Concours canadien de mathématiques
Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique
Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Pascal 2009

(9e année – Secondaire III)

le mercredi 18 février 2009

Solutions

1. On a : $2 \times 9 - \sqrt{36} + 1 = 18 - 6 + 1 = 13$

Réponse : (D)

2. Samedi, Deepit a travaillé 6 heures. Dimanche, il a travaillé 4 heures.
Samedi et dimanche, il a travaillé un total de 10 heures ($6 + 4 = 10$).

Réponse : (E)

3. Puisqu'une gomme à mâcher coûte 1 cent, 1000 gommes à mâcher coûtent 1000 cents.
Puisqu'il y a 100 cents dans un dollar, le coût total est de 10,00 \$.

Réponse : (D)

4. Puisque chacune des 18 classes compte 28 élèves, l'école compte 18×28 élèves, ou 504 élèves.
Puisque 496 élèves étaient présents lundi, 8 élèves étaient absents ($504 - 496 = 8$).

Réponse : (A)

5. La somme de la mesure des angles autour de n'importe quel point est égale à 360°.
Donc $5x^\circ + 4x^\circ + x^\circ + 2x^\circ = 360^\circ$, d'où $12x = 360$, ou $x = 30$.

Réponse : (D)

6. Une puissance paire de -1 est égale à 1.
Une puissance impaire de -1 est égale à -1.
Donc $(-1)^5 - (-1)^4 = -1 - 1 = -2$.

Réponse : (A)

7. Puisque PQ est horizontal et que P a une ordonnée de 1, alors Q a une ordonnée de 1.
Puisque QR est vertical et que R a une abscisse de 5, alors Q a une abscisse de 5.
Q a donc pour coordonnées $(5, 1)$.

Réponse : (C)

8. Lorsque $y = 3$, alors $\dfrac{y^3 + y}{y^2 - y} = \dfrac{3^3 + 3}{3^2 - 3} = \dfrac{27 + 3}{9 - 3} = \dfrac{30}{6} = 5$.

Réponse : (D)

9. Puisqu'il y a quatre ♣ dans chacune des deux premières colonnes, il faut donc déplacer au moins un ♣ de chacune de ces colonnes de manière que chaque colonne contienne trois ♣.
Il faut donc déplacer au moins deux ♣ en tout.
Si on déplace le ♣ du coin supérieur gauche au coin inférieur droit

	♣	♣	♣	
♣	♣	♣		♣
♣	♣			
♣	♣		♣	
		♣	♣	♣

et le ♣ de la deuxième rangée, deuxième colonne à la troisième rangée, cinquième colonne,

	♣	♣	♣	
♣		♣		♣
♣	♣			♣
♣	♣		♣	
		♣	♣	♣

on obtient trois ♣ dans chaque rangée et chaque colonne.

Puisqu'il faut déplacer au moins deux ♣ et que l'on peut réussir en déplaçant deux ♣, alors le plus petit nombre de ♣ qu'il faut déplacer est bien 2.
(D'autres combinaisons de deux déplacements sont possibles.)

Réponse : (B)

10. *Solution 1*
Puisque $z = 4$ et $x + y = 7$, alors $x + y + z = (x + y) + z = 7 + 4 = 11$.

Solution 2
Puisque $z = 4$ et $x + z = 8$, alors $x + 4 = 8$, ou $x = 4$.
Puisque $x = 4$ et $x + y = 7$, alors $4 + y = 7$, ou $y = 3$.
Donc $x + y + z = 4 + 3 + 4$, ou $x + y + z = 11$.

Réponse : (C)

11. On écrit les cinq nombres en utilisant cinq décimales, sans arrondir :

$$\begin{aligned} 5{,}07\overline{6} &= 5{,}07666\ldots \\ 5{,}0\overline{76} &= 5{,}07676\ldots \\ 5{,}07 &= 5{,}07000 \\ 5{,}076 &= 5{,}07600 \\ 5{,}\overline{076} &= 5{,}07607\ldots \end{aligned}$$

Les cinq décimales nous permettent de placer les nombres en ordre croissant :

$$5{,}07000, \quad 5{,}07600, \quad 5{,}07607\ldots, \quad 5{,}07666\ldots, \quad 5{,}07676\ldots$$

Le nombre $5{,}\overline{076}$ se trouve au milieu.

