Concours canadien de mathématiques
Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique
Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Les solutions de 8ième année suit les solutions de 7ième année

Concours Gauss 2009

(7^e et 8^e années – Secondaire I et II)

le mercredi 13 mai 2009

Solutions

Personnel du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique

Ed Anderson
Lloyd Auckland
Terry Bae
Janet Baker
Steve Brown
Jennifer Couture
Fiona Dunbar
Jeff Dunnett
Mike Eden
Barry Ferguson
Judy Fox
Steve Furino
Sandy Graham
Angie Hildebrand
Judith Koeller
Joanne Kursikowski
Dean Murray
Jen Nissen
J.P. Pretti
Linda Schmidt
Kim Schnarr
Jim Schurter
Carolyn Sedore
Ian VanderBurgh
Troy Vasiga

Comité du concours Gauss

Mark Bredin (président), St. John's Ravenscourt School, Winnipeg, MB
Kevin Grady (président adjoint), Cobden District P.S., Cobden, ON
John Grant McLoughlin, University of New Brunswick, Fredericton, NB
JoAnne Halpern, Thornhill, ON
David Matthews, University of Waterloo, Waterloo, ON
Allison McGee, All Saints C.H.S., Kanata, ON
Kim Stenhouse, William G. Davis P.S., Cambridge, ON
David Switzer, Sixteenth Ave. P.S., Richmond Hill, ON
Tanya Thompson, Nottawa, ON
Chris Wu, Amesbury M.S., Toronto, ON

7[e] année

1. On a : $4{,}1 + 1{,}05 + 2{,}005 = 5{,}15 + 2{,}005 = 7{,}155$

Réponse : (A)

2. Puisque le triangle est équilatéral, tous ses côtés ont la même longueur.
Le périmètre, en mètres, est donc égal à $8 + 8 + 8$ (ou 3×8), soit 24.

Réponse : (C)

3. Puisque les nombres 12, 14 et 16 sont pairs, ils sont divisibles par 2 et ne sont donc pas des nombres premiers. Puisque le nombre 15 est divisible par 3, il n'est pas un nombre premier.
Chacun des autres nombres, soit 11, 13 et 17, n'est divisible que par 1 et par lui-même. Chacun est donc premier.
Il y a donc 3 nombres premiers dans la liste.

Réponse : (D)

4. *Solution 1*
Chacun des nombres de la liste est supérieur à 0 et inférieur à 1. On peut les placer en ordre ascendant en comparant les chiffres des dixièmes, ce qui donne

$$\{0{,}05; 0{,}25; 0{,}37; 0{,}40; 0{,}81\}.$$

Le plus petit nombre de la liste est 0,05.

Solution 2
On écrit chaque nombre sous forme fractionnaire :
$0{,}40 = \frac{40}{100}$, $0{,}25 = \frac{25}{100}$, $0{,}37 = \frac{37}{100}$, $0{,}05 = \frac{5}{100}$, $0{,}81 = \frac{81}{100}$.
Toutes les fractions ont le même dénominateur, soit 100. On peut donc choisir la fraction qui a le plus petit numérateur. Le plus petit nombre de la liste est donc $\frac{5}{100}$, ou 0,05.

Réponse : (D)

5. L'abscisse du point P se situe entre -2 et 0. L'ordonnée de P se situe entre 2 et 4.
Parmi les choix donnés, seules les coordonnées $(-1, 3)$ satisfont aux deux conditions.

Réponse : (E)

6. À Vancouver, la température est de $22\,^\circ$C.
À Calgary, la température est de $22\,^\circ\mathrm{C} - 19\,^\circ$C, ou $3\,^\circ$C .
À Québec, la température est de $3\,^\circ\mathrm{C} - 11\,^\circ$C, ou $-8\,^\circ$C.

Réponse : (C)

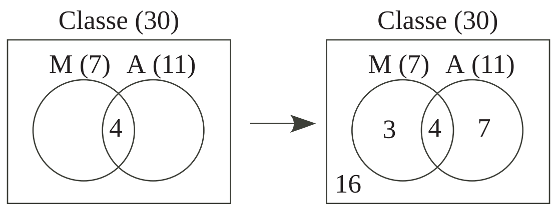
7. Puisqu'une distance réelle de 60 km est représentée par 1 cm sur la carte, alors une distance réelle de 540 km est représentée par $\dfrac{540}{60}$ cm, ou 9 cm sur la carte.

Réponse : (A)

8. Dans un triangle, la somme de la mesure des trois angles est toujours égale à 180°.
Dans le triangle PQR, $\angle P + \angle Q = 60^\circ$. Donc, $\angle R = 180^\circ - 60^\circ$, ou $\angle R = 120^\circ$.

