires positives de n.

Dans la section (a), on a considéré les valeurs possibles de c de la plus petite (environ $\frac{1}{3}n$) à la plus grande (environ $\frac{1}{2}n$) et on a constaté que $T(11) = 1 + 3$, ou $T(11) = 4$.

Si on calcule la valeur de $T(n)$ pour quelques autres valeurs impaires de n, on obtient :

$$\begin{aligned}
T(13) &= 2+3=5\\
T(15) &= 1+2+4=7\\
T(17) &= 1+3+4=8\\
T(19) &= 2+3+5=10\\
T(21) &= 1+2+4+5=12\\
T(23) &= 1+3+4+6=14
\end{aligned}$$

Il semble s'y dégager une régularité : Si n est impair, $T(n)$ est à peu près égal à la somme des entiers de 1 à $\frac{1}{4}n$, avec un entier sur trois d'enlevé.
Donc, $T(n)$ est à peu près égal à $\frac{2}{3}$ de la somme des entiers de 1 à $\frac{1}{4}n$.
Donc $T(n) \approx \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\frac{1}{4}n)(\frac{1}{4}n+1)$, d'où $T(n) \approx \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\frac{1}{4}n)^2$, ou $T(n) \approx \frac{1}{48}n^2$.
Il est logique de chercher une valeur de n pour laquelle $T(n) \approx 2010$.
On cherche donc une valeur de n pour laquelle $\frac{1}{48}n^2 \approx 2010$, ou $n^2 \approx 96480$, ou $n \approx 310$.
Puisque n est impair, il est logique de considérer $n = 309$ et $n = 311$, comme dans la solution ci-haut.