Réponse : (E)

12. *Solution 1*
Puisqu'il y a 24 heures dans une journée, Francis passe $\frac{1}{3}$ de 24 heures, soit 8 heures, à dormir.
Il passe aussi $\frac{1}{4}$ de 24 heures, soit 6 heures, à étudier et $\frac{1}{8}$ de 24 heures, soit 3 heures, à manger.
Il lui reste donc $24 - 8 - 6 - 3$ heures, ou 7 heures.

Solution 2
La fraction totale de la journée que Francis passe à dormir, à étudier et à manger est égale à $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$, ou $\frac{8+6+3}{24}$, ou $\frac{17}{24}$.
La fraction de la journée qu'il lui reste est égale à $1 - \frac{17}{24}$, ou $\frac{7}{24}$.
Puisqu'il y a 24 heures dans une journée, il lui reste 7 heures.

Réponse : (D)

13. *Solution 1*
Puisque la somme de la mesure des angles d'un triangle est égale à 180°, alors :

$$\angle QPS = 180^\circ - \angle PQS - \angle PSQ = 180^\circ - 48^\circ - 38^\circ = 94^\circ$$

Donc $\angle RPS = \angle QPS - \angle QPR$, d'où $\angle RPS = 94^\circ - 67^\circ$, ou $\angle RPS = 27^\circ$.

Solution 2
Puisque la somme de la mesure des angles d'un triangle est égale à 180°, alors :

$$\angle QRP = 180^\circ - \angle PQR - \angle QPR = 180^\circ - 48^\circ - 67^\circ = 65^\circ$$

Donc $\angle PRS = 180^\circ - \angle PRQ$, d'où $\angle PRS = 180^\circ - 65^\circ$, ou $\angle PRS = 115^\circ$.
Dans le triangle PRS, on a :

$$\angle RPS = 180^\circ - \angle PRS - \angle PSR = 180^\circ - 115^\circ - 38^\circ = 27^\circ$$

Réponse : (A)

14. Le périmètre de la région ombrée est égal à la somme des longueurs OP et OQ et de la longueur de l'arc PQ.
Les segments OP et OQ ont chacun une longueur de 5.
L'arc PQ correspond à $\frac{3}{4}$ d'un cercle de centre O et de rayon 5, car la partie manquante correspond à un arc dont l'angle au centre mesure 90°, soit $\frac{1}{4}$ du cercle.
La longueur de l'arc PQ est donc égale à $\frac{3}{4}$ de la circonférence du cercle, soit $\frac{3}{4}(2\pi(5))$, ou $\frac{15}{2}\pi$.
Le périmètre est donc égal à $5 + 5 + \frac{15}{2}\pi$, soit environ 33,56. Parmi les choix de réponse, le plus près est 34.

Réponse : (A)

15. On peut procéder par tâtonnements pour obtenir les listes $\{4, 5, 7, 8, 9\}$ et $\{3, 6, 7, 8, 9\}$.
Y en a-t-il d'autres ?

Si le plus grand nombre de la liste était 8, la plus grande somme possible serait égale à $8+7+6+5+4$, ou 30, ce qui est trop petit. Il faut donc inclure le nombre 9 dans la liste. (On ne peut inclure un nombre supérieur à 9, car la liste ne doit contenir que des entiers de un chiffre.)
Donc, la somme des quatre autres nombres doit être égale à $33 - 9$, ou 24.

Si le plus grand des quatre nombres restants était 7, la plus grande somme possible serait égale à $7 + 6 + 5 + 4$, ou 22, ce qui est trop petit. Il faut donc inclure le nombre 8 dans la liste.
Donc, la somme des trois autres nombres doit être égale à $24 - 8$, ou 16.

Si le plus grand des trois autres nombres était 6, la plus grande somme possible serait égale à $6 + 5 + 4$, ou 15, ce qui est trop petit. Il faut donc inclure le nombre 7 dans la liste.
Donc, la somme des deux autres nombres doit être égale à $16 - 7$, ou 9.