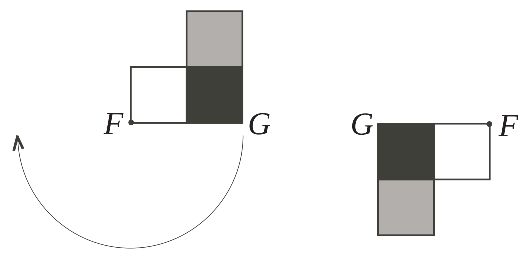
Réponse : (C)

9. Le premier diagramme de Venn, ci-dessous, indique que la classe compte 30 élèves, que 7 élèves sont allés au Mexique, 11 élèves sont allés en Angleterre et 4 de ces élèves sont allés dans les deux pays.
Parmi les 7 élèves qui sont allés au Mexique, 4 sont aussi allés en Angleterre.
Donc, 3 élèves $(7 - 4)$ sont allés au Mexique, mais ne sont pas allés en Angleterre.
Parmi les 11 élèves qui sont allés en Angleterre, 4 sont aussi allés au Mexique.
Donc, 7 élèves $(11 - 4)$ sont allés en Angleterre, mais ne sont pas allés au Mexique.



Donc, 3 élèves sont allés seulement au Mexique, 7 élèves sont allés seulement en Angleterre et 4 élèves sont allés dans les deux pays, pour un total de 14 élèves.
Dans cette classe de 30 élèves, 16 élèves $(30-14)$ ne sont jamais allés au Mexique ou en Angleterre.
Réponse : (B)

10. On se concentre sur le segment horizontal FG (voir la première figure ci-dessous) alors que la figure subit une rotation de 180° de centre F.
Une rotation de 180° correspond à une rotation d'un demi-tour. Le point F reste fixe, alors que le segment FG (et le reste de la figure) se déplace à la gauche de F. Le choix de réponse C indique la bonne position.



Réponse : (C)

11. Puisque Serge parcourt 4 m pour chaque 5 m que parcourt Carl, Serge parcourt $\frac{4}{5}$ de la distance parcourue par Carl. Lorsque Carl traverse la ligne d'arrivée, il a parcouru 100 m.
À ce moment, Serge a parcouru $\frac{4}{5}$ de 100 m, ou 80 m.
Réponse : (E)

12. *Solution 1*
L'aire du triangle est la moitié de l'aire d'un parallélogramme ayant la même base et la même hauteur que le triangle. Ce parallélogramme a donc une aire de 54 cm^2 $(2 \times 27 = 54)$. Puisqu'il a une base de 6 cm, il a une hauteur de 9 cm $(6 \times 9 = 54)$. Puisque le triangle et le parallélogramme ont la même hauteur, le triangle a une hauteur de 9 cm.

Solution 2
On peut calculer l'aire d'un triangle en utilisant la formule Aire $= \frac{1}{2} \times$ base $\times$ hauteur.
Puisque l'aire est de 27 cm^2 et que la base mesure 6 cm, la formule devient $27 = \frac{1}{2} \times 6 \times h$, d'où $27 = 3h$. Donc $h = 9$ et le triangle a une hauteur de 9 cm.
Réponse : (A)

13. Il y a 60 secondes dans une minute, 60 minutes dans une heure, 24 heures dans une journée et 7 jours dans une semaine. Donc, le nombre de secondes dans une semaine est égal à $60 \times 60 \times 24 \times 7$.
Réponse : (D)

14. *Solution 1*
S correspond à une valeur d'environ 1,5 sur la droite numérique, tandis que T correspond à environ 1,6. Donc, $S \div T$ est à peu près égal à $1{,}5 \div 1{,}6$, ou 0,9375. R est la seule valeur légèrement inférieure à 1. Elle représente donc mieux la valeur de $S \div T$.

Solution 2
La valeur de S est légèrement inférieure à celle de T. Donc, la valeur de $S \div T$ est légèrement inférieure à 1. Donc, la valeur de $S \div T$ est mieux représentée par R.
Réponse : (C)

15. Pour obtenir une somme maximale, on essaie d'utiliser le plus gros diviseur de 144 possible.
Or, le plus grand diviseur de 144 est 144. Si on l'utilisait pour créer une multiplication, il faudrait utiliser $144 = 144 \times 1 \times 1$, ce qui est interdit, car on parle du produit de trois entiers différents.
Donc, la réponse ne peut être égale à $144 + 1 + 1$, ou 146, qui correspond au choix (C).
Le deuxième plus grand diviseur de 144 est 72 et on peut écrire $144 = 72 \times 2 \times 1$.
Les trois facteurs sont différents et leur somme est égale à $72 + 2 + 1$, ou 75.
Puisque 75 est le plus grand nombre parmi les choix qui restent, il s'agit de la somme maximale possible.
Réponse : (B)

16. *Solution 1*
Puisque le carré a une aire de 25, ses côtés ont une longueur de 5, car $5 \times 5 = 25$.
Puisque le rectangle a la même largeur que le carré, il a donc une largeur de 5.
Puisque la longueur du rectangle est le double de sa largeur, il a donc une longueur de 10, car $5 \times 2 = 10$.
L'aire du rectangle est donc égale à 5×10, ou 50.

