Concours canadien de mathématiques
Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique
Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Fermat 2009

(11^{e} année – Secondaire V)

le mercredi 18 février 2009

Solutions

1. On a : $3 + 3^3 = 3 + 27 = 30$

Réponse : (D)

2. Puisque $3 \times 2 + 8 = \nabla + 5$, alors $\nabla = 6 + 8 - 5 = 9$.

Réponse : (E)

3. Puisque $\angle TQR = 125^\circ$, alors $\angle TQP = 180^\circ - \angle TQR$, d'où $\angle TQP = 180^\circ - 125^\circ$, ou $\angle TQP = 55^\circ$.
Puisque la somme de la mesure des angles d'un triangle est égale à 180°, alors :

$$\angle PSQ = 180^\circ - \angle SPQ - \angle SQP = 180^\circ - 30^\circ - 55^\circ = 95^\circ$$

Puisque les angles TSU et PSQ sont opposés par le sommet, alors $\angle TSU = \angle PSQ$, ou $\angle TSU = 95^\circ$. Donc $x = 95$.

Réponse : (C)

4. Puisque $w = 4$, $x = 9$ et $z = 25$, alors :

$$\sqrt{\frac{w}{x}} + \sqrt{\frac{x}{z}} = \sqrt{\frac{2^2}{3^2}} + \sqrt{\frac{3^2}{5^2}} = \frac{2}{3} + \frac{3}{5} = \frac{10}{15} + \frac{9}{15} = \frac{19}{15}$$

Réponse : (B)

5. Puisque $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$, alors $1 - 4(3-1)^{-1} = 1 - 4(2)^{-1} = 1 - 4(\frac{1}{2}) = 1 - 2 = -1$.

Réponse : (A)

6. Au départ, les 64 cubes formaient une structure composée de 4 couches horizontales de 16 petits cubes. Si on examine la couche du dessous, on s'aperçoit qu'il y a 6 cubes qui qui n'ont aucun cube au-dessus. Il manque donc 3 cubes au-dessus de chacun de ces 6 cubes. Il ne manque aucun autre cube.
Le nombre de cubes manquants est égal à 6(3), ou 18. Le nombre de petits cubes qui restent dans la structure est donc égal à $64 - 18$, ou 46.

Réponse : (A)

7. *Solution 1*
Puisque $\sqrt{n^2 + n^2 + n^2 + n^2} = 64$, alors $\sqrt{4n^2} = 64$, d'où $2n = 64$, puisque $n > 0$.
Donc $n = 32$.

Solution 2
Puisque $\sqrt{n^2 + n^2 + n^2 + n^2} = 64$, alors $\sqrt{4n^2} = 64$.
Donc $4n^2 = 64^2$, ou $4n^2 = 4096$, d'où $n^2 = 1024$.
Puisque $n > 0$, alors $n = \sqrt{1024}$, ou $n = 32$.

Réponse : (D)

8. Pour maximiser le nombre de chansons qu'elle peut jouer en 3 heures, Gabrielle devrait utiliser autant de chansons courtes que possible. (En remplaçant une chanson longue par une chanson courte, elle diminue le temps utilisé.)
Si Gabrielle utilise toutes les 50 chansons courtes de sa collection, elle utilisera 150 minutes.

Il lui reste 30 minutes ($180 - 150 = 30$). Elle peut donc jouer 6 chansons longues ($30 \div 5 = 6$) qui ont chacune une durée de 5 minutes.
En tout, elle peut jouer un maximum de 56 chansons ($50 + 6 = 56$).

