Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Hypatie 2009

le mercredi 8 avril 2009

Solutions

1. Dans chaque partie du problème, on a besoin du nombre total d'élèves dans la classe. D'après le tableau, le nombre total est égal à $3+2+1+2+4+2+2+3+1$, ou 20.

   (a) Il y a 20 élèves en tout.
   Parmi ces élèves, 2 ont à la fois les yeux verts et les cheveux bruns.
   La fraction des élèves qui ont à la fois les yeux verts et les cheveux bruns est égale à $\frac{2}{20}$, ou $\frac{10}{100}$.
   Donc, 10 % des élèves ont à la fois les yeux verts et les cheveux bruns.

   (b) Il y a 20 élèves en tout.
   Le nombre d'élèves qui ont les yeux verts est égal à $2+4+2$, ou 8.
   Le nombre d'élèves qui ont les cheveux bruns est égal à $3+2+2$, ou 7. Or, 2 élèves ont été comptés deux fois. Donc, le nombre d'élèves qui ont les yeux verts ou les cheveux bruns ou les deux est égal à $8+7-2$, ou 13.
   La fraction des élèves qui ont les yeux verts ou les cheveux bruns ou les deux est égale à $\frac{13}{20}$, ou $\frac{65}{100}$. Donc, 65 % des élèves ont les yeux verts ou les cheveux bruns ou les deux.

   (c) Le nombre d'élèves qui ont les cheveux verts est égal à $2+4+2$, ou 8.
   Parmi ces élèves, 2 ont les cheveux roux.
   La fraction des élèves aux yeux verts qui ont aussi les cheveux roux est égale à $\frac{2}{8}$, ou $\frac{1}{4}$, ou $\frac{25}{100}$. Donc, 25 % des élèves aux yeux verts ont aussi les cheveux roux.

   (d) Au départ, il y a 20 élèves dans la classe. Le nombre d'élèves aux cheveux roux est égal à $1+2+1$, ou 4.
   Soit x le nombre d'élèves aux cheveux roux qu'il faudrait ajouter à la classe. Il y aurait alors $20+x$ élèves dans la classe, dont $4+x$ ont les cheveux roux.
   On veut que $\dfrac{4+x}{20+x}=\dfrac{36}{100}$, ou $\dfrac{4+x}{20+x}=\dfrac{9}{25}$.
   On peut voir par inspection que $x=5$, mais il n'est peut-être pas évident que cette solution est unique. On utilise le produit en croix pour obtenir $25(4+x)=9(20+x)$ qui devient $100+25x=180+9x$, d'où $16x=80$, ou $x=5$.
   Donc, il faudrait ajouter 5 élèves aux cheveux roux.

2. (a) *Solution 1*
   Soit x le terme du milieu et d la raison arithmétique.
   Donc, le premier terme est égal à $x-d$ et le troisième terme est égal à $x+d$.
   Puisque la somme des trois termes est égale à 180, alors $(x-d)+x+(x+d)=180$, d'où $3x=180$, ou $x=60$.
   Donc, le terme du milieu est égal à 60.

   Solution 2
   Soit a le premier terme et d la raison arithmétique.
   Donc, le deuxième terme est égal à $a+d$ et le troisième est égal à $(a+d)+d$, ou $a+2d$.
   On cherche la valeur du terme du milieu, c'est-à-dire la valeur de $a+d$.
   Puisque la somme des trois termes est égale à 180, alors $a+(a+d)+(a+2d)=180$, d'où $3a+3d=180$, ou $3(a+d)=180$, ou $a+d=60$.
   Donc, le terme du milieu est égal à 60.

   (b) *Solution 1*
   On montrera que le terme du milieu (le troisième terme) est égal à 36.
   Soit x le terme du milieu et d la raison arithmétique.
   Donc, le deuxième terme est égal à $x-d$, le premier terme est égal à $x-2d$, le quatrième

terme est égal à $x+d$ et le cinquième terme est égal à $x+2d$.
Puisque la somme des cinq termes est égale à 180, alors :

$$\begin{aligned}(x-2d)+(x-d)+x+(x+d)+(x+2d) &= 180\\ 5x &= 180\\ x &= 36\end{aligned}$$

Donc, le terme du milieu est égal à 36.
(Si $d=0$, tous les termes de la suite égalent 36. Il est donc possible pour plus d'un terme d'égaler 36.)