Il nous faut donc deux nombres différents, chacun inférieur à 7, qui ont une somme de 9. Les nombres doivent donc être 3 et 6 ou bien 4 et 5.
On obtient donc les deux listes ci-dessus et on a démontré que ce sont les deux seules listes possibles.

Réponse : (B)

16. Le quadrillage $PQTV$ étant formé de 36 carrés-unités, il a une aire de 36.
L'aire du triangle PQR est égale à $\frac{1}{2}(QR)(PQ)$, soit $\frac{1}{2}(3)(4)$, ou 6.
L'aire du triangle STU est égale à $\frac{1}{2}(ST)(UT)$, soit $\frac{1}{2}(4)(3)$, ou 6.
Le rectangle ayant pour base RS a une aire égale à 2×4, ou 8.
L'aire totale de la partie ombrée est égale à $6 + 6 + 8$, ou 20 et l'aire de la partie non ombrée est donc égale à $36 - 20$, ou 16.
Le rapport de l'aire de la partie ombrée à l'aire de la partie non ombrée est égal à $20 : 16$, ou $5 : 4$.

Réponse : (E)

17. On peut supposer que chaque épreuve comportait un total de 100 points.
Puisque la moyenne des cinq épreuves était de 73 %, Nérissa a obtenu un total de 5×73 points,

ou 365 points.
Lorsque le résultat d'une épreuve a été annulé, la moyenne est montée à 76 %. Sur les quatre épreuves restantes, Nérissa a donc obtenu un total de 4×76 points, ou 304 points.
Puisque $365 - 304 = 61$, la note sur l'épreuve dont le résultat a été annulé était de 61 %.

Réponse : (B)

18. *Solution 1*
Du 31 décembre 1988 au 31 décembre 2008, 20 ans se sont écoulés.
Une période de 20 ans équivaut à cinq périodes de 4 ans.
Donc dans cette période, le nombre d'habitants de la ville a doublé cinq fois pour atteindre 3456.
Doubler cinq fois est l'équivalent de multiplier par 2^5, ou 32.
Donc, le 31 décembre 1988, la population de la ville était de $3456 \div 32$, ou 108.

Solution 2
Puisque la population de la ville double à tous les 4 ans lorsqu'on avance dans le temps, elle est coupée de moitié à tous les 4 ans lorsqu'on recule dans le temps.
Le 31 décembre 2008, la population était de 3456.
Le 31 décembre 2004, la population était de $3456 \div 2$, ou 1728.
Le 31 décembre 2000, la population était de $1728 \div 2$, ou 864.
Le 31 décembre 1996, la population était de $864 \div 2$, ou 432.
Le 31 décembre 1992, la population était de $432 \div 2$, ou 216.
Le 31 décembre 1988, la population était de $216 \div 2$, ou 108.

Réponse : (D)

19. Puisque Patrick parcourt 60 km à une vitesse de 80 km/h, le temps qu'il met pour cette partie du trajet est égal à $\dfrac{60 \text{ km}}{80 \text{ km/h}}$, ou $\frac{3}{4}$ h.
Puisque Patrick dispose de 2 heures pour parcourir le trajet au complet, il lui reste $(2 - \frac{3}{4})$ heure, ou $\frac{5}{4}$ heure pour terminer le trajet de $(150 - 60)$ km, ou 90 km.
Il doit donc continuer à une vitesse de $\dfrac{90 \text{ km}}{\frac{5}{4} \text{ h}}$, ou $\frac{360}{5}$ km/h, ou 72 km/h.

Réponse : (C)

20. Puisque les trois entiers sur n'importe quelle ligne droite ont un produit de 3240 et qu'ils incluent 45, les deux autres entiers sur chaque droite doivent donc avoir un produit de $\frac{3240}{45}$, ou 72.
Les paires d'entiers possibles sont 1 et 72, 2 et 36, 3 et 24, 4 et 18, 6 et 12, ainsi que 8 et 9.
Ces paires d'entiers ont pour sommes respectives 73, 38, 27, 22, 18 et 17.
Pour maximiser la somme des huit nombres qui entourent 45, on choisit les paires qui ont les plus grandes sommes. On choisit donc les quatre premières paires.
Donc, la plus grande somme possible des huit nombres qui entourent 45 est égale à $73+38+27+22$, ou 160.