Réponse : (C)

9. Il y a quatre ♠ dans chacune des trois premières colonnes. Il faut donc déplacer un ♠ de chacune de ces colonnes pour que chacune ne contienne que trois ♠.
Il faut donc déplacer au moins trois ♠ en tout.
Si on déplace le ♠ du coin supérieur gauche au coin inférieur droit,

	♠	♠	♠	
♠	♠	♠		♠
♠	♠			
♠	♠	♠	♠	
		♠		♠

le ♠ de la quatrième rangée, troisième colonne à la cinquième rangée, quatrième colonne

	♠	♠	♠	
♠	♠	♠		♠
♠	♠			
♠	♠		♠	
		♠	♠	♠

et le ♠ de la deuxième rangée, deuxième colonne à la troisième rangée, cinquième colonne,

	♠	♠	♠	
♠		♠		♠
♠	♠			♠
♠	♠		♠	
		♠	♠	♠

on obtient trois ♠ dans chaque rangée et chaque colonne.
Puisqu'il faut déplacer au moins trois ♠ et que l'on peut réussir en déplaçant trois ♠, alors le nombre de ♠ qu'il faut déplacer est bien 3.
(D'autres combinaisons de trois déplacements sont possibles.)

Réponse : (C)

10. Au départ, le bas de l'échelle de 25 m est à 7 m du mur.
Soit h m la hauteur initiale du haut de l'échelle.
D'après le théorème de Pythagore, $h^2 + 7^2 = 25^2$, ou $h^2 + 49 = 625$.
Donc $h^2 = 625 - 49$, ou $h^2 = 576$. Donc $h = \sqrt{576}$, ou $h = 24$, puisque $h > 0$.
Lorsque le haut de l'échelle a glissé vers le bas sur une distance de 4 m, il se trouve à 20 m au-dessus du sol ($24 - 4 = 20$).
Soit d m la nouvelle distance du bas de l'échelle jusqu'au mur.
D'après le théorème de Pythagore, $20^2 + d^2 = 25^2$, d'où $d^2 = 25^2 - 20^2$, ou $d^2 = 225$.
Puisque $d > 0$, alors $d = 15$.
Le bas de l'échelle a donc été déplacé sur une distance de 8 m ($15 - 7 = 8$).

Réponse : (E)

11. Puisque le résultat doit être vrai pour n'importe quelles valeurs strictement positives de m et de n telles que $m < n$, on choisit $m = 1$ et $n = 2$.
On obtient $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$ et $\frac{m+3}{n+3} = \frac{4}{5}$.
Dans ce cas, on a $\frac{m+3}{n+3} > \frac{m}{n}$ et les autres choix de réponse ne conviennent pas. Donc, la réponse doit être (D).
(On aurait pu le démontrer de façon algébrique en partant de $m < n$, d'où $3m < 3n$, puis $mn + 3m < mn + 3n$, puis $m(n + 3) < n(m + 3)$, puis $\frac{m}{n} < \frac{m+3}{n+3}$.)

Réponse : (D)

12. De 5000 à 6000, tous les nombres, à l'exception de 6000, ont un chiffre des milliers égal à 5.
On remarque que pour le nombre 6000, le chiffre des milliers n'est pas égal à la somme des trois autres chiffres.
On cherche donc des entiers de la forme $5xyz$ de manière que $x + y + z = 5$.
Les choix possibles des trois chiffres x, y et z sont : 5, 0, 0 ; 4, 1, 0 ; 3, 2, 0 ; 3, 1, 1 ; 2, 2, 1.
Chaque choix de trois chiffres *différents* (par exemple, 4, 1, 0) nous donne 6 arrangements : 410, 401, 140, 104, 041, 014.
Chaque choix de trois chiffres dont *deux sont identiques* (par exemple, 5, 0, 0) nous donne 3 arrangements : 500, 050, 005.
Donc, le choix 5, 0, 0, le choix 3, 1, 1 et le choix 2, 2, 1 forment 3 entiers chacun, tandis que le choix 4, 1, 0 et le choix 3, 2, 0 forment 6 entiers chacun.
Donc, le nombre d'entiers qui vérifient la condition donnée est égal à $3(3) + 2(6)$, ou 21.

Réponse : (C)

13. Puisque x est un entier, alors $x + 1$ est un entier.
Puisque $\frac{-6}{x+1}$ doit être un entier, alors $x + 1$ doit être un diviseur de -6.
Il y a donc 8 valeurs possibles de $x + 1$, soit -6, -3, -2, -1, 1, 2, 3 et 6.
Il y a donc 8 valeurs possibles de x, soit -7, -4, -3, -2, 0, 1, 2 et 5.