Solution 2
Le rectangle a la même largeur que le carré et sa longueur est le double de la longueur du carré.
Donc, l'aire du rectangle est le double de celle du carré. Elle est égale à 2×25, ou 50.
Réponse : (D)

17. Les six autres joueuses de l'équipe ont compté une moyenne de 3,5 points chacune.
Elles ont donc compté un total de $6 \times 3{,}5$ points, ou 21 points.
Vanessa a compté le reste des 48 points, soit $48 - 21$ points, ou 27 points.
Réponse : (E)

18. Puisque x et z sont des entiers positifs et que $xz = 3$, on doit donc avoir $x = 1$ et $z = 3$ ou bien $x = 3$ et $z = 1$.
Supposons que $x = 1$ et $z = 3$; l'équation $yz = 6$ devient donc $3y = 6$, d'où $y = 2$.
On a donc $x = 1$ et $y = 2$, ce qui donne $xy = 2$ et cela contredit la première équation $xy = 18$.
Donc, notre supposition est incorrecte et c'est le deuxième choix, $x = 3$ et $z = 1$, qui doit être vrai. L'équation $yz = 6$ devient donc $y = 6$.
On vérifie : $x = 3$, $y = 6$ et $z = 1$ satisfont bien aux trois équations données.
Donc $x + y + z = 3 + 6 + 1$, ou $x + y + z = 10$.
Réponse : (B)

19. Les pièces de 25 cents ont une valeur de 10,00 \$. Chaque pièce de 25 cents a une valeur de 0,25 \$. Il y a donc 40 pièces de 25 cents dans le bocal (4 pièces pour chacun des 10 dollars ou $10 \div 0{,}25 = 40$).
De même, il y a 200 pièces de 5 cents (20 pièces pour chacun des 10 dollars ou $10 \div 0{,}05 = 200$) et 1000 pièces de 1 cent (100 pièces pour chacun des 10 dollars ou $10 \div 0{,}01 = 1000$).
Le nombre total de pièces de monnaie dans le bocal est donc égal à $40 + 200 + 1000$, ou 1240.
La probabilité de choisir une pièce de 25 cents est donc égale à :
$$\frac{\text{nombre de pièces de 25 cents}}{\text{nombre total de pièces de monnaie}} = \frac{40}{1240} = \frac{1}{31}$$
Réponse : (B)

20. Puisque V est le milieu de PR, alors $PV = VR$.
Puisque $UVRW$ est un parallélogramme, alors $VR = UW$.
Puisque W est le milieu de US, alors $UW = WS$.
Donc $PV = VR = UW = WS$.
De même, $QW = WR = UV = VT$.
Puisque R est le milieu de TS, alors $TR = RS$.
Donc, les triangles VTR et WRS sont congruents et ils ont donc la même aire.
La diagonale VW du parallélogramme $UVRW$ coupe le parallélogramme en deux triangles UVW et RWV de même aire.
Dans le quadrilatère $VRSW$, $VR = WS$ et VR est parallèle à WS. Donc, $VRSW$ est un parallélogramme et l'aire du triangle RWV est égale à l'aire du triangle WRS.
Donc, les triangles VTR, WRS, RWV et UVW ont la même aire. Ils divisent donc le triangle STU en quarts.
Le parallélogramme $UVRW$ est donc composé de deux quarts du triangle STU, c'est-à-dire la moitié du triangle STU.
L'aire du parallélogramme $UVRW$ est donc égale à $\frac{1}{2}$.
Réponse : (B)

21. Ensemble, Lara et Rudi ont mangé $\frac{1}{4} + \frac{3}{10}$ de la tarte, c'est-à-dire $\frac{5}{20} + \frac{6}{20}$, ou $\frac{11}{20}$ de la tarte.
Il reste donc $1 - \frac{11}{20}$ de la tarte, ou $\frac{9}{20}$ de la tarte.
Le lendemain, Cora a mangé $\frac{2}{3}$ de ce qui restait. Après que Cora a mangé sa portion, la fraction de la tarte initiale qui n'a pas été mangée est égale à $(1 - \frac{2}{3})$ de ce qui restait le jour précédent, c'est-à-dire $\frac{1}{3}$ de ce qui restait le jour précédent.
À la fin, il reste donc $\frac{1}{3}$ de $\frac{9}{20}$ de la tarte initiale, ou $\frac{3}{20}$ de la tarte initiale.
Réponse : (D)

22. Dans la 1re rangée, il manque un 2 et un 4. Puisqu'il y a déjà un 2 dans la 2e colonne, on doit placer le 2 dans la 4e colonne et le 4 dans la 2e. On peut compléter le carré 2×2 en haut à gauche en plaçant un 3 dans la 1re case vide de la 2e rangée. Dans la 2e rangée, il manque maintenant un 1 et un 4 Puisqu'il y a déjà un 4 dans la 4e colonne, on doit placer le 4 dans la 3e colonne et un 1 dans la 4e. On peut compléter la 4e colonne en plaçant un 3 dans la 3e rangée. P ne peut être un 3, car il y a déjà un 3 dans la 3e rangée. De plus, P ne peut être un 4 ou un 2, car ces nombres paraissent déjà dans la 2e colonne. Donc, P doit être un 1.
Réponse : (A)

23. *Solution 1*

On peut supposer que le pot contient 1 litre d'eau au départ. On utilise un tableau pour tenir compte des quantités versées et des quantiés qui restent dans le pot. On s'arrête lorsque la quantié d'eau qui reste dans le pot est inférieure à 0,5 L.

