Concours canadien de mathématiques
Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique
Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Cayley 2010

(10e année – Secondaire IV)

le jeudi 25 février 2010

Solutions

1. On a $6 + 4 \div 2 = 6 + 2 = 8$.

RÉPONSE : (D)

2. Lorsque l'aiguille fait un tour complet, elle balaie un angle de 360°. Puisque les 12 numéros sur le cadran sont également espacés, l'angle balayé par l'aiguille entre deux numéros consécutifs est de 30° (car $360^\circ \div 12 = 30^\circ$).
Pour balayer un angle de 120°, l'aiguille doit donc se déplacer de 4 numéros dans le sens des aiguilles d'une montre (car $120^\circ \div 30^\circ = 4$).
L'aiguille indiquera donc le 4.

RÉPONSE : (C)

3. Puisque $x + \sqrt{25} = \sqrt{36}$, alors $x + 5 = 6$, d'où $x = 1$.

RÉPONSE : (A)

4. On a $\dfrac{1}{2+\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{\frac{8}{3}} = \dfrac{3}{8}$.

RÉPONSE : (E)

5. Puisque l'aire d'un rectangle est égale au produit de la longueur et de la largeur, alors la largeur est égale à l'aire divisée par la longueur.
Donc, la largeur est égale à $\frac{1}{3} \div \frac{3}{5}$, ou $\frac{1}{3} \times \frac{5}{3}$, ou $\frac{5}{9}$.

RÉPONSE : (B)

6. Les mesures des angles d'un triangle ont une somme de 180°. Donc $3x^\circ + x^\circ + 6x^\circ = 180^\circ$, d'où $10x = 180$, ou $x = 18$.
Le plus grand angle du triangle mesure $6x^\circ$, soit $6(18^\circ)$, ou 108°.

RÉPONSE : (E)

7. *Solution 1*
Puisque les cinq entiers consécutifs ont une moyenne de 9, le nombre du milieu est 9.
Les entiers sont donc 7, 8, 9, 10 et 11. Le plus petit des cinq entiers est 7.

Solution 2
Soit x le plus petit des cinq entiers consécutifs.
Les cinq entiers sont donc x, $x+1$, $x+2$, $x+3$ et $x+4$.
La moyenne des entiers est égale à $\dfrac{x + (x+1) + (x+2) + (x+3) + (x+4)}{5}$, ou $\dfrac{5x+10}{5}$, ou $x + 2$. Puisque la moyenne est égale à 9, alors $x + 2 = 9$, d'où $x = 7$.
Le plus petit des cinq entiers est 7.

RÉPONSE : (D)

8. Puisque le carré $PQRS$ a une aire de 900, ses côtés ont une longueur de 30 (car $\sqrt{900} = 30$).
Donc $PQ = PS = 30$.
Puisque M et N sont les milieux respectifs de PQ et de PS, alors $PN = PM = 15$.
Puisque $PQRS$ est un carré, l'angle P est droit. Le triangle PMN est donc rectangle.
L'aire du triangle PMN est égale à $\frac{1}{2}(PM)(PN)$, soit $\frac{1}{2}(15)(15)$, ou $\frac{225}{2}$, ou 112,5.

On aurait pu couper le carré en 8 triangles, tous congruents au triangle PMN. (Voyez-vous comment s'y prendre ?) Il s'ensuit que l'aire du triangle PMN est égale à $\frac{1}{8}$ de l'aire du carré, soit $\frac{1}{8}(30^2)$, ou 112,5.

RÉPONSE : (B)

9. *Solution 1*
Puisque deux côtés du triangle sont situés sur les axes, le triangle est rectangle.
Puisque le triangle doit être isocèle, ses deux autres angles doivent mesurer $45°$.
Or, une droite forme un angle de $45°$ avec les deux axes si elle a une pente de 1 ou de -1.
Parmi les équations données, seule $y = -x + 4$ représente une telle droite.

Solution 2
Les sommets d'un triangle formé de la façon décrite dans l'énoncé sont les points d'intersection des droites qui forment les côtés.
Le point d'intersection de l'axe des abscisses et de l'axe des ordonnées est le point $(0, 0)$.
La droite d'équation $y = -x + 4$ coupe l'axe des ordonnées au point $(0, 4)$. Elle coupe l'axe des abscisses au point pour lequel $y = 0$, d'où $0 = -x + 4$, ou $x = 4$. Elle coupe donc l'axe au point $(4, 0)$.
Les sommets du triangle formé par la droite d'équation $y = -x + 4$ sont $(0, 0)$, $(0, 4)$ et $(4, 0)$.
Le triangle est isocèle, puisque ses cathètes ont une même longueur de 4.
Donc, la droite d'équation $y = -x + 4$ forme un triangle isocèle, puisqu'un seul choix de réponse est juste.

