Concours Galois 2009 (10^e^ année – Sec. IV)

le mercredi 8 avril 2009

1. Alexa a noté la couleur des cheveux des élèves de sa classe. Le tableau suivant présente ses résultats :

Couleur des cheveux	Nombre d'élèves
Blond	8
Brun	7
Roux	3
Noir	2

   (a) Quel pourcentage des élèves de la classe ont les cheveux blonds ?

   (b) Quel pourcentage des élèves de la classe ont les cheveux roux ou noirs ?

   (c) Si certains élèves blonds de la classe se teignaient les cheveux en noir, combien en faudrait-il pour que 20 % des élèves de la classe aient les cheveux noirs ?

   (d) Combien d'élèves aux cheveux roux faudrait-il ajouter à la classe pour que 32 % des élèves de la classe aient les cheveux roux ?

2. Un carré a pour sommets les points $A(6, 9)$, $B(12, 6)$, $C(t, 0)$ et $D(3, 3)$.

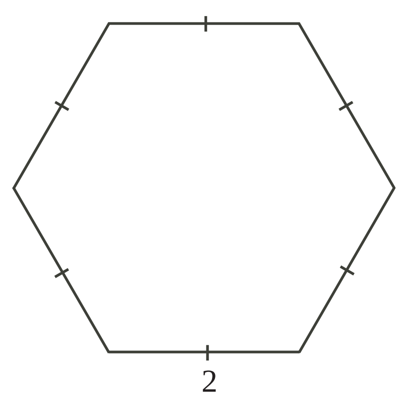
   (a) Déterminer la valeur de t, l'abscisse du sommet C.

   (b) On trace une droite qui passe aux points $O(0, 0)$ et D. Cette droite coupe le côté AB en E. Déterminer les coordonnées du point E.

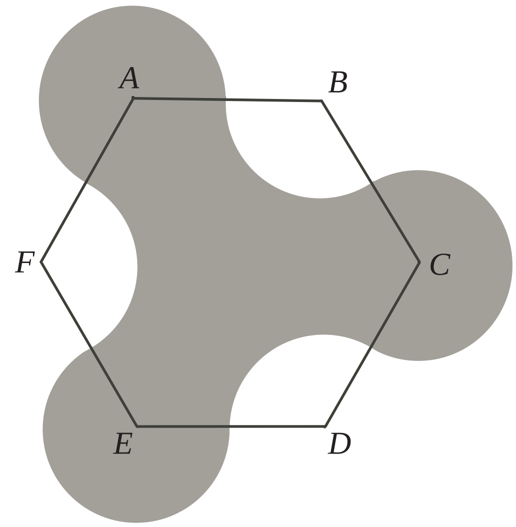
   (c) Déterminer le périmètre du quadrilatère $EBCD$.

3. (a) Déterminer l'aire d'un triangle équilatéral qui a des côtés de longueur 2.

   (b) Déterminer l'aire d'un hexagone régulier qui a des côtés de longueur 2.



(c) Dans la figure ci-contre, l'hexagone régulier $ABCDEF$ a des côtés de longueur 2. Des portions de cercles de rayon 1 et de centres respectifs A, C et E sont tracées à l'extérieur de l'hexagone. Des portions de cercles de rayon 1 et de centres respectifs B, D et F sont tracées à l'intérieur de l'hexagone. Ces six arcs de cercles se joignent pour former une courbe. Déterminer l'aire de la région ombrée renfermée par cette courbe.



4. Soit m un entier strictement positif. L'expression $m!$ représente le produit des entiers de 1 à m, c'est-à-dire que $m! = m(m-1)(m-2)\cdots(3)(2)(1)$. Par exemple, $5! = 5(4)(3)(2)(1)$, ou $5! = 120$.
Il est possible d'écrire certains entiers strictement positifs n sous la forme

$$n = a(1!) + b(2!) + c(3!) + d(4!) + e(5!)$$

de manière que chacune des conditions suivantes soit satisfaite :

- a, b, c, d et e sont des entiers
- $0 \leq a \leq 1$
- $0 \leq b \leq 2$
- $0 \leq c \leq 3$
- $0 \leq d \leq 4$
- $0 \leq e \leq 5$

(a) Déterminer le plus grand entier positif N qu'il est possible d'écrire sous cette forme.

(b) Écrire $n = 653$ sous cette forme.

(c) Démontrer que tous les entiers n (où $0 \leq n \leq N$) peuvent être écrits sous cette forme.

(d) Déterminer la somme de tous les entiers n qui peuvent être écrits sous cette forme avec $c = 0$.