Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Galois 2009

le mercredi 8 avril 2009

Solutions

1. (a) Le nombre total d'élèves dans la classe est égal à $8+7+3+2$, ou 20. Donc, la fraction des élèves de la classe qui ont les cheveux blonds est égale à $\frac{8}{20}$.
Or, $\frac{8}{20} = \frac{40}{100} = 40\,\%$. Donc, $40\,\%$ des élèves de la classe ont les cheveux blonds.

(b) Dans la classe, 3 élèves ont les cheveux roux et 2 élèves ont les cheveux noirs. Donc 5 élèves ont les cheveux roux ou noirs.
La fraction des élèves de la classe qui ont les cheveux roux ou noirs est égale à $\frac{5}{20}$.
Or, $\frac{5}{20} = \frac{25}{100} = 25\,\%$. Donc, $25\,\%$ des élèves de la classe ont les cheveux roux ou noirs.

(c) On sait que si certains élèves blonds se teignent les cheveux en noir, le nombre d'élèves de la classe ne change pas.
Pour que $20\,\%$ des élèves de la classe aient les cheveux noirs, il faut que $20\,\%$ de 20 élèves, soit 4 élèves, aient les cheveux noirs.
Or présentement, 2 élèves ont les cheveux noirs. Il faut donc que 2 élèves blonds se teignent les cheveux en noir.

(d) Soit x le nombre d'élèves aux cheveux roux qu'il faut ajouter à la classe pour que $32\,\%$ des élèves de la classe aient les cheveux roux. Il y aura donc $3+x$ élèves aux cheveux roux et un total de $20+x$ élèves dans la classe.
Donc, la fraction d'élèves de la classe qui auront les cheveux roux sera égale à $\frac{3+x}{20+x}$.
Or, $32\,\% = \frac{32}{100} = \frac{8}{25}$. On cherche donc la valeur de x telle que $\frac{3+x}{20+x} = \frac{8}{25}$. On peut voir, par inspection, que $x = 5$. On peut aussi multiplier chaque membre de l'équation par 25 et par $20+x$ pour obtenir $25(3+x) = 8(20+x)$, d'où $75 + 25x = 160 + 8x$, ou $17x = 85$ ou $x = 5$.
Il faudrait donc ajouter 5 élèves aux cheveux roux à la classe pour que $32\,\%$ des élèves de la classe aient les cheveux roux.

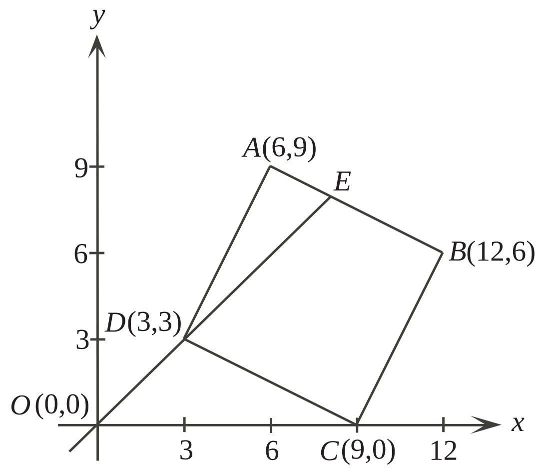
2. (a) *Solution 1*
Puisque $ABCD$ est un carré, les côtés AB et DC sont parallèles et ils ont la même longueur. Donc, le parcours du point A au point B est le même que celui du point D au point C. Or, pour se rendre de A à B, on se déplace de 6 unités vers la droite et de 3 unités vers le bas. Il en est donc de même pour se rendre de D à C.
Donc, C a pour coordonnées $(3+6, 3-3)$, ou $(9,0)$. Donc $t = 9$.