Réponse : (E)

21. Puisque Alice et Bruno jettent chacun un dé, il y a un total de 36 résultats possibles $(6 \times 6 = 36)$. Ces 36 résultats sont équiprobables.
Alice gagne si les valeurs indiquées sur les dés diffèrent de 1. Les résultats possibles qui diffèrent de 1 sont $(1,2)$, $(2,3)$, $(3,4)$, $(4,5)$, $(5,6)$, $(2,1)$, $(3,2)$, $(4,3)$, $(5,4)$ et $(6,5)$.
Il y a donc 10 résultats possibles où Alice gagne.
La probabilité pour qu'Alice gagne est donc égale à $\frac{10}{36}$, ou $\frac{5}{18}$.

Réponse : (C)

22. Les diamètres PQ et RS se coupent au centre du cercle. Soit O ce centre.
L'aire de la région ombrée est égale à la somme de l'aire du triangle POS et de celle du triangle ROQ, plus la somme de l'aire du secteur POR et de celle du secteur SOQ.
Les triangles POS et ROQ sont tous deux rectangles et ils ont chacun des cathètes de longueur 4 (le rayon du cercle).
Chaque triangle a donc une aire égale à $\frac{1}{2}(4)(4)$, ou 8.
Le secteur POR et le secteur SOQ ont chacun une aire égale à $\frac{1}{4}$ de l'aire du cercle, puisque chacun a un angle au centre de 90° (c'est-à-dire que $\angle POR = \angle SOQ = 90°$) et que 90° correspond à un quart de l'angle au centre du cercle au complet.
Chaque secteur a donc une aire égale à $\frac{1}{4}(\pi(4^2))$, ou $\frac{1}{4}(16\pi)$, ou 4π.
L'aire de la région ombrée est donc égale à $2(8) + 2(4\pi)$, ou $16 + 8\pi$.

Réponse : (E)

23. La masse maximale d'une pièce est de $(1 + 0{,}0214) \times 7$ g, ou $1{,}0214 \times 7$ g, ou 7,1498 g.
La masse minimale d'une pièce est de $(1 - 0{,}0214) \times 7$ g, ou $0{,}9786 \times 7$ g, ou 6,8502 g.
Quels sont les nombres possibles de pièces qui peuvent avoir une masse totale de de 1000 g ?
Pour déterminer le plus grand nombre de pièces, il faut que celles-ci soient aussi légères que possible. Si toutes les pièces étaient aussi légères que possible, on aurait $\dfrac{1000}{6{,}8502}$ pièces, soit environ 145,98 pièces. Puisque le nombre de pièces doit être un entier, on peut avoir un maximum de 145 pièces. (Si on avait 146 pièces, leur masse totale serait de $146 \times 6{,}8502$ g, ou 1000,1292 g, ce qui dépasse 1 kg.)
Pour déterminer le plus petit nombre de pièces, il faut que celles-ci soient aussi lourdes que possible. Si toutes les pièces étaient aussi lourdes que possible, on aurait $\dfrac{1000}{7{,}1498}$ pièces, soit environ 139,86 pièces. Puisque le nombre de pièces doit être un entier, on doit avoir au moins 140 pièces. (Si on avait 139 pièces, leur masse totale serait de $139 \times 7{,}1498$ g, ou 993,8222 g, ce qui est inférieur à 1 kg.)
Donc, la différence entre le plus grand nombre et le plus petit nombre de pièces qu'il pourrait avoir est égale à $145 - 140$, ou 5.