Solution 2
Soit a le premier terme et d la raison arithmétique.
Donc, le deuxième terme est égal à $a+d$, le troisième terme est égal à $(a+d)+d$, ou $a+2d$, le quatrième terme est égal à $a+3d$ et le cinquième terme est égal à $a+4d$.
On cherche la valeur du terme du milieu, c'est-à-dire la valeur de $a+2d$.
Puisque la somme des cinq termes est égale à 180, alors :

$$\begin{aligned}a+(a+d)+(a+2d)+(a+3d)+(a+4d) &= 180\\ 5a+10d &= 180\\ 5(a+2d) &= 180\\ a+2d &= 36\end{aligned}$$

Donc, le terme du milieu est égal à 36.
(Si $d=0$, tous les termes de la suite égalent 36. Il est donc possible pour plus d'un terme d'égaler 36.)

(c) Soit a le premier terme et d la raison arithmétique.
Donc, le deuxième terme est égal à $a+d$, le troisième terme est égal à $a+2d$, le quatrième terme est égal à $a+3d$, le cinquième terme est égal à $a+4d$ et le sixième terme est égal à $a+5d$.
On cherche la somme du premier terme et du sixième terme, soit la valeur de $a+(a+5d)$, ou $2a+5d$.
Puisque la somme des six termes est égale à 180, alors :

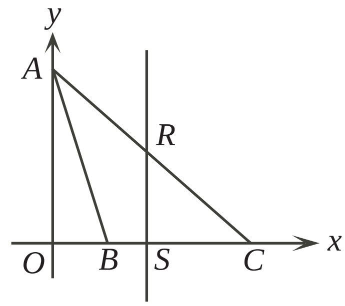
$$\begin{aligned}a+(a+d)+(a+2d)+(a+3d)+(a+4d)+(a+5d) &= 180\\ 6a+15d &= 180\\ 3(2a+5d) &= 180\\ 2a+5d &= 60\end{aligned}$$

Donc, la somme du premier terme et du sixième terme est égale à 60.

3. (a) La droite qui passe au point B et qui coupe le triangle ABC en deux parties de même aire contient une médiane du triangle, c'est-à-dire le segment qui joint B et le milieu M du côté AC.
Cette droite coupe le triangle en deux parties de même aire, parce que les triangles BAM et BCM ont des bases AM et CM de même longueur et que la hauteur du sommet B à ces deux bases est la même pour les deux triangles.
Le milieu M de AC a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}(0+8), \frac{1}{2}(8+0)\right)$, ou $(4,4)$.

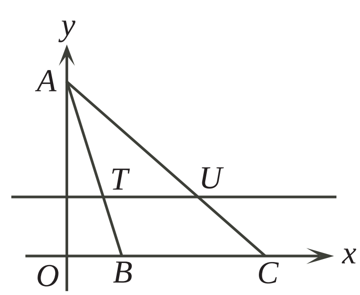
Puisque la droite passe aux points $B(2,0)$ et $M(4,4)$, sa pente est égale à $\dfrac{4-0}{4-2}$, ou 2.
Puisque la droite passe au point $B(2,0)$, son équation est donc $y-0=2(x-2)$, ou $y=2x-4$.

(b) Puisque le segment de droite RS est vertical et que le point S est situé sur le segment horizontal BC, le triangle RSC est rectangle en S.



Or, R est situé sur le segment AC, dont la pente est égale à $\dfrac{0-8}{8-0}$, ou -1.
Donc, AC forme un angle de 45° avec l'axe des abscisses. On a donc $\angle RCS = 45°$.
Le triangle RSC a donc un angle de 90° et un angle de 45°. Son troisième angle mesure donc $180° - 90° - 45°$, ou 45°. Le triangle est donc rectangle et isocèle.
Soit $RS = SC = x$.
Puisque le triangle RSC est rectangle, son aire est égale à $\frac{1}{2}x^2$.
Or, on sait que l'aire du triangle RSC est égale à 12,5. On a donc $\frac{1}{2}x^2 = 12.5$, d'où $x^2 = 25$.
Puisque $x > 0$, alors $x = 5$.
Donc, le point S est situé à 5 unités à la gauche du point C. Ses coordonnées sont donc $(8-5,0)$, ou $(3,0)$.
Le point R est situé à 5 unités au-dessus de S. Ses coordonnées sont donc $(3, 0+5)$, ou $(3,5)$.

(c) *Solution 1*
Puisque le segment BC est horizontal et que la droite qui passe aux points T et U est horizontale, alors BC et TU sont parallèles.
Donc $\angle ATU = \angle ABC$.