Solution 2
La pente de CD est égale à $\frac{3-0}{3-t}$ et celle de AB est égale à $\frac{6-9}{12-6}$, ou $\frac{-3}{6}$, ou $-\frac{1}{2}$.
Puisque $ABCD$ est un carré, CD est parallèle à AB.
Donc, ces segments ont la même pente. Donc :

$$\begin{aligned}
\frac{3}{3-t} &= -\frac{1}{2} \\
(3)(2) &= (-1)(3-t) \\
6 &= -3+t \\
t &= 9
\end{aligned}$$

Donc, l'abscisse du sommet C est égale à 9.

(b)



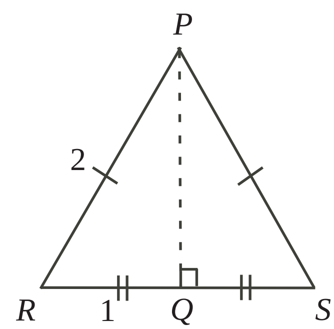
On détermine d'abord l'équation de la droite qui passe aux points $O(0,0)$ et $D(3,3)$.
La pente de cette droite est égale à $\dfrac{3-0}{3-0}$, ou 1.
Puisque la droite passe à l'origine, son ordonnée à l'origine est nulle. Donc, la droite a pour équation $y = x$.
On détermine ensuite l'équation de la droite qui passe aux points A et B.
Comme dans la partie (a), la droite qui passe aux points A et B a une pente de $-\frac{1}{2}$.
Elle a donc une équation de la forme $y = -\frac{1}{2}x + b$ pour une valeur quelconque de b.
Puisque $B(12,6)$ est situé sur cette droite, alors $6 = -\frac{1}{2}(12) + b$, d'où $6 = -6 + b$, ou $b = 12$.
Donc, la droite a pour équation $y = -\frac{1}{2}x + 12$.
Au point d'intersection des droites d'équations $y = x$ et $y = -\frac{1}{2}x+12$, on a $x = -\frac{1}{2}x+12$, d'où $\frac{3}{2}x = 12$, ou $x = 8$. Donc $y = 8$.
Le point E a donc pour coordonnées $(8,8)$.

(c) Voici les longueurs des côtés :

$$ED = \sqrt{(8-3)^2 + (8-3)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$
$$EB = \sqrt{(8-12)^2 + (8-6)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$
$$CD = CB = \sqrt{(12-9)^2 + (6-0)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}.$$

Le périmètre du quadrilatère $EBCD$ est donc égal à $5\sqrt{2}+2\sqrt{5}+2\times 3\sqrt{5}$, ou $5\sqrt{2}+8\sqrt{5}$.

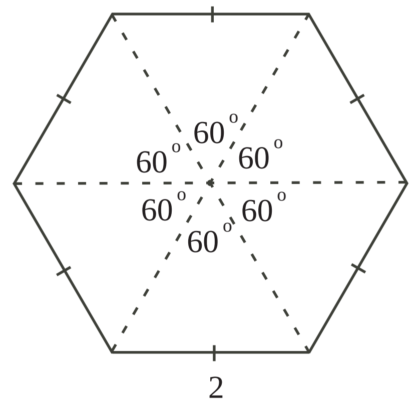
3. (a) Le triangle équilatéral PRS a des côtés de longueur 2.
Puisque $PR = PS$, la perpendiculaire abaissée au point P coupe RS en son milieu Q. Donc, $RQ = QS = 1$ et le triangle PRQ est rectangle.
D'après le théorème de Pythagore :



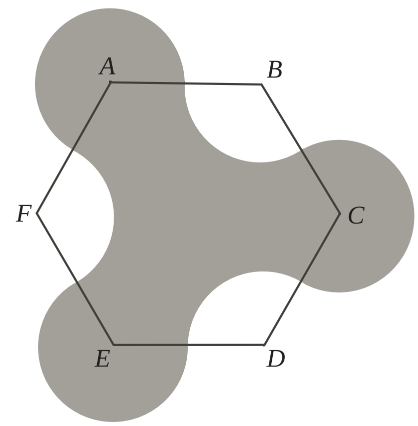
$$\begin{aligned} PR^2 &= RQ^2 + QP^2 \\ 2^2 &= 1^2 + QP^2 \\ 4 &= 1 + QP^2 \\ 3 &= QP^2 \\ QP &= \sqrt{3} \quad \text{(puisque } QP > 0\text{)} \end{aligned}$$

L'aire du triangle équilatéral est égale à $\frac{1}{2}(RS)(QP)$, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}(2)(\sqrt{3})$, ou $\sqrt{3}$.