N$^{\text{bre}}$ de verres	Quantité d'eau versée (L)	Quantité d'eau qui reste dans le pot (L)
1	10 % de 1 = 0,1	$1 - 0{,}1 = 0{,}9$
2	10 % de 0,9 = 0,09	$0{,}9 - 0{,}09 = 0{,}81$
3	10 % de 0,81 = 0,081	$0{,}81 - 0{,}081 = 0{,}729$
4	10 % de 0,729 = 0,0729	$0{,}729 - 0{,}0729 = 0{,}6561$
5	10 % de 0,6561 = 0,06561	$0{,}6561 - 0{,}06561 = 0{,}59049$
6	10 % de 0,59049 = 0,059049	$0{,}59049 - 0{,}059049 = 0{,}531441$
7	10 % de 0,531441 = 0,0531441	$0{,}531441 - 0{,}0531441 = 0{,}4782969$

D'après le tableau, Kim doit verser un minimum de 7 verres pour qu'il reste moins de la moitié de l'eau dans le pot.

Solution 2

Lorsqu'on enlève 10 % de l'eau du pot, cela équivaut à laisser 90 % de l'eau dans le pot.
Donc, la quantité d'eau qui reste dans le pot après un versement est égale à $\frac{9}{10}$ (ou 0,9) de la quantié d'eau qu'il y avait dans le pot avant le versement.
On utilise un tableau pour tenir compte de la fraction d'eau qui reste dans le pot après chaque versement.

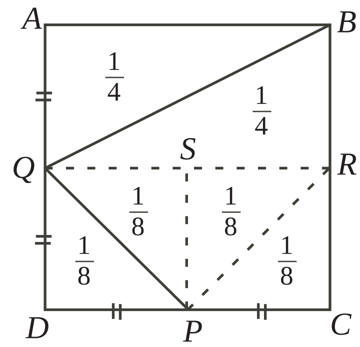
N$^{\text{bre}}$ de verres	Fraction de la quantitié initiale d'eau qui reste dans le pot
1	0,9 de 1 = 0,9
2	0,9 de 0,9 = 0,81
3	0,9 de 0,81 = 0,729
4	0,9 de 0,729 = 0,6561
5	0,9 de 0,6561 = 0,59049
6	0,9 de 0,59049 = 0,531441
7	0,9 de 0,531441 = 0,4782969

D'après le tableau, Kim doit verser un minimum de 7 verres pour qu'il reste moins de la moitié de l'eau dans le pot.

RÉPONSE : (C)

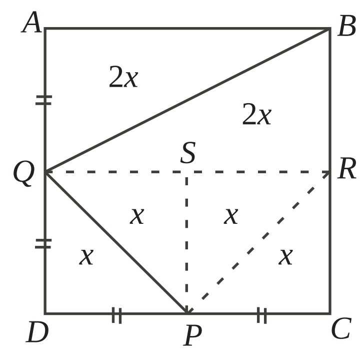
24. *Solution 1*

On trace le segment QR parallèle à DC, comme dans la figure ci-dessous. Ce segment coupe le carré $ABCD$ en deux demies. Puisque les triangles ABQ et RQB sont congruents, chacun représente la moitié du rectangle $ABRQ$, c'est-à-dire un quart du carré $ABCD$. On trace le segment PS parallèle à DA, puis le segment PR. Les triangles PDQ, PSQ, PSR et PCR sont congruents. Donc, chacun représente un quart du rectangle $DCRQ$, c'est-à dire un huitième du carré $ABCD$.



Le quadrilatère $QBCP$ représente donc $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$ du carré $ABCD$, c'est-à-dire $\frac{5}{8}$ du carré. Son aire est donc égale à $\frac{5}{8}$ de l'aire du carré.
On sait donc que $\frac{5}{8}$ de l'aire du carré est égale à 15. Donc, $\frac{1}{8}$ de l'aire du carré est égale à 3. Donc, l'aire du carré est égale à 24.

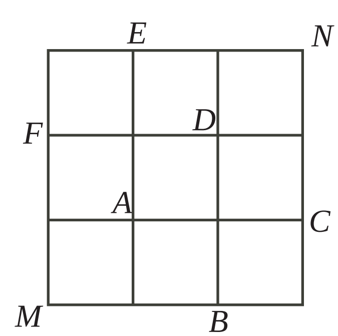
Solution 2
On trace le segment QR parallèle à DC, comme dans la figure ci-dessous. Ce segment coupe le carré $ABCD$ en deux rectangles congruents.
On trace le segment PS parallèle à DA, puis le segment PR. Les triangles PDQ, PSQ, PSR et PCR sont congruents. Donc, chacun a la même aire x. Puisque le rectangle $DCRQ$ a une aire égale à $x+x+x+x$, ou $4x$, le rectangle $ABRQ$ a aussi une aire de $4x$.



Puisque le segment BQ coupe le rectangle $ABRQ$ en deux triangles congruents, chacun a une aire de $2x$, car $2x+2x=4x$.
L'aire du quadrilatère $QBCP$ est égale à $x+x+x+2x$, ou $5x$. On a donc $5x=15$, d'où $x=3$. Or, l'aire du carré $ABCD$ est égale à $x+x+x+x+2x+2x$, ou $8x$. Elle est donc égale à 8×3, ou 24.