Puisque les triangles ATU et ABC ont un angle commun en A et que $\angle ATU = \angle ABC$, les triangles sont semblables.
Donc, le rapport de leur aire est égal au carré du rapport de leur hauteur.
En utilisant BC comme base du triangle ABC, le triangle ABC a une base de 6 et une hauteur de 8. Son aire est donc égale à $\frac{1}{2}(6)(8)$, ou 24.
Soit h la base du triangle ATU par rapport à sa base TU.
Donc $\dfrac{13,5}{24} = \left(\dfrac{h}{8}\right)^2$, ou $\dfrac{h^2}{64} = \dfrac{27}{48}$. Donc $h^2 = \dfrac{64(27)}{48}$, ou $h^2 = 36$.
Puisque $h > 0$, alors $h = 6$.

Donc, le segment TU est situé à 6 unités au-dessous du point $A(0, 8)$. Son équation est donc $y = 8 - 6$, ou $y = 2$.

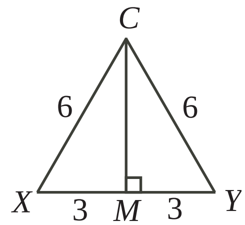
Solution 2
Soit $y = t$ l'équation de la droite horizontale.
On détermine d'abord les coordonnées des points T et U.
Pour le faire, on a besoin de l'équation de la droite qui passe aux points A et B et celle de la droite qui passe aux points A et C.
La droite qui passe aux points $A(0, 8)$ et $B(2, 0)$ a une pente de $\frac{0-8}{2-0}$, ou -4 et une ordonnée à l'origine de 8. Son équation est donc $y = -4x + 8$.
La droite qui passe aux points $A(0, 8)$ et $C(8, 0)$ a une pente de $\frac{0-8}{8-0}$, ou -1 et une ordonnée à l'origine de 8. Son équation est donc $y = -x + 8$.
Le point T est le point qui a une ordonnée de t sur la droite d'équation $y = -4x + 8$.
Ses coordonnnées (x, t) vérifient donc l'équation. Donc $t = -4x + 8$, d'où $4x = 8 - t$, ou $x = \frac{1}{4}(8 - t)$.
Le point U est le point qui a une ordonnée de t sur la droite d'équation $y = -x + 8$.
Ses coordonnnées (x, t) vérifient donc l'équation. Donc $t = -x + 8$, d'où $x = 8 - t$.
Donc, T, U et A ont pour coordonnées respectives $(\frac{1}{4}(8 - t), t)$, $(8 - t, t)$ et $(0, 8)$.
Pour déterminer une expression pour l'aire du triangle ATU, on utilise la base horizontale TU qui a une longueur de $(8 - t) - \frac{1}{4}(8 - t)$, ou $\frac{3}{4}(8 - t)$. La hauteur correspondante est égale à $8 - t$.
L'aire est donc égale à $\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}(8 - t)\right)(8 - t)$, ou $\frac{3}{8}(8 - t)^2$.
Or, on sait qu'elle est égale à 13,5. Donc $\frac{3}{8}(8 - t)^2 = 13,5$ d'où $(8 - t)^2 = \frac{8}{3}(13,5)$, ou $(8 - t)^2 = 36$.
On sait que $t < 8$, puisque le segment TU est au-dessous de A. Donc $8 - t > 0$.
Donc $8 - t = 6$, d'où $t = 2$.
L'équation de la droite horizontale est donc $y = 2$.

4. (a) Le triangle ABC est équilatéral avec des côtés de longueur 12. Puisque X et Y sont les milieux respectifs des côtés CA et CB, alors $CX = CY = \frac{1}{2}(12)$, ou $CX = CY = 6$.
Puisque le prisme a une hauteur de 16 et que Z est le milieu de CD, alors $CZ = \frac{1}{2}(16)$, ou $CZ = 8$.
Puisque les faces $ACDE$ et $BCDF$ sont des rectangles, alors $\angle ACD = \angle BCD = 90°$.
Donc, les triangles XCZ et YCZ sont rectangles en C.
D'après le théorème de Pythagore, $XZ = \sqrt{CX^2 + CZ^2}$, d'où $XZ = \sqrt{6^2 + 8^2}$. Donc, $XZ = \sqrt{100}$, ou $XZ = 10$.
De même, $YZ = 10$.
On considère maintenant le triangle ABC. Puisque X est le milieu du segment AC et que Y est le milieu de BC, la longueur du segment XY est la moitié de celle de la base AB.
Donc $XY = \frac{1}{2}(12)$, ou $XY = 6$.
On a donc $XY = 6$ et $XZ = YZ = 10$.

