Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Fryer 2009

le mercredi 8 avril 2009

Solutions

1. (a) Le coût total, en dollars, pour faire 100 verres de limonade est égal à $12,00 + 100 \times 0,15$, c'est-à-dire $12,00 + 15,00$, ou 27,00.

   (b) Si elle vend 100 verres de limonade, la somme qu'elle reçoit, en dollars, est égale à $100 \times 0,75$, ou 75,00. Son profit, en dollars, est égal à l'argent reçu moins le coût total, c'est-à-dire $75,00 - 27,00$, ou 48,00.

   (c) Soit v le nombre de verres de limonade qu'Émilie doit ventre pour un profit de 0 \$.
   Le coût total, en dollars, pour faire v verres de limonade est égal à $12,00 + v \times 0,15$, ou $12 + 0,15v$.
   Si elle vend v verres de limonade, elle reçoit $v \times 0,75$ dollars, ou $0,75v$ dollars.
   Pour un profit de 0 \$, il faut que l'argent reçu soit égal au coût.
   On a donc $12 + 0,15v = 0,75v$, d'où $12 = 0,60v$, ou $v = 20$.
   Émilie doit vendre 20 verres de limonade pour obtenir un profit de 0 \$.

   (d) Soit n le nombre de verres de limonade qu'Émilie doit vendre pour un profit d'exactement 17,00 \$. Comme dans la partie (c) le coût total, en dollars, pour faire n verres de limonade est égal à $12 + 0,15n$.
   Comme dans la partie (c), si elle vend n verres de limonade, elle reçoit $0,75n$ dollars.
   Pour un profit de 17,00 \$, il faut que l'argent reçu moins la somme dépensée soit égal à 17,00 \$. On a donc $0,75n - (12,00 + 0,15n) = 17,00$, d'où $0,60n - 12,00 = 17,00$, ou $0,60n = 29,00$. Donc $n = \dfrac{29}{0,6} = \dfrac{290}{6} = 48\frac{1}{3}$.
   Puisque n représente le nombre de verres vendus, n doit être un entier non négatif et ne peut donc pas égaler $48\frac{1}{3}$.
   Donc, il est impossible pour Émilie d'obtenir un profit d'exactement 17,00 \$.

2. (a) On a : $2\nabla 5 = \dfrac{2+5}{1+2\times 5} = \dfrac{7}{11}$.

   (b) On évalue d'abord l'expression entre parenthèses : $(1\nabla 2) = \dfrac{1+2}{1+1\times 2} = \dfrac{3}{3} = 1$
   Donc $(1\nabla 2)\nabla 3 = 1\nabla 3 = \dfrac{1+3}{1+1\times 3} = 1$.
   (Pour n'importe quelle valeur de b ($b > 0$), on a $1\nabla b = \dfrac{1+b}{1+1\times b} = \dfrac{1+b}{1+b} = 1$.)

   (c) Par définition, $2\nabla x = \dfrac{2+x}{1+2x}$. Donc :

$$
\begin{aligned}
\frac{2+x}{1+2x} &= \frac{5}{7} \\
7(2+x) &= 5(1+2x) \\
14+7x &= 5+10x \\
9 &= 3x
\end{aligned}
$$

   Donc $x = 3$.

   (d) Par définition, $x\nabla y = \dfrac{x+y}{1+xy}$.
   On cherche donc les valeurs de x et de y pour lesquelles $\dfrac{x+y}{1+xy} = \dfrac{x+y}{17}$.
   Le numérateur de chaque fraction, soit $x+y$, n'est pas égal à 0, car $x > 0$ et $y > 0$.

Puisque les fractions sont égales et que les numérateurs sont égaux et non nuls, les dénominateurs doivent être égaux.
Donc $1 + xy = 17$, ou $xy = 16$. Les couples d'entiers positifs (x, y), pour lesquels $xy = 16$ sont $(1, 16)$, $(16, 1)$, $(2, 8)$, $(8, 2)$ et $(4, 4)$.

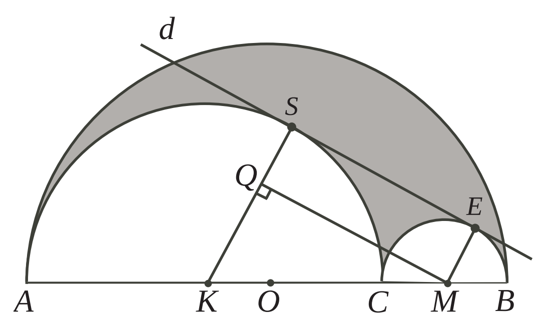
3. (a) On sait que OA et OB sont des rayons du demi-cercle de centre O.
Donc $OA = OB = OC + CB$, d'où $OA = OB = 32 + 36$, ou $OA = OB = 68$.
Donc $AC = AO + OC$, d'où $AC = 68 + 32$, ou $AC = 100$.