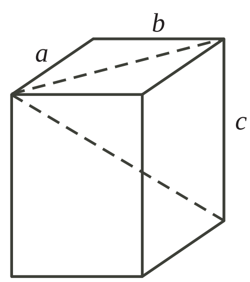
Réponse : (C)

24. On divise le grand cube (ayant des arêtes de longueur 40) en 8 petits cubes ayant des arêtes de longueur 20 en tranchant trois fois, de manière que chaque coupe passe par le centre du grand cube et soit parallèle à deux faces parallèles du grand cube.
Le centre du grand cube est maintenant un sommet de chacun des huit petits cubes.
Chaque petit cube contient une des sphères, c'est-à-dire que chaque sphère touche aux six faces d'un petit cube.
La sphère qui doit être placée au milieu du cube sera appelée *sphère intérieure*. Pour que cette sphère soit aussi grande que possible, il faudra que son centre soit le centre du grand cube. (Autrement, son centre serait à l'extérieur d'un des petits cubes et il serait plus éloigné d'une sphère que des autres).
Pour déterminer le rayon de la sphère intérieure, il faut déterminer la plus petite distance du centre du grand cube (c'est-à-dire du centre de la sphère intérieure) à une des sphères. (On peut imaginer qu'on crée une sphère intérieure au centre du cube et qu'on la gonfle jusqu'à ce qu'elle touche les autres sphères.)

On considère un des petits cubes et la sphère qu'il contient.
On forme un segment en joignant le centre du cube à un de ses sommets.
Puisque ce cube a des arêtes de longueur 20, ce segment a une longueur égale à $\sqrt{10^2 + 10^2 + 10^2}$,

ou $\sqrt{300}$, puisque pour passer du centre au sommet, il faut parcourir 10 sur la largeur, 10 sur la longueur et 10 sur la hauteur. (Voir ci-dessous une explication de la raison pour laquelle la distance est de $\sqrt{300}$.)
La sphère intérieure touchera la grande sphère le long de ce segment.
Le rayon de la sphère intérieure sera donc égal à cette distance ($\sqrt{300}$) moins le rayon de la grande sphère (10). Il sera donc égal à $\sqrt{300} - 10$, ou environ 7,32.
Parmi les choix de réponse donnés, le nombre 7,3 est la meilleure approximation du rayon.

(On doit justifier pourquoi la distance du centre du petit cube à un de ses sommets est égale à $\sqrt{10^2 + 10^2 + 10^2}$.
On divise le petit cube en 8 cubes minuscules ayant des arêtes de longueur 10. La distance du centre du petit cube à un de ses sommets est égale à la longueur d'une diagonale d'un de ces cubes minuscules.
On considère un prisme droit à base rectangulaire ayant des arêtes de longueurs a, b et c. Quelle est la longueur d d'une diagonale du prisme ?
D'après le théorème de Pythagore, une face ayant des côtés de longueurs a et b a une diagonale de longueur $\sqrt{a^2 + b^2}$.
On considère un triangle formé par cette diagonale, la diagonale du prisme et une des arêtes verticales du prisme de longueur c.



Ce triangle est rectangle, puisque l'arête verticale est perpendiculaire à la face supérieure. D'après le théorème de Pythagore, $d^2 = (\sqrt{a^2 + b^2})^2 + c^2$, d'où $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$, ou $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.)

Réponse : (B)

25. Les trois machines fonctionnent de manière que si les deux nombres de la sortie ont un diviseur commun supérieur à 1, alors les deux nombres de l'entrée doivent avoir un diviseur commun supérieur à 1.
Pour le vérifier, on considère chaque machine séparément. On utilise le fait que si deux nombres sont des multiples de d, alors leur somme et leur différence sont aussi des multiples de d.
Supposons que (m, n) est une entrée de la machine A. La sortie est donc (n, m). Si n et m ont un diviseur commun supérieur à 1, alors m et n en ont un aussi.
Supposons que (m, n) est une entrée de la machine B. La sortie est donc $(m + 3n, n)$. Si $m + 3n$ et n ont un diviseur commun d, alors d est un diviseur de $(m + 3n) - n - n - n$, c'est-à-dire de m, puisque chaque terme de la soustraction est un multiple de d. Donc, m et n ont un diviseur commun d.
Supposons que (m, n) est une entrée de la machine C. La sortie est donc $(m - 2n, n)$. Si $m - 2n$ et n ont un diviseur commun d, alors d est un diviseur de $(m - 2n) + n + n$, c'est-à-dire de m, puisque chaque terme de l'addition est un multiple de d. Donc, m et n ont un diviseur commun d.