Réponse : (C)

10. Puisque le rapport du nombre de garçons au nombre de filles à l'école secondaire Cayley est de 3 : 2, alors $\frac{3}{5}$ des élèves de l'école Cayley sont des garçons (car $\frac{3}{2+3} = \frac{3}{5}$).
Le nombre de garçons à l'école Cayley est donc égal à $\frac{3}{5}(400)$, c'est-à-dire $3(\frac{400}{5})$, ou 240.
Le nombre de filles à l'école Cayley est donc égal à $400 - 240$, ou 160.
Puisque le rapport du nombre de garçons au nombre de filles à l'école secondaire Fermat est de 2 : 3, alors $\frac{2}{5}$ des élèves de l'école Fermat sont des garçons (car $\frac{2}{2+3} = \frac{2}{5}$).
Le nombre de garçons à l'école Fermat est donc égal à $\frac{2}{5}(600)$, c'est-à-dire $2(\frac{600}{5})$, ou 240.
Le nombre de filles à l'école Fermat est donc égal à $600 - 240$, ou 360.
Le nombre total de garçons dans les deux écoles est égal à $240 + 240$, ou 480. Le nombre total de filles dans les deux écoles est égal à $160 + 360$, ou 520.
Le rapport du nombre total de garçons au nombre total de filles est donc égal à 480 : 520, ou 48 : 52, ou 12 : 13.

Réponse : (B)

11. On remarque que x et y ne peuvent pas prendre des valeurs égales, puisque $x + y$ est impair.
On considère les cas où $x > y$.
On écrit les 15 valeurs de x et les valeurs correspondantes de y et de xy :

x	y	xy	x	y	xy	x	y	xy
30	1	30	25	6	150	20	11	220
29	2	58	24	7	168	19	12	228
28	3	84	23	8	184	18	13	234
27	4	108	22	9	198	17	14	238
26	5	130	21	10	210	16	15	240

La plus grande valeur de xy est 240.
On remarque que la plus grande valeur est obtenue lorsque les valeurs de x et de y sont aussi près l'une de l'autre que possible.
Les cas où $x < y$ nous donnent exactement les mêmes résultats. On peut le constater en inversant x et y dans le haut du tableau.

Réponse : (A)

12. *Solution 1*

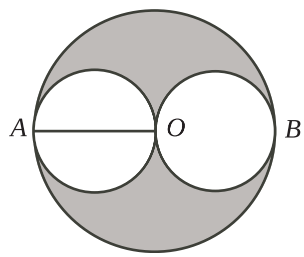
Puisque le prix en solde du MP3 est réduit de 20 %, alors son prix en solde, soit 112 \$, est égal à 80 %, ou $\frac{4}{5}$ du prix régulier.
Donc $\frac{1}{5}$ du prix régulier correspond à 28 \$ (puisque $112\,\$ \div 4 = 28\,\$$).
Donc, le prix régulier est de 140 \$ (puisque $28\,\$ \times 5 = 140\,\$$).
Si le prix régulier avait été réduit de 30 %, le prix en solde serait égal à 70 % du prix régulier, soit $\frac{7}{10}(140\,\$)$, ou 98 \$.

Solution 2

Soit x \$ le prix régulier du MP3.
Puisque le prix en solde du MP3 est réduit de 20 %, alors son prix en solde est égal à 80 % du prix régulier, soit $\frac{80}{100}x$, ou $\frac{8}{10}x$.
Donc $\frac{8}{10}x = 112$.
Si le prix régulier avait été réduit de 30 %, le prix en solde serait égal à 70 % du prix régulier, ou $\frac{7}{10}x$. Or $\frac{7}{10}x = \frac{7}{8}\left(\frac{8}{10}x\right) = \frac{7}{8}(112) = 98$.
Donc, le prix en solde serait de 98 \$.

Réponse : (E)

13. Soit O le centre du grand cercle et A et B les points de contact du grand cercle avec les petits cercles. On trace le rayon OA du grand cercle.