(b) L'hexagone peut être formé de 6 triangles équilatéraux ayant des côtés de longueur 2.
En effet, chaque sommet d'un tel triangle a un angle de 60°. Donc, lorsque l'on juxtapose 6 triangles, au point commun, la somme des mesures d'angles est égale à $6 \times 60°$, ou 360° et les 6 angles forment donc un angle plein. De plus, les côtés de l'hexagone ont une longueur de 2 et ses angles intérieurs mesurent $60° + 60°$, ou 120°.
L'aire de l'hexagone régulier est donc égale à 6 fois l'aire d'un triangle équilatéral de la partie (a), c'est-à-dire à $6 \times \sqrt{3}$, ou $6\sqrt{3}$.



(c) D'après la partie (b), les angles intérieurs de l'hexagone mesurent 120°.
Puisque les angles intérieurs aux sommets B, D et F mesurent 120°, alors les secteurs de cercles non ombrés de centres B, D et E à l'intérieur de l'hexagone sont chacun $\frac{1}{3}$ d'un disque de rayon 1, car $\frac{1}{3}(360°) = 120°$.
Donc, l'aire totale de ces trois régions non ombrées correspond à l'aire d'un disque de rayon 1, c'est-à-dire $\pi(1)^2$, ou π.
Puisque chaque angle intérieur de l'hexagone mesure 120°, les angles extérieurs aux sommets A, C et E mesurent chacun $360° - 120°$, ou 240°.
Les secteurs ombrés de centres A, C et E, à l'extérieur de l'hexagone, sont chacun $\frac{2}{3}$ d'un disque de rayon 1, car $\frac{2}{3}(360°) = 240°$. Donc, chacun de ces secteurs a une aire égale à $\frac{2}{3} \times \pi(1)^2$, ou $\frac{2}{3}\pi$.
L'aire totale de ces 3 secteurs est donc égale à $3 \times \frac{2}{3}\pi$, ou 2π.
L'aire de la région ombrée est égale à l'aire de l'hexagone moins l'aire des secteurs non ombrés de centres B, D et F, plus l'aire des secteurs ombrés de centres A, C et E, c'est-à-dire à $6\sqrt{3} - \pi + 2\pi$, ou $6\sqrt{3} + \pi$.



4. (a) On obtient le plus grand entier positif N qu'il est possible d'écrire sous cette forme en choisissant les plus grandes valeurs permises de a, b, c, d et e, soit $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $d = 4$ et $e = 5$. On obtient $N = 1(1!) + 2(2!) + 3(3!) + 4(4!) + 5(5!)$, c'est-à-dire $N = 1 + 2(2) + 3(6) + 4(24) + 5(120)$, ou $N = 719$.

(b) Étant donné deux entiers strictement positifs n et m, il est possible d'écrire la division de n par m sous la forme d'un énoncé de la forme

$$n = qm + r,$$

le quotient q et le reste r étant des entiers non négatifs tels que $0 \leq r < m$.
Le tableau suivant présente quelques exemples. Ainsi dans la première ligne, si on divise 20 par 6, on obtient un quotient de 3 et un reste de 2. L'énoncé $n = qm + r$ devient alors $20 = 3(6) + 2$.

n	m	q	r	$n = qm + r$
20	6	3	2	$20 = 3(6) + 2$
12	13	0	12	$12 = 0(13) + 12$
9	7	1	2	$9 = 1(7) + 2$
36	9	4	0	$36 = 4(9) + 0$