(b) Le demi-cercle de centre K a pour rayon AK et $AK = \frac{1}{2}(AC)$, d'où $AK = \frac{1}{2}(100)$, ou $AK = 50$.
L'aire de ce demi-cercle est donc égale à $\frac{1}{2}\pi(AK)^2$, ou $\frac{1}{2}\pi(50)^2$, ou 1250π.

(c) L'aire de la région ombrée est égale à l'aire du demi-cercle de centre O moins l'aire des demi-cercles de centres K et M.
Le rayon MB du petit demi-cercle est égal à $\frac{1}{2}(CB)$, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}(36)$, ou 18.
Donc, l'aire de la région ombrée est égale à :

$$\begin{aligned}
& \tfrac{1}{2}\pi(OB)^2 - \tfrac{1}{2}\pi(AK)^2 - \tfrac{1}{2}\pi(MB)^2 \\
= \; & \tfrac{1}{2}\pi(68)^2 - \tfrac{1}{2}\pi(50)^2 - \tfrac{1}{2}\pi(18)^2 \\
= \; & \tfrac{1}{2}\pi(68^2 - 50^2 - 18^2) \\
= \; & \tfrac{1}{2}\pi(4624 - 2500 - 324) \\
= \; & \tfrac{1}{2}\pi(1800) \\
= \; & 900\pi
\end{aligned}$$

(d) On construit les segments de droites KS et ME, perpendiculaires à la droite d.
Au point M, on abaisse une perpendiculaire MQ au segment KS.
Dans le quadrilatère $MQSE$, $\angle MQS = \angle QSE = \angle SEM = 90°$.
Donc, le quadrilatère $MQSE$ est un rectangle.



Le demi-cercle de centre K a un rayon AK de longueur 50. Donc $KC = KS = 50$.
Le petit demi-cercle de centre M a un rayon MB de longueur 18. Donc $ME = MC = 18$.
Donc $MK = MC + KC$, d'où $MK = 18 + 50$, ou $MK = 68$.
Le quadrilatère $KSEM$ est composé du rectangle $MQSE$ et du triangle MKQ (il est aussi un trapèze). Puisque $QS = ME = 18$, alors $KQ = KS - QS$, d'où $KQ = 50 - 18$, ou $KQ = 32$.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle MKQ, $MK^2 = KQ^2 + QM^2$, d'où $68^2 = 32^2 + QM^2$. Donc $QM = \sqrt{68^2 - 32^2}$, ou $QM = 60$ (puisque $QM > 0$).
L'aire du triangle MKQ est égale à $\frac{1}{2}(KQ)(QM)$, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}(32)(60)$, ou 960.
L'aire du rectangle $MQSE$ est égale à $(QM)(QS)$, c'est-à-dire à $(60)(18)$, ou 1080.
L'aire du quadrilatère $KSEM$ est donc égale à $960 + 1080$, ou 2040.

4. Lorsqu'on calcule une telle somme sans calculatrice, on commence par additionner les chiffres des unités, ce qui nous donne une somme pour cette colonne. On écrit le chiffre des unités de cette somme et les autres chiffres sont utilisés comme retenue dans la colonne des dizaines. Puis, on recommence avec la colonne des dizaines et ainsi de suite.
   Par exemple, si la somme des chiffres d'une colonne et de la retenue est égale à 124, on écrit le chiffre 4 au-dessous de la colonne et on place une retenue de 12 dans la colonne suivante à gauche.

   (a) La somme des chiffres de la colonne des unités est égale à 101×2, ou 202. Le chiffre des unités A est donc égal à 2 et le 20 est utilisé comme retenue dans la colonne des dizaines, car il y a 20 dizaines dans le nombre 202. Donc $A = 2$.

   (b) La colonne des dizaines contient 100 fois le chiffre 2 et la somme de ces chiffres est égale à 100×2, ou 200. Puisqu'il y a une retenue de 20, le total pour la colonne des dizaines est égal à $200 + 20$, ou 220.
   Donc, le chiffre B est égal à 0 et une retenue de 22 est ajoutée à la colonne des centaines. La colonne des centaines contient 99 fois le chiffre 2 et la somme de ces chiffres est égale à 99×2, ou 198. Puisqu'il y a une retenue de 22, le total pour la colonne des centaines est égal à $198 + 22$, ou 220.
   Donc, le chiffre C est égal à 0.

   (c) On démontre que le chiffre du milieu de la somme est 3 en suivant les étapes suivantes :
   – Étape 1 : La somme est composée de 101 chiffres.
   – Étape 2 : Le total, dans la colonne du milieu, est supérieur ou égal à 113.
   – Étape 3 : Le total, dans la colonne du milieu, ne peut étre supérieur ou égal à 114.
   Les étapes 2 et 3 nous disent que le total, dans la colonne du milieu, est égal à 113 et que le chiffre du milieu de la somme est 3. Dans l'argumentation, on utilisera deux fois la propriété suivante qui sera démontrée à la fin :

   Propriété : La retenue, d'une colonne à l'autre, ne peut dépasser 22.

   Les colonnes sont numérotées de gauche à droite.