Puisque le petit cercle et le grand cercle se touchent en A, alors le diamètre d'extrémité A du petit cercle est situé sur le diamètre d'extrémité A du grand cercle. (En effet, chaque diamètre est perpendiculaire à la tangente commune au point de contact.)
Puisque AO est un rayon du grand cercle, il est un diamètre du petit cercle. Puisque le grand cercle a un rayon de 6, le petit cercle a un diamètre de 6. Il a donc un rayon de 3.
De la même manière, on peut tracer le rayon OB du grand cercle et conclure que le petit cercle à droite a un rayon de 3.
L'aire de la région ombrée est égale à l'aire du grand cercle moins l'aire des deux petits cercles.
L'aire de la région ombrée est donc égale à $6^2\pi - 3^2\pi - 3^2\pi$, ou $36\pi - 9\pi - 9\pi$, ou 18π.

Réponse : (D)

14. Puisque b est un entier strictement positif, alors $b^2 \geq 1$. Donc $a^2 \leq 49$. Puisque a est un entier strictement positif, alors $1 \leq a \leq 7$.
Si $a = 7$, alors $b^2 = 50 - 7^2$, ou $b^2 = 1$. Donc $b = 1$.
Si $a = 6$, alors $b^2 = 50 - 6^2$, ou $b^2 = 14$. Aucune valeur entière de b ne vérifie cette équation.
Si $a = 5$, alors $b^2 = 50 - 5^2$, ou $b^2 = 25$. Donc $b = 5$.
Si $a = 4$, alors $b^2 = 50 - 4^2$, ou $b^2 = 34$. Aucune valeur entière de b ne vérifie cette équation.
Si $a = 3$, alors $b^2 = 50 - 3^2$, ou $b^2 = 41$. Aucune valeur entière de b ne vérifie cette équation.
Si $a = 2$, alors $b^2 = 50 - 2^2$, ou $b^2 = 46$. Aucune valeur entière de b ne vérifie cette équation.
Si $a = 1$, alors $b^2 = 50 - 1^2$, ou $b^2 = 49$. Donc $b = 7$.
Il y a donc 3 couples (a, b) qui vérifient l'équation, soit $(7, 1), (5, 5)$ et $(1, 7)$.

Réponse : (C)

15. Puisque les pièces de 1 \$, dans le sac, ont une valeur totale de 400 \$, alors il y a 400 pièces de 1 \$ dans le sac.
Puisq'une pièce de 1 \$ a la même masse que 4 pièces de 10 ¢, alors 400 pièces de 1 \$ ont la même masse que 1600 pièces de 10 ¢ (car $4(400) = 1600$).
Donc, le sac qui contient les pièces de 10 ¢ contient 1600 pièces. Les pièces de 10 ¢ dans ce sac ont une valeur totale de 160 \$.

Réponse : (C)

16. La somme des entiers impairs de 5 à 21 est égale à :

$$5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 = 117$$

Donc, la somme des nombres dans n'importe quelle rangée est égale à un tiers de cette somme, soit 39.
La somme des nombres dans n'importe quelle colonne ou n'importe quelle diagonale est aussi égale à 39.
Puisque les nombres de la 2e rangée ont une somme de 39, alors le 2e nombre est égal à 13, car $9 + 13 + 17 = 39$.
Puisque les nombres de la 2e colonne ont une somme de 39, alors le 3e nombre est égal à 21, car $5 + 13 + 21 = 39$.

	5	
9	13	17
x	21	

Puisque les nombres de la 3e rangée ont une somme de 39, alors le 3e nombre est égal à $39-x-21$, ou $18 - x$.
Puisque les nombres de la diagonale qui contient x ont une somme de 39, alors le nombre de la case supérieure droite est égal à $39 - x - 13$, ou $26 - x$.
Puisque les nombres de la 3e colonne ont une somme de 39, alors $(26 - x) + 17 + (18 - x) = 39$, d'où $61 - 2x = 39$, ou $2x = 22$, ou $x = 11$.
Le carré magique au complet est donc :

19	5	15
9	13	17
11	21	7

Réponse : (B)

17. Soit W, X, Y et Z les nombres qui correspondent aux gros points.

Deux de ces nombres sont des multiples de 5. Or, les multiples de 5 diffèrent l'un de l'autre par un multiple de 5. On compare donc les nombres W, X, Y et Z deux à deux au moyen de la soustraction. On a $X - W = 1$, $Y - W = 9$, $Y - X = 8$, $Z - W = 11$, $Z - X = 10$ et $Z - Y = 2$. Seuls X et Z diffèrent l'un de l'autre par un multiple de 5. Donc, X et Z doivent être les deux nombres qui sont des multiples de 5.