(b) Pour déterminer l'aire totale du solide $CXYZ$, il faut déterminer l'aire de chacune des 4 faces triangulaires.

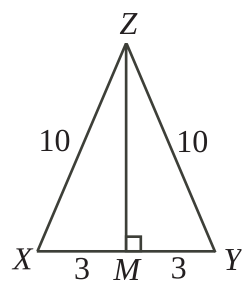
Aire des triangles CZX et CZY
Chacun de ces triangles est rectangle avec des cathètes de longueurs 6 et 8.
Donc, chaque triangle a une aire de $\frac{1}{2}(6)(8)$, ou 24.

<u>Aire du triangle CXY</u>
Puisque $\angle XCY = 60^\circ$ et que les côtés CX et CY sont congrus, le triangle est équilatéral avec des côtés de longueur 6.
On trace la hauteur CM. Puisque le triangle CXY est équilatéral, M est le milieu de XY.



Chacun des triangles CMX et CMY est donc un triangle remarquable 30°-60°-90°, puisque chacun a un angle de 60° et un angle de 90°.
Donc $CM = \frac{\sqrt{3}}{2}(CX)$, d'où $CM = \frac{\sqrt{3}}{2}(6)$, ou $CM = 3\sqrt{3}$.
Puisque $XY = 6$, l'aire du triangle CXY est égale à $\frac{1}{2}(6)(3\sqrt{3})$, ou $9\sqrt{3}$.

<u>Aire du triangle XYZ</u>
On a $XY = 6$ et $XZ = YZ = 10$.
On trace la hauteur ZM.
Puisque le triangle XYZ est isocèle, M est le milieu de XY.



On sait que $XM = MY = \frac{1}{2}(XY)$, ou $XM = MY = 3$.
D'après le théorème de Pythagore, $ZM = \sqrt{ZX^2 - XM^2}$, d'où $ZM = \sqrt{10^2 - 3^2}$, ou $ZM = \sqrt{91}$.
Puisque $XY = 6$, l'aire du triangle XYZ est égale à $\frac{1}{2}(6)(\sqrt{91})$, ou $3\sqrt{91}$.

Donc, l'aire totale du solide $CXYZ$ est égale à $24+24+9\sqrt{3}+3\sqrt{91}$, ou $48+9\sqrt{3}+3\sqrt{91}$.

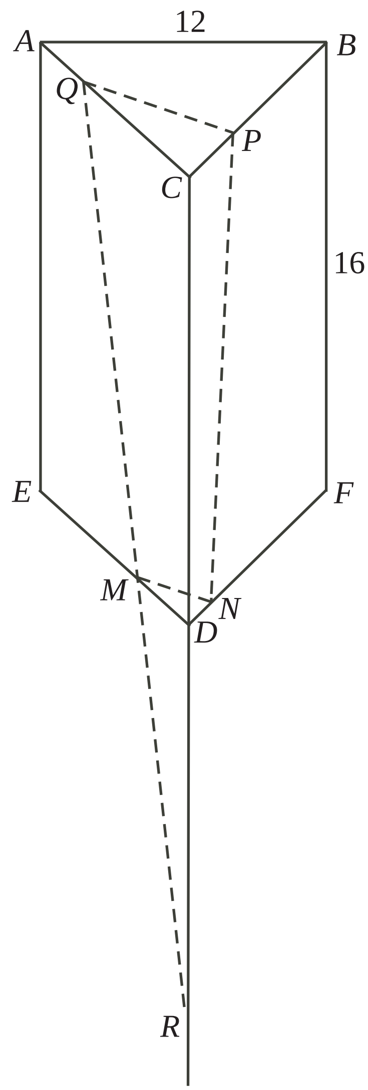
(c) <u>Étape 1 : Calcul de la longueur MN</u>
On sait que $DM = 4$, $DN = 2$ et $\angle MDN = 60^\circ$ (puisque le triangle EDF est équilatéral).
Puisque $DM : DN = 2 : 1$ et que l'angle compris entre DM et DN mesure 60°, le triangle MDN est un triangle remarquable 30°-60°-90°.
Donc, MN est perpendiculaire à DF. De plus, $MN = \sqrt{3}DN$, ou $MN = 2\sqrt{3}$.
(On aurait pu utiliser la loi du cosinus, dans le triangle MND, pour calculer la longueur MN.)