   <u>Étape 1 : La somme est composée de 101 chiffres.</u>
   Le total de la colonne 1 est égal à 2 plus la retenue de la colonne 2. Il est composé d'un seul chiffre, à moins que la retenue provenant de la colonne 2 soit de 8 ou plus.
   Or, cette retenue est égale à 8 ou plus si le total de la colonne 2 est égal à 80 ou plus. Puisque la somme des chiffres de la colonne 2 est égale à 4, il faudrait que la retenue provenant de la colonne 3 soit égale à 76 ou plus.
   Or, d'après la propriété mentionnée ci-haut, la retenue de peut dépasser 22.
   Donc, le total de la colonne 1 est composé d'un seul chiffre.
   La somme a donc le même nombre de chiffres que le nombre de la 101^{e} rangée, soit 101 chiffres.

   <u>Étape 2 : Le total, dans la colonne du milieu, est supérieur ou égal à 113.</u>
   Puisque la somme est composée de 101 chiffres, le chiffre du milieu est celui sous la colonne 51. (Il y a 50 chiffres avant cette colonne et 50 chiffres après cette colonne, pour un total de 101 chiffres en tout.)
   La somme des chiffres de la colonne 51 est égale à 51×2, ou 102.
   La somme des chiffres de la colonne 52 est égale à 52×2, ou 104.
   La somme des chiffres de la colonne 53 est égale à 53×2, ou 106.
   Ainsi, la retenue provenant de la colonne 53 et ajoutée à la colonne 52 est égale à 10 ou

plus. Donc, le total de la colonne 52 est égal à $104 + 10$ ou plus, c'est-à-dire à 114 ou plus. Ainsi, la retenue provenant de la colonne 52 et ajoutée à la colonne 51 est égale à 11 ou plus. Donc, le total de la colonne 51 est égal à $102 + 11$ ou plus, c'est-à-dire à 113 ou plus.

Étape 3 : Le total, dans la colonne du milieu, ne peut étre supérieur ou égal à 114.
Si le total de la colonne 51 était supérieur ou égal à 114, alors la retenue provenant de la colonne 51 serait supérieure ou égale à $114 - 102$, c'est-à-dire supérieure ou égale à 12.
Pour que la retenue de la colonne 52 soit supérieure ou égale à 12, le total de la colonne 52 doit être supérieur ou égal à 120. Il faut alors que la retenue de la colonne 53 soit supérieure ou égale à $120 - 104$, c'est-à-dire supérieure ou égale à 16.
Pour que la retenue provenant de la colonne 53 soit supérieure ou égale à 16, le total de cette colonne doit être supérieur ou égal à 160. Pour que ce total soit supérieur ou égal à 160, il faut que la retenue provenant de la colonne 54 soit supérieure ou égale à $160 - 106$, c'est-à-dire supérieure ou égale à 54.
Or, d'après la propriété mentionnée ci-haut, la retenue de peut dépasser 22.
Donc, le total de la colonne 51 ne peut être supérieur ou égal à 114.

Le total de la colonne 51 doit donc être égal à 113.
Il reste à démontrer que la propriété est vraie.

Propriété : La retenue, d'une colonne à l'autre, ne peut dépasser 22.
On commence par la colonne des unités.
La somme des chiffres de la colonne 101 est égale à 101×2, ou 202. Cela produit une retenue de 20 qui est ajoutée à la colonne 100.
Le total de la colonne 100 est donc égal à $100 \times 2 + 20$, ou 220. Cela produit une retenue de 22 qui est ajoutée à la colonne 99.
Le total de la colonne 99 est donc égal à $99 \times 2 + 22$, ou 220.
Jusqu'à ce point, aucune retenue ne dépasse 22.
Supposons qu'il y a une colonne n dans laquelle la retenue dépasse 22 pour la première fois lorsqu'on continue à additionner colonne par colonne de droite à gauche.
On sait que $n \leq 98$, puisque les retenues des trois colonnes de droite ne dépassent pas 22.
On sait aussi que la retenue ajoutée à la colonne n ne dépasse pas 22, puisque la retenue qui provient de la colonne n est la première qui dépasse 22.
Examinons la colonne n.
La colonne n comprend n chiffres 2. Donc, la somme de ces chiffres est égale à $2n$.
Puisque $n \leq 98$, la somme de ces chiffres ne peut dépasser 98×2, ou 196.
Pour que la retenue de la colonne n dépasse 22, il faut que le total de cette colonne soit au moins égale à 230. Donc, la retenue qui a été ajoutée à cette colonne doit être au moins égale à $230 - 196$, ou 34.
Or, on sait que cette retenue ne peut dépasser 22, car la retenue qui provient de la colonne n est la première qui dépasse 22 .
On a donc une contradiction, car la retenue qui est ajoutée à la colonne n ne peut être à la fois inférieure ou égale à 22 et supérieure ou égale à 34.
On doit donc rejeter notre supposition qu'il y a une colonne n dans laquelle la retenue dépasse 22 pour la première fois.
Donc, aucune retenue ne peut dépasser 22.
Ceci complète l'argument.