Le multiple de 5 qui suit X est 5 de plus que X. Il s'agit donc de D. On voit aussi que Z est 5 de plus que D.
Donc, D est le seul multiple de 5 parmi A, B, C, D, E.
Puisque D est le seul des cinq nombres qui est multiple de 5, alors D doit être le multiple de 15. (On peut démontrer, par un argument semblable, que W et Y sont les multiples de 3 et de là, que D est aussi un multiple de 3.)

RÉPONSE : (D)

18. Puisque le triangle PQR est isocèle, alors $\angle PRQ = \angle PQR = 2x^\circ$.
Puisque les angles PRQ et SRT sont opposés par le sommet, alors $\angle SRT = \angle PRQ = 2x^\circ$.
Puisque le triangle RST est isocèle et que $RS = RT$, alors :

$$\angle RST = \tfrac{1}{2}(180^\circ - \angle SRT) = \tfrac{1}{2}(180^\circ - 2x^\circ) = 90^\circ - x^\circ = (90 - x)^\circ$$

RÉPONSE : (E)

19. Soit ABC un entier positif de trois chiffres.
Le chiffre A peut prendre 9 valeurs différentes (soit les chiffres de 1 à 9), tandis que les chiffres B et C peuvent chacun prendre 10 valeurs différentes (soit les chiffres de 0 à 9).
On veut compter le nombre d'entiers qui ont exactement un chiffre pair. On considère chaque position séparément.
Supposons que A est pair et que B et C sont impairs.
Il y a 4 valeurs possibles de A (soit 2, 4, 6 ou 8) et pour chacune de ces valeurs, il y a 5 valeurs possibles de B et 5 valeurs possibles de C (soit 1, 3, 5, 7 ou 9). Dans ce cas, le nombre d'entiers est égal à $4 \times 5 \times 5$, ou 100.
Supposons que B est pair et que A et C sont impairs.
Il y a 5 valeurs possibles de B (soit 0, 2, 4, 6 et 8) et pour chacune de ces valeurs, il y a 5 valeurs possibles de A et 5 valeurs possibles de C (soit 1, 3, 5, 7 et 9). Dans ce cas, le nombre d'entiers est égal à $5 \times 5 \times 5$, ou 125.
Supposons que C est pair et que A et B sont impairs.
Il y a 5 valeurs possibles de C (soit 0, 2, 4, 6 et 8) et pour chacune de ces valeurs, il y a 5 valeurs possibles de A et 5 valeurs possibles de B (soit 1, 3, 5, 7 et 9). Dans ce cas, le nombre d'entiers est égal à $5 \times 5 \times 5$, ou 125. (Ce cas est semblable au deuxième cas.)
En tout, le nombre d'entiers est égal à $100 + 125 + 125$, ou 350.

RÉPONSE : (A)

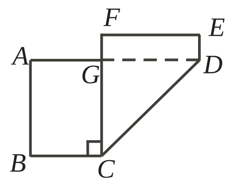
20. *Solution 1*
Il est plus facile de comparer les deux membres de l'inéquation si les expressions ont le même exposant. On remarque que $n^{200} = (n^2)^{100}$ et que $3^{500} = (3^5)^{100}$. L'inéquation devient donc $(n^2)^{100} < (3^5)^{100}$.
Puisque n est un entier strictement positif, alors l'inéquation est équivalente à $n^2 < 3^5$, ou $n^2 < 243$.
Or $15^2 = 225$ et $16^2 = 256$; de plus, si $n \geq 16$, alors $n^2 \geq 256$.
Donc, le plus grand entier positif n qui satisfait à l'inéquation est 15.

Solution 2
Puisque n est un entier positif et que $500 = 200(2{,}5)$, alors $n^{200} < 3^{500}$ est équivalent à $n^{200} < (3^{2,5})^{200}$, ce qui est équivalent à $n < 3^{2,5}$, ou $n < 3^2 3^{0,5}$, ou $n < 9\sqrt{3}$.
Puisque $9\sqrt{3} \approx 15{,}59$ et que n est un entier, alors le plus grand entier positif n qui satisfait à l'inéquation est 15.

RÉPONSE : (C)

21. *Solution 1*

La feuille de papier initiale a une aire de 17(8) cm^2, ou 136 cm^2.



Lorsque la feuille est pliée comme dans la figure, le quadrilatère $CDEF$ qui est visible provient du dessous de la feuille en position initiale.)

Une partie de la feuille en position initiale est maintenant cachée. Elle est congruente au triangle CDG. Donc, l'aire de la nouvelle figure est égale à l'aire de la feuille initiale moins l'aire du triangle CDG.