Réponse : (E)

25. On nomme certains points comme dans la figure suivante.



Le chemin $MADN$ est le seul chemin de longueur 3, c'est-à-dire qui utilise 3 diagonales.
Puisque la figure est symétrique par rapport au segment MN, tous les autres chemins auront un *chemin-image* par rapport au segment MN. Tous les autres chemins surviennent donc en paires, ce qui signifie que le nombre total de chemins est impair. Ceci nous permet d'éliminer les choix (B) et (D), qui présentent des nombres pairs.
Le tableau suivant présente tous les chemins possibles de M à N en n'utilisant que des diagonales.

Longueur du chemin	Nom du chemin	Nom du chemin-image
3	$MADN$	même
5	$MABCDN$	$MAFEDN$
9	$MABCDEFADN$	$MAFEDCBADN$
	$MABCDAFEDN$	$MAFEDABCDN$
	$MADCBAFEDN$	$MADEFABCDN$

Nous avons présenté 9 chemins. Puisqu'il n'y a pas un plus grand nombre dans les choix de réponses, il y a un total de 9 chemins possibles.

Réponse : (E)

8e année

1. En tenant compte de la priorité des opérations, on a : $1 + 3^2 = 1 + 9 = 10$

Réponse : (B)

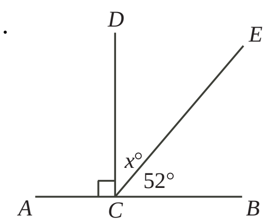
2. On a $-10 + (-12) = -22$.

Réponse : (D)

3. S'il utilisait un pot de 1 litre, Jean pourrait remplir 2 bouteilles de 0,5 litre (un demi-litre).
En utilisant un pot de 3 litres, Jean peut remplir 6 bouteilles d'eau ($3 \times 2 = 6$).
(Vérification : $3 \div 0{,}5 = 3 \div \frac{1}{2} = 3 \times 2 = 6$)

Réponse : (C)

4. Puisque AB est un segment de droite, $\angle ACD + \angle DCE + \angle ECB = 180°$.
Donc $90° + x° + 52° = 180°$, d'où $x° = 180° - 90° - 52°$, ou $x = 38$.



Réponse : (B)

5. On a $\frac{7}{9} = 7 \div 9 = 0{,}7777\ldots = 0{,}\overline{7}$. Arrondi au centième près, $\frac{7}{9} \approx 0{,}78$.

Réponse : (C)

6. D'après le diagramme, la voiture X utilise le moins d'essence pour parcourir 100 km. Elle est donc la plus économique par rapport à la consommation d'essence. C'est donc elle qui irait le plus loin si toutes les voitures utilisaient 50 litres d'essence.

Réponse : (D)

7. Karine a dépensé 25 \$ ($\frac{1}{4}$ de 100 \$ = 25 \$) sur les manèges et 10 \$ sur de la nourriture ($\frac{1}{10}$ de 100 \$ = 10 \$). Elle a dépensé 35 \$ en tout.

Réponse : (E)

8. Le polyèdre a 6 faces et 8 sommets.
L'équation $F + S - A = 2$ devient $6 + 8 - A = 2$, d'où $14 - A = 2$, ou $A = 12$.
Le polyèdre a 12 arêtes.

Réponse : (A)

9. Le mot PROBABILITE utilise 9 lettres différentes de l'alphabet, soit A, B, E, I, L, O, P, R et T.
Il y a 26 lettres dans l'alphabet. Donc, la probabilité pour que Jules choisisse une des 9 lettres du mot PROBABILITE est égale à $\frac{9}{26}$.

Réponse : (A)

10. *Solution 1*
Supposons que deux nombres égaux ont une somme de 20. Il s'agit donc de $10 + 10 = 20$.
Si on diminue le premier nombre de 1 et qu'on augmente le deuxième nombre de 1, on a deux nombres qui ont une différence de 2 et une somme de 20, soit $9 + 11 = 20$. Les deux nombres sont 9 et 11.

Solution 2
Puisque les deux nombres ont une différence de 2, on peut représenter le petit nombre par x et le plus grand nombre par $x + 2$.
Puisque les nombres ont une somme de 20, alors $x + x + 2 = 20$, c'est-à-dire $2x = 18$, d'où $x = 9$.
Le petit nombre est 9 et le grand nombre est 11.

Réponse : (A)

11. Puisque $\angle ABC = \angle ACB$, alors le triangle ABC est isocèle et $AB = AC$.
Puisque le triangle ABC a un périmètre de 32, alors $AB + AC + 12 = 32$, d'où $AB + AC = 20$.
Puisque $AB = AC$, alors $2AB = 20$, ou $AB = 10$.

Réponse : (C)

12. On reporte $C = 10$ dans l'équation $F = \frac{9}{5}C + 32$ qui devient $F = \frac{9}{5} \times 10 + 32$, c'est-à-dire $F = 18+32$, ou $F = 50$. Une température de 10 degrés Celcius correspond à 50 degrés Fahrenheit.

Réponse : (D)

13. On peut commencer par utiliser 1 comme premier nombre. On a alors $101 = 1 + 100$.
On peut ensuite augmenter le premier nombre de 1 et diminuer le deuxième nombre de 1, ce qui maintient une somme de 101. On continue de la même façon pour les autres additions.
Voici la liste des additions possibles :

$$\begin{aligned} 101 &= 1 + 100 \\ 101 &= 2 + 99 \\ 101 &= 3 + 98 \\ &\vdots \\ 101 &= 50 + 51 \end{aligned}$$

Si on continuait à augmenter le premier nombre de 1 et à diminuer le deuxième nombre de 1, le deuxième ne serait pas plus grand que le premier.
Il y a donc 50 additions possibles.