On remarque que dans chaque exemple, l'inégalité $0 \leq r < m$ est satisfaite.
Il est toujours possible de satisfaire à cette inégalité en soustrayant de n des multiples de m jusqu'à ce qu'on obtienne un nombre inférieur à m.
On utilise ce processus de façon répétée pour écrire $n = 653$ sous la forme requise en divisant 653 par 5!, puis en divisant le reste par 4!, ainsi de suite. Or $m = 5! = 120$. On divise 653 par 120 pour obtenir un quotient de 5 et un reste de 53. Donc $653 = 5(120)+53$.
On divise le reste 53 par 4! (ou 24) pour obtenir un quotient de 2 et un reste de 5 (dans le tableau on a donc, dans la deuxième ligne, $n = 53$, $m = 24$, $q = 2$ et $r = 5$). On recommence à chaque fois, en divisant successivement par $5\,!$, $4\,!$, $3\,!$, $2\,!$ et $1\,!$.

n	m	q	r	$n = qm + r$
653	120	5	53	$653 = 5(120) + 53$
53	24	2	5	$53 = 2(24) + 5$
5	6	0	5	$5 = 0(6) + 5$
5	4	1	1	$5 = 2(2) + 1$
1	1	1	0	$1 = 1(1) + 0$

D'après la 5e colonne du tableau, on a :

$$\begin{aligned} 653 &= 5(120) + 53 \\ &= 5(120) + 2(24) + 5 \\ &= 5(120) + 2(24) + 0(6) + 5 \\ &= 5(120) + 2(24) + 0(6) + 2(2) + 1 \\ &= 5(120) + 2(24) + 0(6) + 2(2) + 1(1) + 0 \\ &= 5(5!) + 2(4!) + 0(3!) + 2(2!) + 1(1!) \end{aligned}$$

On a donc écrit $n = 653$ sous la forme demandée en utilisant $a = 1$, $b = 2$, $c = 0$, $d = 2$ et $e = 5$.

(c) On généralise la procédure utilisée dans la partie (b) :

n	m	q	r	$n = qm + r$	restriction sur r
n	120	e	r_1	$n = e(120) + r_1$	$0 \leq r_1 < 120$
r_1	24	d	r_2	$r_1 = d(24) + r_2$	$0 \leq r_2 < 24$
r_2	6	c	r_3	$r_2 = c(6) + r_3$	$0 \leq r_3 < 6$
r_3	2	b	r_4	$r_3 = b(2) + r_4$	$0 \leq r_4 < 2$
r_4	1	a	r_5	$r_4 = a(1) + r_5$	$0 \leq r_5 < 1$

D'après la 5e colonne du tableau, on a :

$$\begin{aligned} n &= e(120) + r_1 \\ &= e(120) + d(24) + r_2 \\ &= e(120) + d(24) + c(6) + r_3 \\ &= e(120) + d(24) + c(6) + b(4) + r_4 \\ &= e(120) + d(24) + c(6) + b(4) + a(1) + r_5 \\ &= e(5!) + d(4!) + c(3!) + b(2!) + a(1!) \text{ (puisque } r_5 = 0) \end{aligned}$$