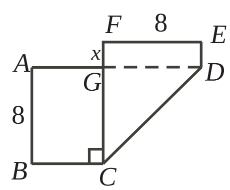
Le triangle CDG a une hauteur GC de 8 cm (c'est-à-dire la largeur du rectangle), il est rectangle (puisque les deux portions du bord inférieur de la feuille initiale forment un angle droit) et $GD = 8$ cm.

Donc, l'aire du triangle CDG est égale à $\frac{1}{2}(8)(8)$ cm^2, ou 32 cm^2.

Donc, l'aire de la nouvelle figure est égale à $(136 - 32)$ cm^2, ou 104 cm^2.

Solution 2

On nomme les sommets de la nouvelle figure comme suit :



On cherche l'aire de la figure $ABCDEFG$.

Soit $FG = x$.

Puisque le quadrilatère $AGCB$ admet trois angles droits (soit en A, en B et en C), il est un rectangle et FC est perpendiculaire à AD.

Puisque le quadrilatère $DEFG$ admet trois angles droits (soit en E, en F et en G), il est un rectangle.

On sait que $FE = AB = 8$, puisque FE et AB sont les hauteurs du rectangle initial.

Puisque $AGCB$ et $DEFG$ sont des rectangles, alors $GC = AB = 8$, d'où $GD = FE = 8$.

On remarque que BC, CG et GF formaient le bord inférieur du rectangle initial.

Donc $BC + CG + GF = 17$, d'où $BC = 17 - 8 - x$, ou $BC = 9 - x$.

L'aire du rectangle $AGCB$ est égale à $8(9 - x)$, ou $72 - 8x$.

L'aire du rectangle $DEFG$ est égale à $8x$.

L'aire du triangle CGD (qui est rectangle en G) est égale à $\frac{1}{2}(8)(8)$, ou 32.

Donc, l'aire de la figure $ABCDEFG$ est égale à $[(72 - 8x) + 8x + 32]$ cm^2, ou 104 cm^2.

Réponse : (A)

22. *Solution 1*

Soit $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2009}, x_{2010}$ les termes de la suite.
Soit S la somme de chaque deuxième terme, en commençant par le premier et en terminant par l'avant dernier. Donc :

$$S = x_1 + x_3 + x_5 + \cdots + x_{2007} + x_{2009}$$

On sait que la somme de tous les termes est égale à 5307, c'est-à-dire que :

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{2009} + x_{2010} = 5307$$

On compare ensuite les termes comme suit : le deuxième au premier, le quatrième au troisième, le sixième au cinquième, et ainsi de suite. Dans chaque cas, le nombre qui suit est 1 de plus que le nombre précédent, c'est-à dire que $x_2 = x_1 + 1$, $x_4 = x_3 + 1$, $x_6 = x_5 + 1$ et ainsi de suite.
Donc, chacun des 1005 termes $x_2, x_4, x_6, \ldots$ est 1 de plus que le terme correspondant de la liste $x_1, x_3, x_5, \ldots$
Donc $x_2 + x_4 + x_6 + \cdots + x_{2010}$ est 1005 de plus que $x_1 + x_3 + x_5 + \cdots + x_{2009}$.
Donc $x_2 + x_4 + x_6 + \cdots + x_{2010} = S + 1005$.
Puisque la somme de tous les termes est égale à la somme de $x_1 + x_3 + x_5 + \cdots + x_{2009}$ plus la somme de $x_2 + x_4 + x_6 + \cdots + x_{2010}$, ou $S + 1005$, elle est égale à $S + (S + 1005)$. Donc $S + (S + 1005) = 5307$, d'où $2S = 4302$, ou $S = 2151$.
Donc, si on additionne chaque deuxième terme, en commençant par le premier et en terminant par l'avant dernier, on obtient une somme de 2151.

Solution 2

Soit x le premier terme.
Puisque chaque terme après le premier est 1 de plus que le terme précédent, la suite est $x, x+1, x+2, \ldots, x+2008, x+2009$.
Puisque la somme des 2010 termes est égale à 5307, alors :

$$\begin{aligned}
x + (x+1) + (x+2) + \cdots + (x+2008) + (x+2009) &= 5307 \\
2010x + (1 + 2 + \cdots + 2008 + 2009) &= 5307 \\
2010x + \tfrac{1}{2}(2009)(2010) &= 5307 \\
2010x &= -2\,013\,738
\end{aligned}$$

Lorsqu'on additionne chaque deuxième terme, en commençant par le premier et en terminant par l'avant-dernier, on obtient :

$$\begin{aligned}
&x + (x+2) + (x+4) + \cdots + (x+2006) + (x+2008) \\
&= 1005x + (2 + 4 + \cdots + 2006 + 2008) \\
&= 1005x + 2(1 + 2 + \cdots + 1003 + 1004) \\
&= 1005x + 2\left(\tfrac{1}{2}(1004)(1005)\right) \\
&= \tfrac{1}{2}(2010x) + (1004)(1005) \\
&= \tfrac{1}{2}(-2013738) + (1004)(1005) \\
&= 2151
\end{aligned}$$

Donc, la somme est égale à 2151.