Dans chaque cas, tout diviseur commun des nombres de l'entrée est un diviseur commun des nombres de la sortie.

On examine les nombres qui paraissent dans les choix de réponse. On écrit les six nombres en factorisation première :

$$\begin{aligned}
2009 &= 7(287) = 7(7)(41)\\
1016 &= 8(127) = 2(2)(2)(127)\\
1004 &= 4(251) = 2(2)(251)\\
1002 &= 2(501) = 2(3)(167)\\
1008 &= 8(126) = 8(3)(42) = 16(3)(3)(7) = 2(2)(2)(2)(3)(3)(7)\\
1032 &= 8(129) = 8(3)(43) = 2(2)(2)(3)(43)
\end{aligned}$$

Parmi les nombres 1002, 1004, 1008, 1016 et 1032, seul le nombre 1008 a un diviseur commun avec 2009, soit 7.
Puisque 2009 et 1008 ont un diviseur commun 7, alors quelle que soit l'entrée qui a produit la sortie $(2009, 1008)$, 7 doit être un diviseur commun des deux nombres de l'entrée. Il en est de même des deux nombres qui servent d'entrée à n'importe quelle étape, peu importe les machines utilisées.
Donc, $(2009, 1008)$ ne peut provenir du couple initial $(0, 1)$.

Remarques

- Cet argument ne nous dit pas que les autres couples peuvent être le résultat du couple initial $(0, 1)$. Il démontre seulement que $(2009, 1008)$ ne peut provenir de ce couple initial.
- Il est possible, avec un certain effort, de partir du couple initial $(0, 1)$ pour obtenir chacun des autres couples. (Le processus est plus facile à suivre qu'à décrire !)
  On remarque d'abord que si la sortie de la machine A est (a, b), alors l'entrée était (b, a), puisque la machine A intervertit l'ordre des nombres du couple.
  De plus, si la sortie de la machine B est (a, b), alors son entrée était $(a - 3b, b)$, puisque la machine B ajoute trois fois le deuxième nombre au premier.
  Enfin si la sortie de la machine C est (a, b), alors son entrée était $(a + 2b, b)$, puisque la machine C soustrait deux fois le deuxième nombre du premier.
  On considère le couple $(2009, 1016)$. On cherche une suite d'opérations qui nous permettent de reculer de $(2009, 1016)$ à $(0, 1)$. On cherche n'importe quelle suite qui fonctionne plutôt qu'une suite particulière.

  Avant de procéder, on remarque que si le couple (m, n) est utilisé comme entrée dans la machine B et que la sortie est utilisée comme entrée dans la machine C, on a pour sortie $((m+3n)-2n, n)$, ou $(m+n, n)$. Donc, si l'utilisation de la machine B suivie de la machine C (on dira « machine BC ») donne une sortie (a, b), l'entrée devait être $(a-b, b)$. On utilisera cette combinaison pour travailler à rebours et en arriver à $(0, 1)$. Cela simplifiera les choses et évitera les nombres négatifs.
  On utilise un tableau et notre stratégie, à chaque étape, est d'obtenir des nombres de plus en plus petits :

Sortie	Machine	Entrée
$(2009, 1016)$	BC	$(993, 1016)$
$(993, 1016)$	A	$(1016, 993)$
$(1016, 993)$	BC	$(23, 993)$
$(23, 993)$	A	$(993, 23)$
$(993, 23)$	BC, 43 fois	$(4, 23)$
$(4, 23)$	A	$(23, 4)$
$(23, 4)$	BC, 5 fois	$(3, 4)$
$(3, 4)$	A	$(4, 3)$
$(4, 3)$	BC	$(1, 3)$
$(1, 3)$	A	$(3, 1)$
$(3, 1)$	B	$(0, 1)$

En procédant à rebours dans ce tableau, on voit comment on peut commencer par le couple $(0, 1)$ pour en arriver au couple $(2009, 1016)$.
De façon semblable, il est possible d'en arriver à chacun des couples $(2009, 1004)$, $(2009, 1002)$ et $(2009, 1032)$.

Réponse : (D)