Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Euclide

le mercredi 7 avril 2010

Durée : 2 heures et demie

L'utilisation de la calculatrice est permise, pourvu que celle-ci ne soit ni programmable, ni munie d'affichage graphique.

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal. Le concours est composé de 10 questions de 10 points chacune. Chaque question peut avoir des parties à réponse courte et des parties à développement. Une partie à **RÉPONSE COURTE** vaut 3 points. Les parties **À DÉVELOPPEMENT** valent le reste des 10 points attribués à la question.

Directives pour les questions à RÉPONSES COURTES

1. Les parties à **RÉPONSES COURTES** sont indiquées comme ceci : .
2. **Écrire la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse.** Le maximum des points est attribué pour une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. Une partie des points sera attribuée **pour du travail pertinent** inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse.

Directives pour les questions À DÉVELOPPEMENT

1. Les questions **À DÉVELOPPEMENT** sont indiquées comme ceci : .
2. **Les solutions complètes doivent être écrites aux endroits appropriés du cahier-réponse.** Le brouillon doit être fait ailleurs. Si le cahier est rempli, le surveillant ou la surveillante distribuera des feuilles lignées. Insérer ces feuilles dans le cahier-réponse. Inscrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille insérée.
3. Des points sont attribués pour les solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

Remarque : À la fin du concours, insérer la feuille de renseignements à l'intérieur du cahier-réponse.

Le nom de quelques-uns des candidats ayant obtenu les meilleurs résultats sera publié dans les Résultats du concours Euclide sur notre site web à http://www.cemc.uwaterloo.ca.

REMARQUES

1. Bien lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Écrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de « », le maximum des points est accordé à une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. **Si une réponse est incorrecte, une partie des points peut être accordée pour du travail pertinent** inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse. On encourage fortement les candidates et les candidats à montrer leur travail.
4. Sauf indication contraire, les réponses et les calculs devraient être exprimés au moyen de valeurs exactes, telles que 4π, $2 + \sqrt{7}$, plutôt que 12,566 ... ou 4,646 ...

Remarque au sujet de l'encodage par bulles

Prière de s'assurer d'avoir bien encodé son nom, sa date de naissance, son année scolaire et son sexe sur la feuille de renseignements et d'avoir répondu à la question portant sur son admissibilité.

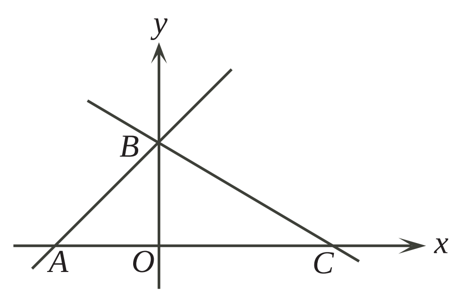
Remarque au sujet de la rédaction des solutions

Lorsqu'un problème est accompagné de « », une solution complète est exigée. Une solution devrait être bien organisée et contenir une dose appropriée d'énoncés mathématiques et de mots d'explications et de justification. Avant de rédiger une solution finale, il est bon de rédiger les grandes lignes et certains détails au brouillon. La solution finale devrait permettre à la correctrice ou au correcteur de comprendre l'approche choisie ainsi que toutes les étapes mathématiques suivies.

1. (a) Si $3^x = 27$, quelle est la valeur de 3^{x+2} ?

   (b) Si $2^5 3^{13} 5^9 x = 2^7 3^{14} 5^9$, quelle est la valeur de x ?

   (c) Le triangle ABC est formé par l'axe des abscisses et par les droites d'équations $y = x + 2$ et $y = -\frac{1}{2}x + 2$. Déterminer l'aire du triangle ABC.

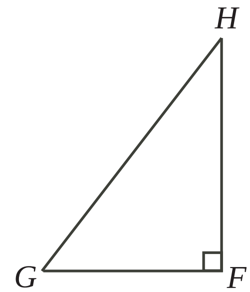


2. (a) Marie a un colis rouge, un colis vert et un colis bleu.
   Les trois colis ont une masse totale de 60 kg.
   Le colis rouge et le colis vert ont une masse totale de 25 kg.
   Le colis vert et le colis bleu ont une masse totale de 50 kg.
   Quelle est la masse du colis vert, en kg ?