Réponse : (C)

23. *Solution 1*

Carole donne à Benoît 24 lingots qui forment 45 % de la masse totale. Chacun de ces 24 lingots correspond, en moyenne, à $\frac{45}{24}$ %, ou 1,875 % de la masse totale.
Carole donne à Maya 13 lingots qui forment 26 % de la masse totale. Chacun de ces 13 lingots correspond, en moyenne, à $\frac{26}{13}$ %, ou 2 % de la masse totale.
Puisque chaque lingot qu'elle donne à Benoît (soit les 24 lingots les plus légers) est plus léger que chaque lingot qu'elle donne à Maya (soit les 13 lingots les plus lourds), alors la masse moyenne des lingots qu'elle donne à Blaise doit être supérieure à 1,875 % de la masse totale et inférieure à 2 % de la masse totale.
Or, les lingots que Carole donne à Blaise forment 100 % − 45 % − 26 %, ou 29 % de la masse totale.
Si 14 lingots formaient 29 % de la masse totale, leur masse moyenne serait de $\frac{29}{14}$ %, ou environ 2,07 % de la masse totale, ce qui est trop grand. Il y a donc plus de 14 lingots qui forment 29 % de la masse totale.
Si 15 lingots formaient 29 % de la masse totale, leur masse moyenne serait de $\frac{29}{15}$ %, ou environ 1,93 % de la masse totale, ce qui est situé dans le bon intervalle.
Si 16 lingots formaient 29 % de la masse totale, leur masse moyenne serait de $\frac{29}{16}$ %, ou environ 1,81 % de la masse totale, ce qui est trop petit. Il en est de même s'il y avait 17 ou 18 lingots.
Donc, Blaise reçoit 15 lingots d'or.

Solution 2

On peut supposer que les lingots ont une masse totale de 100.
Donc, les lingots que Benoît a reçus ont une masse totale de 45 et ceux que Maya a reçus ont une masse totale de 26.
Soit n le nombre de lingots que Blaise a reçus.
Ces lingots ont une masse totale de $100 - 45 - 26$, ou 29.
Soit $b_1, b_2, \ldots, b_{24}$ les masses respectives des lingots de Benoît.
On peut supposer que $b_1 < b_2 < \cdots < b_{23} < b_{24}$, puisque les masses sont toutes différentes.
De même, soit $m_1, m_2, \ldots, m_{13}$ les masses respectives des lingots que Maya a reçus, où $m_1 < m_2 < \cdots < m_{12} < m_{13}$ et soit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les masses respectives des lingots que Blaise a reçus, où $x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n$.
On remarque que

$$b_1 < b_2 < \cdots < b_{23} < b_{24} < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n < m_1 < m_2 < \cdots < m_{12} < m_{13}$$

puisque Benoît a reçu les lingots les plus légers et Maya a reçu les lingots les plus lourds. De plus :

$$\begin{aligned} b_1 + b_2 + \cdots + b_{23} + b_{24} &= 45 \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n &= 29 \\ m_1 + m_2 + \cdots + m_{12} + m_{13} &= 26 \end{aligned}$$

Or, le lingot le plus lourd que Benoît a reçu a une masse de b_{24}. Donc :

$$45 = b_1 + b_2 + \cdots + b_{23} + b_{24} < b_{24} + b_{24} + \cdots + b_{24} + b_{24} = 24b_{24}$$

Donc $b_{24} > \frac{45}{24}$, ou $b_{24} > \frac{15}{8}$.
De plus, le lingot le plus léger que Maya a reçu a une masse de m_1. Donc :

$$26 = m_1 + m_2 + \cdots + m_{12} + m_{13} > m_1 + m_1 + \cdots + m_1 + m_1 = 13m_1$$

Donc $m_1 < \frac{26}{13}$, ou $m_1 < 2$.
Or, chacun des n lingots que Blaise a reçus pèse plus de b_{24} et moins de m_1.