Réponse : (A)

14. Puisque les trois entiers sur n'importe quelle ligne droite ont un produit de 3240 et qu'ils incluent 45, les deux autres entiers sur chaque droite doivent donc avoir un produit de $\frac{3240}{45}$, ou 72.
Les paires d'entiers possibles sont 1 et 72, 2 et 36, 3 et 24, 4 et 18, 6 et 12, ainsi que 8 et 9.
Ces paires d'entiers ont pour sommes respectives 73, 38, 27, 22, 18 et 17.
Pour maximiser la somme des huit nombres qui entourent 45, on choisit les paires qui ont les plus grandes sommes. On choisit donc les quatre premières paires.
Donc, la plus grande somme possible des huit nombres qui entourent 45 est égale à 73+38+27+22, ou 160.

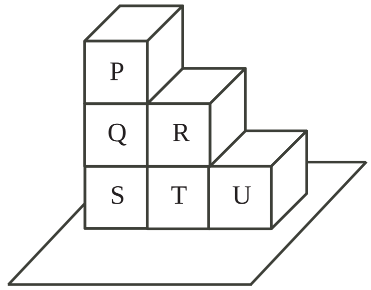
Réponse : (E)

15. Supposons que l'école Desloges compte 1000 élèves.
Lundi, 100 élèves étaient donc absents et 900 élèves étaient présents.
Mardi, 10 % des 900 élèves qui étaient présents lundi, soit 90 élèves ($0{,}1(900) = 90$), étaient absents. Les autres 810 élèves ($900 - 90 = 810$) qui étaient présents lundi sont présents mardi.
De même, 10 % des 100 élèves qui étaient absents lundi, soit 10 élèves ($0{,}1(100) = 10$), étaient présents mardi. Les autres 90 élèves ($100 - 10 = 90$) qui étaient absents lundi sont toujours absents mardi.

Donc, 820 élèves ($810 + 10 = 820$) étaient présents mardi. Donc, $\frac{820}{1000}$, ou $\frac{82}{100}$, ou 82 % des élèves de l'école étaient présents mardi.

Réponse : (B)

16. On nomme les six dés comme suit :



La somme maximale des numéros sur les 21 faces exposées se produit lorsque l'on maximise la somme des numéros sur les faces exposées de chaque dé.
Le dé P a 5 faces exposées. La somme des numéros sur ses faces exposées est maximisée lorsque la face 1 est cachée. La somme est égale à $2 + 3 + 4 + 5 + 6$, ou 20.
Les dés Q et S ont chacun 3 faces exposées. Deux de ces faces sont opposées et leurs numéros ont donc une somme de 7. Pour maximiser la somme des numéros sur les faces exposées de ces dés, on place les dés de manière que le numéro sur la face exposée non appariée soit un 6. (Ce numéro paraîtra du côté gauche de la pile.) La somme des numéros sur les faces exposées de chacun de ces dés est égale à $6 + 7$, ou 13.
Les dés R et U ont chacun 4 faces exposées. Deux de ces faces sont opposées et leurs numéros ont donc une somme de 7. Pour maximiser la somme des numéros sur les faces exposées de ces dés, on place les dés de manière que les numéros sur les faces non appariées soient un 5 et un 6 (sur le dessus et du côté droit de la pile). La somme des numéros sur les faces exposées de chacun de ces dés est égale à $5 + 6 + 7$, ou 18.
Le dé T a 2 faces exposées et ces faces sont opposées l'une à l'autre. Les numéros sur ces faces exposées ont donc une somme de 7.
Donc, la somme maximale des numéros sur les 21 faces exposées de ces dés est égale à $20 + 13 + 13 + 18 + 18 + 7$, ou 89.