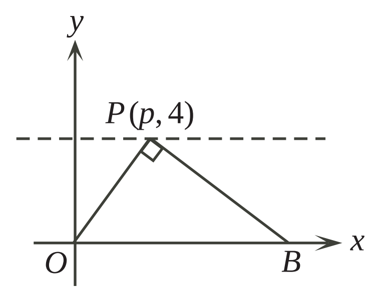
   (b) Un *palindrome* est un entier strictement positif qui peut être lu de gauche à droite ou de droite à gauche. Par exemple, 151 est un palindrome. Quel est le plus grand palindrome inférieur à 200 qui est la somme de trois entiers consécutifs ?

   (c) Sachant que $(x+1)(x-1) = 8$, déterminer la valeur numérique de $(x^2+x)(x^2-x)$.

3. (a) Une abeille quitte sa ruche, H, et vole vers le sud pendant une heure jusqu'au champ F. Elle passe 30 minutes dans le champ, puis vole vers l'ouest pendant 45 minutes jusqu'au jardin G. Elle passe 1 heure dans le jardin, puis elle retourne à la ruche en suivant une ligne droite. La vitesse de vol de l'abeille est constante. Pendant combien de minutes l'abeille s'est-elle absentée de la ruche ?



(b) On considère les points $P(p, 4)$, $B(10, 0)$ et $O(0, 0)$ dans la figure ci-contre. Sachant que le triangle OPB est rectangle en P, déterminer toutes les valeurs possibles de p.



4. (a) Tanya a acheté des jouets, soit des chèvres en peluche et des hélicoptères. Les jouets ont coûté un total de 201 \$. Chaque jouet était complet, c'est-à-dire qu'elle n'a pas acheté des parties de jouets. Chaque chèvre a coûté 19 \$ et chaque hélicoptère a coûté 17 \$. Combien Tanya a-t-elle acheté de jouets de chaque sorte ?

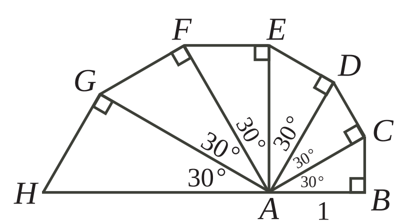
(b) Déterminer toutes les valeurs réelles de x pour lesquelles $(x + 8)^4 = (2x + 16)^2$.

5. (a) Soit $f(x) = 2x + 1$ et $g(f(x)) = 4x^2 + 1$. Déterminer une expression pour $g(x)$.

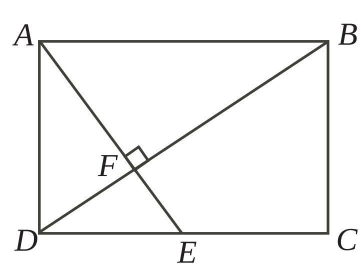
(b) On considère une suite géométrique de 20 termes.
Les deux premiers termes ont une somme de 40.
Les trois premiers termes ont une somme de 76.
Les quatre premiers termes ont une somme de 130.
Déterminer combien des termes de la suite sont des entiers.

(Une *suite géométrique* est une suite numérique dans laquelle chaque terme, après le premier, est obtenu en multipliant le terme précédent par une constante appelée *raison*. Par exemple, 3, 6, 12 est une suite géométrique de trois termes dont la raison est égale à 2.)

6. (a) La coquille d'un escargot est formée de six sections triangulaires, comme dans la figure ci-contre. Chaque triangle a des angles intérieurs de 30°, 60° et 90°. Sachant que AB a une longueur de 1 cm, quelle est la longueur de AH, en cm ?



(b) Dans le rectangle $ABCD$, le point E est situé sur le côté DC. Les segments AE et BD sont perpendiculaires et se coupent en F. Sachant que $AF = 4$ et $DF = 2$, déterminer l'aire du quadrilatère $BCEF$.