Donc $nb_{24} < x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_n < nm_1$, d'où $nb_{24} < 29 < nm_1$.
Donc $\frac{15}{8}n < nb_{24} < 29 < nm_1 < 2n$, d'où $n < 29\left(\frac{8}{15}\right) = \frac{232}{15} = 15\frac{7}{15}$, et $n > \frac{29}{2} = 14\frac{1}{2}$.
Puisque n est un entier, alors $n = 15$. Donc, Blaise reçoit 15 lingots d'or.

Réponse : (B)

24. Puisque le quadrillage 5 sur 5 est formé de carreaux mesurant chacun 10 cm sur 10 cm, le quadrillage au complet mesure 50 cm sur 50 cm.
Puisque le disque a un diamètre de 8 cm, il a un rayon de 4 cm.
On considère où tombe le centre du disque, puisque cela détermine la position du disque.
Puisqu'aucune partie du disque ne tombe à l'extérieur du quadrillage, alors le centre du disque doit tomber à plus de 4 cm (soit 1 rayon) des bords du quadrillage.
Le centre du disque doit donc tomber dans une région qui s'étend de 4 cm du bord gauche à 4 cm du bord droit (soit une largeur de 42 cm, puisque $50 - 4 - 4 = 42$) et de 4 cm du bord supérieur à 4 cm du bord inférieur (soit une hauteur de 42 cm, puisque $50 - 4 - 4 = 42$).
Donc pour que le disque tombe à l'intérieur du quadrillage, le centre du disque doit tomber dans un carré qui mesure 42 cm sur 42 cm. Ce carré a une aire de 1764 cm^2, car $42 \times 42 = 1764$.
On considère un des 25 carreaux. Le disque tombe à l'intérieur du carreau si son centre tombe à plus de 4 cm des bords. La région permise à l'intérieur du carreau a donc une largeur et une hauteur de 2 cm, puisque $10 - 4 - 4 = 2$.
Il y a 25 telles régions, soit une par carreau. L'aire totale des régions dans lesquelles le centre du disque peut tomber en position gagnante est donc égale à $25 \times 2 \times 2$ cm^2, ou 100 cm^2.
La probabilité pour que le disque tombe en position gagnante est égale à l'aire totale des régions gagnantes divisée par l'aire de l'intérieur du quadrillage dans lequel le centre du disque peut tomber. Elle est donc égale à $\frac{100}{1764}$, ou $\frac{25}{441}$.

Réponse : (A)

25. Soit $u(n)$ le chiffre des unités de l'entier positif n (p. ex., $u(25) = 5$). Voici trois remarques importantes :

- On cherche la position finale du jeton et non pas le nombre de fois que le jeton fait le tour. Par exemple, un déplacement de 25 places autour de la figure est équivalent à un déplacement de 5 places, puisque dans les deux cas, le jeton aboutit sur le 5. Puisqu'il faut un déplacement de 10 places pour faire le tour, seul le chiffre des unités du nombre de places est utile (soit $u(n^n)$).
- Pour déterminer la position finale, il faut déterminer la somme des nombres de places dont le jeton a été déplacé dans chacune des 1234 étapes. On veut donc déterminer

$$S = 1^1 + 2^2 + \cdots + 1233^{1233} + 1234^{1234},$$

puisque pour calculer la position après une étape, on ajoute au numéro de la position précédente le nombre de places du déplacement de cette étape. De fait, comme dans la remarque précédente, on s'intéresse au chiffre des unités de la somme des nombres de déplacements $u(S)$, ce qui est égal à :

$$u\Big(u(1^1) + u(2^2) + \cdots + u(1233^{1233}) + u(1234^{1234})\Big)$$

- Pour calculer $u(n^n)$, on se préoccupe du chiffre des unités de n, soit $u(n)$, et non pas des autres chiffres. En d'autres mots, il faut déterminer le chiffre des unités du produit de n termes $u(n) \times u(n) \times \cdots \times u(n)$ (on cherche donc $u\Big((u(n))^n\Big)$). (Comme on le verra plus loin, on ne peut réduire l'exposant n à son chiffre des unités.) Pour effectuer ce calcul, on peut s'en tenir au chiffre des unités à chaque étape, puisque seul le chiffre des unités a un effet sur les chiffres des unités qui suivent.

Par exemple, pour calculer $u(13^{13})$, on peut calculer $u\Big((u(13))^{13}\Big)$, qui est égal à $u(3^{13})$. En d'autres mots, pour déterminer le chiffre des unités de 3^{13}, on multiplie $3 \times 3 \times 3 \times \cdots \times 3$, tout en éliminant, au besoin, tous les chiffres du produit sauf le chiffre des unités. On obtient donc :

$$3, 9, 27 \to 7, 21 \to 1, 3, 9, 27 \to 7, 21 \to 1, 3, 9, 27 \to 7, 21 \to 1, 3$$

Donc $u(13^{13}) = 3$.