<u>Étape 2 : Calcul de la longueur CP</u>
On sait que $QC = 8$ et que $\angle QCP = 60^\circ$.
Puisque MN est perpendiculaire à DF, le quadrilatére $MNPQ$ est perpendiculaire au quadrilatére $BCDF$.
Puisque QP est parallèle à MN (ils sont situés dans le même plan $MNPQ$ et dans des bases parallèles du prisme $ABCDEF$), alors QP est perpendiculaire à CB.
Donc, le triangle QCP est rectangle en P et il contient aussi un angle de 60°. Il est donc un triangle remarquable 30°-60°-90°.

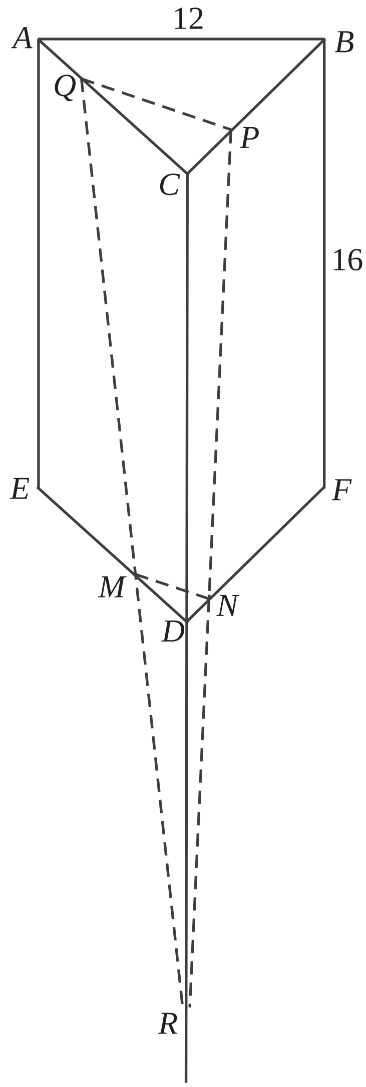
Donc, $CP = \frac{1}{2}(CQ)$, d'où $CP = \frac{1}{2}(8)$, ou $CP = 4$.
De plus, $QP = \sqrt{3}CP$, d'où $QP = 4\sqrt{3}$.

Étape 3 : Construction d'une pyramide

On prolonge CD vers le bas pour construire une pyramide, car on sait comment calculer son volume.
Ensuite, on prolonge QM jusqu'à ce qu'il coupe le prolongement de CD en R. (Le prolongement de QM coupe le prolongement de CD, puisque ce sont deux droites non parallèles situées dans un même plan.)



On considère les triangles RDM et RCQ. Ils sont semblables, puisqu'ils ont un angle commun en R et chacun est rectangle. (Le triangle RDM est rectangle en D et le triangle RCQ est rectangle en C.)
Puisque $QC = 8$ et $MD = 4$, il y a un rapport de $2 : 1$ entre les longueurs de leurs côtés respectifs.
Donc $RC = 2RD$, c'est-à-dire que D est le milieu de RC.
Puisque $CD = 16$, alors $DR = 16$.
Puisque $CP : DN = 2 : 1$, alors le prolongement de PN coupe le prolongement de CD au même point R.



Étape 4 : Calcul du volume de $QPCDMN$

On dit que le solide $QPCDMN$ est un *tronc de pyramide*, car il est obtenu en enlevant la pyramide $RDNM$ de la pyramide $RCPQ$. Le volume d'une pyramide est le tiers du volume du prisme correspondant, soit un tiers du produit de l'aire de la base et de la hauteur.

L'aire du triangle CPQ est égale à $\frac{1}{2}(CP)(QP)$, ou $\frac{1}{2}(4)(4\sqrt{3})$, ou $8\sqrt{3}$.

L'aire du triangle DNM est égale à $\frac{1}{2}(DN)(MN)$, ou $\frac{1}{2}(2)(2\sqrt{3})$, ou $2\sqrt{3}$.

La hauteur RD de la pyramide $RDNM$ a une longueur de 16 et la hauteur RC de la pyramide $RCPQ$ a une longueur de 32.

Donc, le volume du solide $QPCDMN$ est égal à $\frac{1}{3}(8\sqrt{3})(32) - \frac{1}{3}(2\sqrt{3})(16)$, ou $\frac{256\sqrt{3}}{3} - \frac{32\sqrt{3}}{3}$, ou $\frac{224\sqrt{3}}{3}$.