Réponse : (A)

14. Les six autres joueuses de l'équipe ont compté une moyenne de 3,5 points chacune.
Elles ont donc compté un total de $6 \times 3{,}5$ points, ou 21 points.
Vanessa a compté le reste des 48 points, soit $48 - 21$ points, ou 27 points.

Réponse : (E)

15. Le triangle PQR est rectangle, car $\angle PQR = 90^\circ$ ($PQRS$ est un rectangle).
Selon le théorème de Pythagore, on a :

$$\begin{aligned} PR^2 &= PQ^2 + QR^2 \\ 13^2 &= 12^2 + QR^2 \\ 169 &= 144 + QR^2 \\ QR^2 &= 25 \end{aligned}$$

Puisque $QR > 0$, alors $QR = 5$. L'aire du rectangle $PQRS$ est donc égale à 12×5, ou 60.

Réponse : (B)

16. Lorsqu'il est 15 h 00 à Victoria, il est 18 h 00 à Timmins.
Donc, l'heure à Victoria est toujours 3 heures de moins que l'heure à Timmins.
Lorsque l'avion arrive à 16 h 00, heure locale de Timmins, il est 13 h 00 à Victoria.
L'avion est donc parti à 6 h 00, heure de Victoria, et il est arrivé à 13 h 00, heure de Victoria.
Le vol a duré 7 heures.

RÉPONSE : (D)

17. Les pièces de 25 cents ont une valeur de 10,00 \$. Chaque pièce de 25 cents a une valeur de 0,25 \$.
Il y a donc 40 pièces de 25 cents dans le bocal (4 pièces pour chacun des 10 dollars).
De même, il y a 200 pièces de 5 cents (20 pièces pour chacun des 10 dollars ou $10 \div 0{,}05 = 200$) et 1000 pièces de 1 cent (100 pièces pour chacun des 10 dollars ou $10 \div 0{,}01 = 1000$).
Le nombre total de pièces de monnaie dans le bocal est donc égal à $40 + 200 + 1000$, ou 1240.
La probabilité de choisir une pièce de 25 cents est donc égale à :

$$\frac{\text{nombre de pièces de 25 cents}}{\text{nombre total de pièces de monnaie}} = \frac{40}{1240} = \frac{1}{31}$$

RÉPONSE : (B)

18. Des 40 élèves de la classe, 12 n'aiment aucun des desserts.
Donc, 28 élèves ($40 - 12 = 28$) aiment au moins un des desserts.
Or, 18 élèves aiment la tarte aux pommes et 15 aiment le gâteau au chocolat.
Puisque $18 + 15 = 33$, alors 5 élèves ($33 - 28 = 5$) aiment les deux desserts.

RÉPONSE : (E)

19. Dans la colonne des unités, la somme de $P + Q$ se termine par un 9. On a donc $P + Q = 9$ ou $P+Q = 19$. Puisque P et Q sont des chiffres différents, leur somme maximale possible est $9+8$, ou 17. Donc $P + Q \neq 19$. Donc $P + Q = 9$.
Dans la colonne des dizaines, la somme de $Q + Q$ se termine par un 0. Donc $Q + Q = 0$ ou $Q + Q = 10$, d'où $Q = 0$ ou $Q = 5$.
Il est impossible que $Q = 0$, car si c'était le cas, il n'y aurait aucune retenue de la colonne des dizaines à la colonne des centaines et dans cette dernière colonne, la somme de $P+Q$ ne pourrait donc pas se terminer par un 0, car on sait déjà que $P + Q = 9$.
On a donc $Q = 5$ et $P = 4$. Dans la colonne des unités, on a $4 + 5$. Dans la colonne des dizaines, on a $5 + 5$, ce qui produit une retenue de 1 appliquée à la colonne des centaines. Dans la colonne des centaines, on a $1 + 4 + 5$, ce qui produit une retenue de 1 appliquée à la colonne des milliers.
Dans la colonne des milliers, on a $1 + R = 2$, d'où $R = 1$.
Donc $P + Q + R = 4 + 5 + 1$, ou $P + Q + R = 10$.

$$\begin{array}{rcccc} & & P & Q & P \\ + & R & Q & Q & Q \\ \hline & 2 & 0 & 0 & 9 \end{array} \qquad \begin{array}{rcccc} & & 4 & 5 & 4 \\ + & 1 & 5 & 5 & 5 \\ \hline & 2 & 0 & 0 & 9 \end{array}$$

RÉPONSE : (B)

20. Puisque le carré a une aire de 144, chacun de ses côtés a une longueur de 12 ($\sqrt{144} = 12$ ou $12 \times 12 = 144$).
La longueur de la ficelle correspond au périmètre du carré, soit 48 ($4 \times 12 = 48$).
Le plus grand cercle que l'on peut former avec cette ficelle a donc une circonférence de 48.
Donc $\pi \times d = 48$, d'où $d = 48 \div \pi$, ou $d \approx 15{,}28$. Donc $r \approx 15{,}28 \div 2$, ou $r \approx 7{,}64$.
L'aire du plus grand cercle que l'on peut former avec la ficelle est égale à $\pi(7{,}64)^2$, ou environ 183.