On considère maintenant les valeurs possibles de $u(n)$ dans le but de déterminer une régularité dans les chiffres des unités des puissances de n :

- Si $u(n)$ est égal à 0, 1, 5 ou 6, les valeurs respectives de $u(n^k)$ (k étant un entier strictement positif) sont 0, 1, 5 et 6, puisque dans chaque cas, $u(n^2) = u(n)$. Dans chaque cas, le chiffre des unités est invariable.
- Si $u(n) = 4$, le chiffre des unités des puissances de n alterne entre 4 et 6. (On peut le vérifier en multipliant $4 \times 4 \times 4 \times \cdots \times 4$ et en tronquant au besoin, comme dans l'exemple ci-haut.)
- Si $u(n) = 9$, le chiffre des unités des puissances de n alterne entre 9 et 1.
- Si $u(n) = 2$, le chiffre des unités des puissances de n effectue un cycle, soit $2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6$ et ainsi de suite.
- Si $u(n) = 8$, le chiffre des unités des puissances de n effectue un cycle, soit $8, 4, 2, 6, 8, 4, 2, 6$ et ainsi de suite.
- Si $u(n) = 3$, le chiffre des unités des puissances de n effectue un cycle, soit $3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, 1$ et ainsi de suite.
- Si $u(n) = 7$, le chiffre des unités des puissances de n effectue un cycle, soit $7, 9, 3, 1, 7, 9, 3, 1$ et ainsi de suite.

On détermine $u(n^n)$, en se basant sur $u(n)$:

- Si $u(n)$ est égal à 0, 1, 5 ou 6, les valeurs respectives de $u(n^n)$ sont 0, 1, 5 et 6.
- Si $u(n) = 4$, alors $u(n^n) = 6$, puisque l'exposant est pair et le chiffre des unités sera donc celui qui paraît dans les positions paires de la régularité.
- Si $u(n) = 9$, alors $u(n^n) = 9$, puisque l'exposant est impair et le chiffre des unités sera donc celui qui paraît dans les positions impaires de la régularité.
- Si $u(n) = 2$, alors $u(n^n)$ sera égal à 2 ou à 4, selon la valeur de l'exposant n. En effet, l'exposant sera pair, mais puisque la régularité forme un cycle de longueur 4, le chiffre des unités peut être égal à 2 ou à 4. Par exemple, $u(2^2) = 4$ et $u(12^{12}) = 6$ (l'exposant 12 est un multiple de 4, donc le chiffre des unités est celui qui paraît à la fin du cycle).
- Si $u(n) = 8$, alors $u(n^n)$ sera égal à 4 ou à 6, selon la valeur de l'exposant n. En effet, l'exposant sera pair, mais puisque la régularité forme un cycle de longueur 4, le chiffre des unités peut être égal à 4 ou à 6. Par exemple, $u(8^8) = 6$ et $u(18^{18}) = 4$ (on peut le voir en utilisant le même argument que dans le cas précédent).
- De même, $u(3^3) = 7$, $u(13^{13}) = 3$, $u(7^7) = 3$ et $u(17^{17}) = 7$.
- Puisque le chiffre des unités de la base n suit un cycle de longueur 10 et que le chiffre des unités des puissances de n, pour une valeur particulière de n, se répètent à toutes les 1, 2 ou 4 puissances, alors les valeurs de $u(n^n)$ suivent un cycle de longueur 20 (soit le plus petit commun multiple de 10, 1, 2 et 4).

On peut donc déterminer que $u(1) + u(2) + \cdots + u(19) + u(20)$ est égal à :

$$u(1+4+7+6+5+6+3+6+9+0+1+6+3+6+5+6+7+4+9+0) = u(94) = 4$$

Pour calculer le total après 1234 étapes, on remarque qu'après 61 cycles de 20 étapes, on a effectué 1220 étapes.
Après ces 1220 étapes, le chiffre des unités de la somme est égal à $u(61 \cdot 4)$, ou $u(244)$, ou 4.
On ajoute ensuite les chiffres des unités de la somme des 14 étapes suivantes, en commençant au début du cycle. On obtient la position finale qui est égale au chiffre des unités, soit :

$$u(4 + (1+4+7+6+5+6+3+6+9+0+1+6+3+6)) = u(67) = 7$$

Donc, la position finale du jeton est 7.

Réponse : (D)