Réponse : (C)

17. Soit r le rayon de la région ombrée.
La longueur du demi-cercle est égale à la moitié de la circonférence du cercle correspondant, soit $\frac{1}{2}(2\pi r)$, ou πr.
Donc, le périmètre de la région est égal à $\pi r + 2r$.
Puisque la région a un périmètre de 20, alors $\pi r + 2r = 20$, ou $r(\pi + 2) = 20$, ou $r = \dfrac{20}{\pi + 2}$.
L'aire de la région ombrée est égale la moitié de l'aire du cercle correspondant de même rayon.
Elle est donc égale à $\frac{1}{2}\pi \left(\dfrac{20}{\pi + 2}\right)^2$, ou environ 23,768. Parmi les choix de réponse, le nombre 23,8 est la meilleure approximation de cette aire.

Réponse : (B)

18. Soit d km la longueur de sa route.
Puisque Hana arrive 1 minute en avance lorsqu'elle conduit à 75 km/h et 1 minute en retard lorsqu'elle conduit à 70 km/h, il y a une différence de 2 minutes, ou $\frac{1}{30}$ d'heure entre ces deux temps.

À une vitesse de 75 km/h, elle met $\dfrac{d}{75}$ heures pour faire le trajet, tandis qu'à 70 km/h, elle met $\dfrac{d}{70}$ heures pour le faire. Donc :

$$\begin{aligned}\frac{d}{70}-\frac{d}{75} &= \frac{1}{30}\\ 75d-70d &= \frac{75(70)}{30}\\ 5d &= 25(7)\\ d &= 35\end{aligned}$$

Le chemin suivi a une longueur de 35 km.

Réponse : (B)

19. Puisque $2^x = 15$ et $15^y = 32$, alors $(2^x)^y = 32$, ou $2^{xy} = 32$.
Puisque $2^5 = 32$, alors $xy = 5$.

Réponse : (A)

20. Puisque le cercle a un rayon de 1, son aire est égale à $\pi(1^2)$, ou π.
Puisque le carré et le cercle ont la même aire, le carré a des côtés de longueur $\sqrt{\pi}$.
Soit M le milieu du segment de droite PQ.
Puisque PQ est une corde du cercle, alors OM est perpendiculaire au segment PQ.
Puisque OM est perpendiculaire à PQ et que O est le centre du carré, alors la longueur de OM est la moitié de la longueur des côtés du carré. Donc $OM = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle OPM, $PM^2 = OP^2 - OM^2$, d'où $PM^2 = 1^2 - \left(\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\right)^2$, ou $PM^2 = 1 - \frac{1}{4}\pi$.
Puisque $PQ = 2PM$, alors $PQ = 2\sqrt{1-\frac{1}{4}\pi}$, ou $PQ = \sqrt{4(1-\frac{1}{4}\pi)}$, ou $PQ = \sqrt{4-\pi}$.

Réponse : (A)

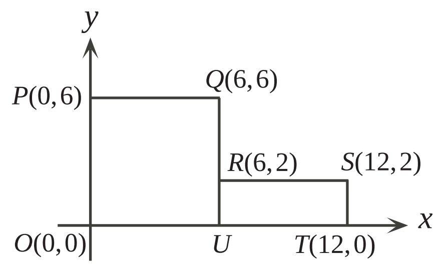
21. *Solution 1*
Puisqu'on cherche le nombre maximum de personnes, on examine si le choix de réponse le plus grand, soit 80, pourrait être le bon.
Est-il possible que 80 personnes aient mangé du gâteau et de la crème glacée ?
Si c'est possible, alors au moins 80 personnes ont mangé du gâteau et au moins 120 personnes ($\frac{3}{2}(80) = 120$) ont mangé de la crème glacée. (Il peut y avoir des gens qui ont été comptés deux fois.)
Est-ce possible ?
Oui c'est possible si exactement 120 personnes ont mangé de la crème glacée et exactement 80 personnes ont mangé du gâteau et si ces 80 personnes ont également mangé de la crème glacée. Donc, il est possible qui 80 personnes aient mangé du gâteau et de la crème glacée. Donc, la réponse doit être (D).