RÉPONSE : (E)

21. Pour obtenir une somme maximale, on essaie d'utiliser le plus grand diviseur possible de 360 comme facteur, ce qui signifie que les trois autres facteurs doivent être aussi petits que possible. Les trois plus petits diviseurs de 360 sont 1, 2 et 3, ce qui donne 60 comme quatrième facteur ($\frac{360}{1\times2\times3} = 60$ ou $1 \times 2 \times 3 \times 60 = 360$).
On obtient ainsi une somme des facteurs égale à 66 ($1+2+3+60 = 66$). On peut ainsi éliminer trois des choix de réponses qui sont inférieurs à 66.
Puisque 1, 2 et 3 sont les trois plus petits diviseurs différents de 360, il est impossible de trouver un quatrième facteur plus grand que 60.
Si on remplace le facteur 60 par un facteur plus petit, cela diminuera la somme des quatre facteurs. En effet, le produit de trois entiers différents est toujours supérieur à leur somme. Par exemple, $1 \times 2 \times 4 = 8 > 1 + 2 + 4 = 7$.
Le plus grand diviseur de 360 qui est inférieur à 60 est 45. Puisque $360 \div 45 = 8$, si on prenait 45 comme facteur, la somme des trois autres facteurs serait inférieure à 8 et la somme des quatre facteurs serait inférieure à 53 ($8 + 45 = 53$), ce qui est inférieur à la somme précédente de 66.
De la même manière, on obtient des sommes inférieures à 66 si on considère les autres diviseurs de 360 comme plus grand des quatre facteurs. La somme maximale possible des quatre entiers est donc égale à 66.

Réponse : (B)

22. La première ligne verticale coupe la lettre S en 4 morceaux, soit 2 morceaux à gauche de la ligne et 2 morceaux à droite de la ligne.
Chaque ligne additionnelle ajoute 3 nouveaux morceaux, entre les lignes, tout en conservant les 2 morceaux à gauche des lignes et les 2 morceaux à droite des lignes.
Le tableau suivant compare les nombres de lignes qui augmentent de 1 et les nombres de morceaux qui augmentent de 3.

Nombre de lignes	Nombre de morceaux
1	4
2	7
3	10
4	13
$\vdots$	$\vdots$

On veut un total de 154 morceaux, c'est-à-dire 150 morceaux de plus que pour 1 ligne. Puisque chaque nouvelle ligne crée 3 nouveaux morceaux, il faut donc ajouter 50 autres lignes ($150 \div 3 = 50$) pour un total de 51 lignes.

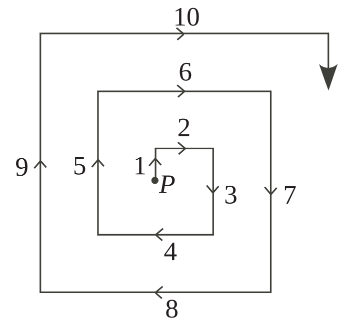
Réponse : (D)

23. Puisqu'on cherche un pourcentage d'une longueur, on peut choisir n'importe quelle longueur pour les côtés du carré. On suppose que les côtés du carré ont une longueur de 2. Puisque le diamètre du cercle est égal à la largeur du carré, il est égal à 2.
D'après le théorème de Pythagore, $XY^2 = 2^2 + 2^2$, d'où $XY^2 = 8$, ou $XY = \sqrt{8}$.
La partie du segment XY qui est située à l'extérieur du cercle a une longueur égale à $\sqrt{8} - 2$ (on a soustrait le diamètre de la longueur).
Puisque $\frac{\text{longueur de la partie à l'extérieur du cercle}}{\text{longueur de } XY} = \frac{\sqrt{8}-2}{\sqrt{8}} \approx 0{,}293$, alors 29,3 % du segment XY est situé à l'extérieur du cercle.

Réponse : (A)

24. *Solution 1*

Les segments de la spirale sont dessinés vers le haut, vers la droite, vers le bas ou vers la gauche. Puisque les segments vers le haut sont dessinés à tous les quatre segments, ils ont pour longueur respective $1, 5, 9, 13, 17, 21, \ldots$ Donc, le segment de longueur 21 est le sixième segment dessiné vers le haut, du côté gauche de la spirale (tous ces segments ont une longueur qui est 1 de plus qu'un multiple de 4).



On voit que l'extrémité supérieure de chaque segment vers le haut est située à 2 unités vers la gauche et 2 unités au-dessus de celle du segment vers le haut précédent. L'extrémité supérieure F du segment de longueur 21 est donc située à $2+2+2+2+2$ unités, ou 10 unités, à la gauche du point P et à $1+2+2+2+2+2$ unités, ou 11 unités, au-dessus du point P. Les paragraphes suivants démontrent ces résultats de façon plus formelle.

On considère le trajet en spirale à partir du point P. Après le premier segment vers le haut, on se dirige à l'horizontale de 2 unités vers la droite, c'est-à-dire de $+2$, le signe positif indiquant un mouvement vers la droite.