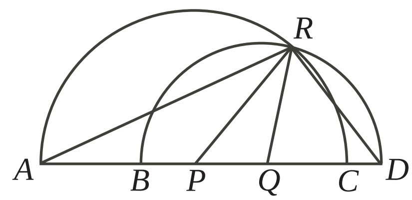


7\. (a) Déterminer toutes les valeurs réelles de x pour lesquelles $3^{(x-1)}9^{\frac{3}{2x^2}} = 27$.

(b) Déterminer tous les points d'intersection (x, y) des courbes définies par $y = \log_{10}(x^4)$ et $y = (\log_{10} x)^3$.

8\. (a) Oumar lance trois pièces de monnaie justes et enlève les pièces qui tombent face. Ensuite, Georges lance les pièces qui restent, s'il y en a. Déterminer la probabilité pour que Georges obtienne exactement une face.

(b) Dans la figure ci-contre, les points B, P, Q et C sont situés sur un segment de droite AD. Le demi-cercle de diamètre AC a pour centre P et le demi-cercle de diamètre BD a pour centre Q. Les deux demi-cercles se coupent en R. Sachant que $\angle PRQ = 40°$, déterminer la mesure de l'angle ARD.



9\. (a) (i) Soit θ un angle dont la mesure n'est pas un multiple entier de 90°. Démontrer que :

$$\cot\theta - \cot 2\theta = \frac{1}{\sin 2\theta}$$

(ii) Rémi considère un angle de 8° et il le double 10 fois pour obtenir un angle de 8192°. Ensuite, il additionne l'inverse du sinus de ces 11 angles. Il calcule donc :

$$S = \frac{1}{\sin 8°} + \frac{1}{\sin 16°} + \frac{1}{\sin 32°} + \cdots + \frac{1}{\sin 4096°} + \frac{1}{\sin 8192°}$$

Sans utiliser une calculatrice, déterminer la mesure de l'angle aigu α pour laquelle $S = \dfrac{1}{\sin\alpha}$.

(b) Dans le triangle ABC, on a $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ et $a < \frac{1}{2}(b + c)$. Démontrer que $\angle BAC < \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB)$.

10\. Pour chaque entier strictement positif n, soit $T(n)$ le nombre de triangles qui existent dont les longueurs de côtés sont des entiers, dont l'aire est positive et dont le périmètre est égal à n. Par exemple $T(6) = 1$, puisque le seul tel triangle qui a un périmètre de 6 a des côtés de longueurs 2, 2 et 2.

(a) Déterminer les valeurs de $T(10)$, $T(11)$ et $T(12)$.

(b) Soit m un entier positif ($m \geq 3$). Démontrer que $T(2m) = T(2m - 3)$.

(c) Déterminer le plus petit entier positif n pour lequel $T(n) > 2010$.

Le CENTRE d'ÉDUCATION en MATHÉMATIQUES et en INFORMATIQUE

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Euclide de 2010!
En 2009, plus de 16 000 élèves à travers le monde se sont inscrits au concours Euclide.

Allez voir sur Facebook le groupe du CEMI « Who is The Mathiest? ».

Si vous terminez l'école secondaire, nous vous souhaitons bonne chance.
Si vous retournez à l'école secondaire l'an prochain, encouragez votre enseignant à vous inscrire au Défi ouvert canadien de mathématiques Financière Sun Life qui aura lieu fin novembre.

Visitez notre site Web au www.cemc.uwaterloo.ca pour
- **plus d'information à propos du Défi ouvert canadien de mathématiques Financière Sun Life**
- **des copies gratuites des concours précédents**
- **des ateliers pour vous aider à vous préparer pour les prochains concours**
- **de l'information au sujet de nos publications qui visent l'enrichissement en mathématiques et la préparation aux concours**

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web au www.cemc.uwaterloo.ca pour
- **obtenir des renseignements concernant les concours de 2010/2011**
- **vous renseigner sur des ateliers et des ressources disponibles pour les enseignants**
- **trouver les résultats de votre école**