Solution 2
Soit x le nombre de personnes qui ont mangé du gâteau seulement, y le nombre de personnes qui ont mangé de la crème glacée, d le nombre de personnes qui ont mangé les deux et r le nombre de personnes qui n'ont rien mangé.
On sait que $x + y + d + r = 120$. Donc $x + y + d = 120 - r$.
On sait que le nombre total de personnes qui ont mangé du gâteau est égal à $x + d$ et que le

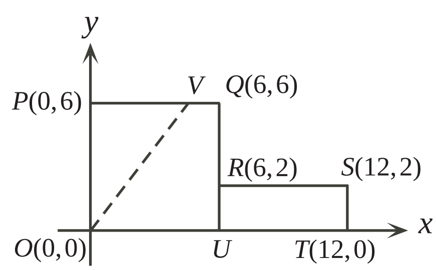
nombre total de personnes qui ont mangé de la crème glacée est égal à $y+d$. Donc $\dfrac{y+d}{x+d}=\dfrac{3}{2}$, d'où $2(y+d)=3(x+d)$, ou $2y=3x+d$, ou $y=\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}d$.
Donc $x+\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}d+d=120-r$, ou $\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}d=120-r$.
On multiplie chaque membre par 2 pour obtenir $5x+3d=240-2r$.
Puisque x, d et n sont non négatifs, alors le membre de gauche est inférieur ou égal à 240. Donc, d doit être inférieur ou égal à $\frac{1}{3}(240)$, ou 80. Il y a égalité lorsque $y=r=0$.
On a vu, dans la Solution 1, que $d=80$ est possible.

Réponse : (D)

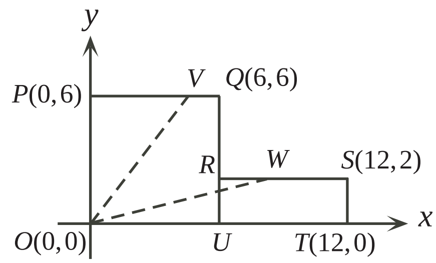
22. On prolonge le segment QR pour qu'il coupe l'axe des abscisses au point $U(6,0)$.



L'aire de la figure $OPQRST$ est égale à la somme de l'aire du carré $OPQU$ (qui a des côtés de longueur 6 et qui a donc une aire de 36) et de l'aire du rectangle $RSTU$ (qui a une base de 6 et une hauteur de 2 et qui a donc une aire de 12).
La figure $OPQRST$ a donc une aire de 48. Si on coupe cette figure en trois parties ayant une même aire, cette aire doit donc être égale à 16.
Soit V le premier point sur le contour (en partant de P et en allant vers la droite) de manière que la droite qui passe aux points O et V coupe la figure de manière à produire un morceau avec une aire de 16.
Puisque l'aire du triangle OPQ est la moitié de l'aire du carré $OPQU$, elle est égale à 18. Donc, V est situé à la gauche de Q sur le segment PQ.
Donc, V a pour coordonnées $(v,6)$, v étant un nombre quelconque.



On considère le triangle OPV. Sa base OP a une longueur de 6 et sa hauteur PV a pour longueur v.
Puisque le triangle OPV a une aire de 16, alors $\frac{1}{2}(6)(v)=16$, d'où $3v=16$, ou $v=\frac{16}{3}$.
Le segment OV a donc une pente de $\dfrac{6}{\frac{16}{3}}$, ou $\frac{9}{8}$.
Soit W le deuxième point sur le contour qui coupe la figure de manière à produire un morceau avec une aire de 16.
Puisque l'aire du triangle OTS est égale à $\frac{1}{2}(OT)(TS)$, ou $\frac{1}{2}(12)(2)$, ou 12 (ce qui est moins de $\frac{1}{3}$ de l'aire totale) et que l'aire du trapèze $ORST$ est égale à $\frac{1}{2}(RS+OT)(ST)$, ou $\frac{1}{2}(6+12)(2)$, ou 18 (ce qui est plus que $\frac{1}{3}$ de l'aire totale), alors le point W est situé sur le segment RS.