Deux segments plus loin, on se dirige à l'horizontale de 4 unités vers la gauche, c'est-à-dire de -4, le signe négatif indiquant un mouvement vers la gauche. On arrive alors au deuxième segment vers le haut, soit un segment de longueur 5.

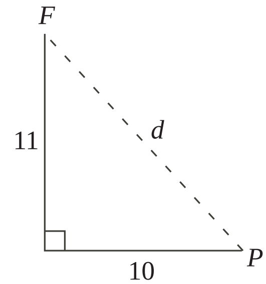
Pour y arriver, on a bougé à l'horizontale de $(+2)+(-4)$ unités, ou -2, ou de 2 unités vers la gauche.

On peut déterminer la distance du point P au segment vers le haut suivant (de longueur 9) de façon semblable. Sur le segment de longueur 5, on est à -2 unités à l'horizontale, ou 2 unités à la gauche de P et on bouge de 6 unités vers la droite (ou $+6$), puis de 8 unités vers la gauche (ou -8). Pour arriver au segment vers le haut de longueur 9, on a bougé à l'horizontale de $(-2)+(+6)+(-8)$ unités, ou -4 unités, soit 4 unités à la gauche de P. Le tableau suivant indique les mouvements horizontaux à partir de P à chacun des segments vers le haut.

On doit aussi déterminer la distance verticale du point P au point F. À partir de P, le premier segment vertical monte de 1, ou $+1$, le deuxième descend de 3, ou -3 et le troisième monte de 5, ou $+5$. Donc, la position verticale de l'extrémité du segment vers le haut de longueur 5 est de $(+1)+(-3)+(+5)$ unités, ou $+3$ unités, soit 3 unités au-dessus de P. Le tableau suivant indique les mouvements verticaux à partir de P.

Longueur du segment	Distance horizontale	Distance verticale
5	$(+2)+(-4)=-2$	$(+1)+(-3)+(+5)=+3$
9	$(-2)+(+6)+(-8)=-4$	$(+3)+(-7)+(+9)=+5$
13	$(-4)+(+10)+(-12)=-6$	$(+5)+(-11)+(+13)=+7$
17	$(-6)+(+14)+(-16)=-8$	$(+7)+(-15)+(+17)=+9$
21	$(-8)+(+18)+(-20)=-10$	$(+9)+(-19)+(+21)=+11$

Il reste maintenant à déterminer la distance d du point P au point F.



Puisque les distances sont mesurées à l'horizontale et à la verticale, on a formé un angle droit et on peut déterminer la distance d en utilisant le théorème de Pythagore.
On a $d^2 = 10^2 + 11^2$, d'où $d^2 = 100 + 121$, ou $d^2 = 221$. Donc $d = \sqrt{221}$, ou $d \approx 14{,}866$.

Solution 2
On place la spirale dans un plan cartésien, le point P étant à l'origine. Les coordonnées des extrémités des segments présentent une régularité.

Longueur du segment	Coordonnées de l'extrémité
1	$(0,1)$
2	$(2,1)$
3	$(2,-2)$
4	$(-2,-2)$
5	$(-2,3)$
6	$(4,3)$
7	$(4,-4)$
8	$(-4,-4)$
$\vdots$	$\vdots$

On remarque que lorsque la longueur d'un segment est un multiple de 4, disons $4k$, l'extrémité du segment a pour coordonnés $(-2k,-2k)$ (on peut le démontrer en suivant les arguments de la solution 1). Donc, l'extrémité du segment de longueur 20 a pour coordonnées $(-10,-10)$. Tous les segments de longueur $4k$ sont dessinés vers la gauche. Pour le segment suivant, de longueur 21, on bouge vers le haut, sur une distance de 21 unités, à partir du point $(-10,-10)$ pour arriver au point $F(-10,11)$. La position de ce point est de 10 unités à la gauche et de 11 unités au-dessus de celle du point $P(0,0)$. On utilise le théorème de Pythagore pour obtenir $PF^2 = 10^2 + 11^2$, d'où $PF^2 = 100 + 121$, ou $PF^2 = 221$. Donc $PF = \sqrt{221}$, ou $PF \approx 14{,}866$.

Réponse : (B)

25. On considère toutes les sommes des paires de nombres qui incluent p, soit $p+q$, $p+r$, $p+s$, $p+t$ et $p+u$. On voit que p participe à 5 sommes, soit une fois avec chaque autre nombre.
De la même manière, chacun des autres nombres participe à 5 sommes.
Si on additionne chacune des sommes des 15 paires de nombres, chacun des nombres p, q, r, s, t et u participera 5 fois. Donc $5p+5q+5r+5s+5t+5u = 25+30+38+41+\ldots+103+117$, ou $5p+5q+5r+5s+5t+5u = 980$, ou $5(p+q+r+s+t+u) = 980$. Donc $p+q+r+s+t+u = 196$.
Puisque p et q sont les deux plus petits entiers, leur somme doit être la plus petite des sommes de paires d'entiers ; donc $p+q = 25$. De même, puisque t et u sont les deux plus grands entiers, leur somme doit être la plus grande des sommes de paires d'entiers ; donc $t+u = 117$. L'équation $(p+q)+r+s+(t+u) = 196$ devient $25+r+s+117 = 196$, ou $r+s = 196-142$, ou $r+s = 54$.

Réponse : (B)