Il faut justifier que les entiers a, b, c, d, and e satisfont aux inégalités données.
D'après la partie (b), chacun de ces entiers est non négatif. Il reste à démontrer que $a \leq 1$, $b \leq 2$, $c \leq 3$, $d \leq 4$ et $e \leq 5$.
D'après la partie (a), $N = 719$. Donc $0 \leq n < 720$.
D'après le tableau précédent, $n = e(120) + r_1$. Donc $e(120) + r_1 < 720$, d'où $e(120) < 720$ (puisque $r_1 \geq 0$), ou $e < 6$. L'inégalité $e \leq 5$ est bien satisfaite.
D'après le tableau, on a aussi $r_1 < 120$. Donc $d(24) + r_2 < 120$, d'où $d(24) < 120$ (puisque $r_2 \geq 0$), ou $d < 5$. L'inégalité $d \leq 4$ est bien satisfaite.
De plus, $r_2 < 24$. Donc $c(6) + r_3 < 24$, d'où $c(6) < 24$ (puisque $r_3 \geq 0$), ou $c < 4$.
L'inégalité $c \leq 3$ est bien satisfaite.
De plus, $r_3 < 6$. Donc $b(2) + r_4 < 6$, d'où $b(2) < 6$ (puisque $r_4 \geq 0$), ou $b < 3$.
L'inégalité $b \leq 2$ est bien satisfaite.
Enfin, $r_4 < 2$. Donc $a(1) + r_5 < 2$, d'où $a(1) < 2$ (puisque $r_5 = 0$), ou $a < 2$.
L'inégalité $a \leq 1$ est bien satisfaite.
Donc tous les entiers n (ou $0 \leq n \leq N$) peuvent être écrits sous la forme demandée.

(d) Puisque $c = 0$, on cherche la somme de tous les entiers n de la forme $n = a + 2b + 24d + 120e$, selon les restrictions imposées sur les entiers a, b, d et e.
Puisque $n = a + 2b + 24d + 120e = (a + 2b) + 24(d + 5e)$, soit $n_1 = a + 2b$ et $n_2 = d + 5e$.
Donc $n = n_1 + 24n_2$. On considère d'abord toutes les valeurs possibles de n_1.
Puisque $0 \leq a \leq 1$ et $0 \leq b \leq 2$ et puisque $n_1 = a + 2b$, on conclut que n_1 peut prendre n'importe quelle valeur de l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Chacun de ces nombres provient d'une valeur particulière de a et d'une valeur particulière de b.
On considère ensuite toutes les valeurs possibles de n_2 ($n_2 = d + 5e$). Puisque $0 \leq d \leq 4$ et $0 \leq e \leq 5$, on conclut que $d + 5e$ peut prendre n'importe quelle valeur de l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots, 29\}$. Chacun de ces nombres provient d'une valeur particulière de d et d'une valeur particulière de e. Donc, $24n_2$ peut prendre n'importe quelle valeur de l'ensemble $\{24 \times 0, 24 \times 1, 24 \times 2, \ldots, 24 \times 29\}$, ou $\{0, 24, 48, \ldots, 696\}$. Ce sont les multiples de 24 de 0 à 696.
On ajoute tour à tour chacune des valeurs possibles de $24n_2$ à chacune des 6 valeurs possibles de n_1 pour obtenir les valeurs possibles suivantes de n ($n = n_1 + 24n_2$) :

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 48, 49, 50, 51, 52, 53, \ldots, 696, 697, 698, 699, 700, 701\}$$

Puisque les 6 valeurs possibles de n_1 proviennent chacune d'un couple (a, b) et que les 30 valeurs possibles de n_2 proviennent chacune d'un couple (d, e), alors chacun des nombres de l'ensemble précédent paraît une seule fois lorsque a, b, d et e prennent leurs valeurs possibles.
Il reste à calculer la somme de ces valeurs de n :

$$\begin{aligned}
& 0+1+2+3+4+5+24+25+26+27+28+29+48+49+\cdots+699+700+701 \\
= & \ 0+1+2+3+4+5+(24+0)+(24+1)+(24+2)+(24+3)+(24+4)+(24+5) \\
& +(48+0)+(48+1)+\cdots+(696+3)+(696+4)+(696+5) \\
= & \ (0+1+2+3+4+5)+24\times 6+(0+1+2+3+4+5)+48\times 6 \\
& +(0+1+2+3+4+5)+\cdots+696\times 6+(0+1+2+3+4+5) \\
= & \ 30(0+1+2+3+4+5)+24\times 6+48\times 6+\cdots+696\times 6 \\
= & \ 30(15)+24(6)[1+2+3+\cdots+29] \\
= & \ 30(15)+24(6)\left[\frac{29\times 30}{2}\right] \\
= & \ 63\,090
\end{aligned}$$