Soit $(w, 2)$ les coordonnées de W, w étant un nombre quelconque.
On veut que le trapèze $WSTO$ ait une aire de 16. Donc :

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}(WS + OT)(ST) &= 16 \\
\tfrac{1}{2}(12 - w + 12)(2) &= 16 \\
24 - w &= 16 \\
w &= 8
\end{aligned}$$

Donc, le point W a pour coordonnées $(8, 2)$ et le segment OW a donc une pente de $\frac{2}{8}$, ou $\frac{1}{4}$.
La somme des deux pentes est égale à $\frac{9}{8} + \frac{1}{4}$, ou $\frac{11}{8}$.

Réponse : (E)

23. On additionne la deuxième et la troisième équation, membre par membre pour obtenir :

$$\begin{aligned}
ac + bd + ad + bc &= 77 \\
ac + ad + bc + bd &= 77 \\
a(c + d) + b(c + d) &= 77 \\
(a + b)(c + d) &= 77
\end{aligned}$$

Puisque chacun des nombres a, b, c et d est un entier strictement positif, alors $a+b$ et $c+d$ sont des entiers positifs et chacun est au moins égal à 2.
Puisque le produit de $a + b$ et de $c + d$ est égal à $77 = 7 \times 11$ (7 et 11 étant premiers), alors un facteur doit être égal à 7 et l'autre doit être égal à 11.
Donc $a + b + c + d = 7 + 11$, ou $a + b + c + d = 18$.
(Il est possible de démontrer que $(a, b, c, d) = (5, 2, 4, 7)$ est une solution du système.)

Réponse : (D)

24. Les trois machines fonctionnent de manière que si les deux nombres de la sortie ont un diviseur commun supérieur à 1, alors les deux nombres de l'entrée doivent avoir un diviseur commun supérieur à 1.
Pour le vérifier, on considère chaque machine séparément. On utilise le fait que si deux nombres sont des multiples de d, alors leur somme et leur différence sont aussi des multiples de d.
Supposons que (m, n) est une entrée de la machine A. La sortie est donc (n, m). Si n et m ont un diviseur commun supérieur à 1, alors m et n en ont un aussi.
Supposons que (m, n) est une entrée de la machine B. La sortie est donc $(m + 3n, n)$. Si $m + 3n$ et n ont un diviseur commun d, alors d est un diviseur de $(m + 3n) - n - n - n$, c'est-à-dire de m, puisque chaque terme de la soustraction est un multiple de d. Donc, m et n ont un diviseur commun d.
Supposons que (m, n) est une entrée de la machine C. La sortie est donc $(m - 2n, n)$. Si $m - 2n$ et n ont un diviseur commun d, alors d est un diviseur de $(m - 2n) + n + n$, c'est-à-dire de m, puisque chaque terme de l'addition est un multiple de d. Donc, m et n ont un diviseur commun d.

Dans chaque cas, tout diviseur commun des nombres de l'entrée est un diviseur commun des nombres de la sortie.

On examine les nombres qui paraissent dans les choix de réponse. On écrit les six nombres en factorisation première :

$$\begin{aligned}
2009 &= 7(287) = 7(7)(41) \\
1016 &= 8(127) = 2(2)(2)(127) \\
1004 &= 4(251) = 2(2)(251) \\
1002 &= 2(501) = 2(3)(167) \\
1008 &= 8(126) = 8(3)(42) = 16(3)(3)(7) = 2(2)(2)(2)(3)(3)(7) \\
1032 &= 8(129) = 8(3)(43) = 2(2)(2)(3)(43)
\end{aligned}$$

Parmi les nombres 1002, 1004, 1008, 1016 et 1032, seul le nombre 1008 a un diviseur commun avec 2009, soit 7.
Puisque 2009 et 1008 ont un diviseur commun 7, alors quelle que soit l'entrée qui a produit la sortie $(2009, 1008)$, 7 doit être un diviseur commun des deux nombres de l'entrée. Il en est de même des deux nombres qui servent d'entrée à n'importe quelle étape, peu importe les machines utilisées.
Donc, $(2009, 1008)$ ne peut provenir du couple initial $(0, 1)$.

Remarques

- Cet argument ne nous dit pas que les autres couples peuvent être le résultat du couple initial $(0, 1)$. Il démontre seulement que $(2009, 1008)$ ne peut provenir de ce couple initial.
- Il est possible, avec un certain effort, de partir du couple initial $(0, 1)$ pour obtenir chacun des autres couples. (Le processus est plus facile à suivre qu'à décrire !)
  On remarque d'abord que si la sortie de la machine A est (a, b), alors l'entrée était (b, a), puisque la machine A intervertit l'ordre des nombres du couple.
  De plus, si la sortie de la machine B est (a, b), alors son entrée était $(a - 3b, b)$, puisque la machine B ajoute trois fois le deuxième nombre au premier.
  Enfin si la sortie de la machine C est (a, b), alors son entrée était $(a + 2b, b)$, puisque la machine C soustrait deux fois le deuxième nombre du premier.
  On considère le couple $(2009, 1016)$. On cherche une suite d'opérations qui nous permettent de reculer de $(2009, 1016)$ à $(0, 1)$. On cherche n'importe quelle suite qui fonctionne plutôt qu'une suite particulière.

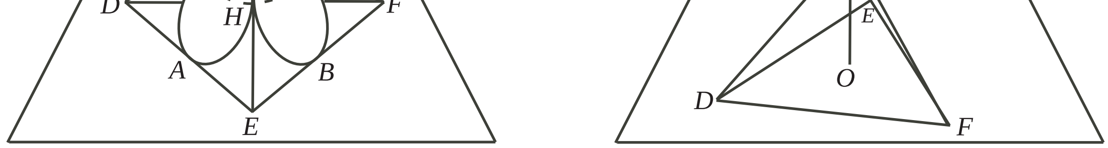
  Avant de procéder, on remarque que si le couple (m, n) est utilisé comme entrée dans la machine B et que la sortie est utilisée comme entrée dans la machine C, on a pour sortie $((m+3n)-2n, n)$, ou $(m+n, n)$. Donc, si l'utilisation de la machine B suivie de la machine C (on dira « machine BC ») donne une sortie (a, b), l'entrée devait être $(a-b, b)$. On utilisera cette combinaison pour travailler à rebours et en arriver à $(0, 1)$. Cela simplifiera les choses et évitera les nombres négatifs.
  On utilise un tableau et notre stratégie, à chaque étape, est d'obtenir des nombres de plus en plus petits :

Sortie	Machine	Entrée
$(2009, 1016)$	BC	$(993, 1016)$
$(993, 1016)$	A	$(1016, 993)$
$(1016, 993)$	BC	$(23, 993)$
$(23, 993)$	A	$(993, 23)$
$(993, 23)$	BC, 43 fois	$(4, 23)$
$(4, 23)$	A	$(23, 4)$
$(23, 4)$	BC, 5 fois	$(3, 4)$
$(3, 4)$	A	$(4, 3)$
$(4, 3)$	BC	$(1, 3)$
$(1, 3)$	A	$(3, 1)$
$(3, 1)$	B	$(0, 1)$

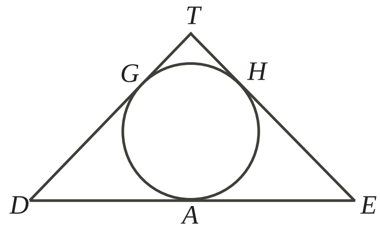
En procédant à rebours dans ce tableau, on voit comment on peut commencer par le couple $(0, 1)$ pour en arriver au couple $(2009, 1016)$.
De façon semblable, il est possible d'en arriver à chacun des couples $(2009, 1004)$, $(2009, 1002)$ et $(2009, 1032)$.

Réponse : (D)

25. Soit A, B et C les points où les cercles sont tangents au plan.
Chaque cercle est contenu dans un plan. Ce plan coupe le plan initial le long d'une droite qui passe à un des points A, B et C et il est tangent au cercle à ce point.
Soit D, E et F les points d'intersection de ces trois droites, A étant sur DE, B étant sur EF et C étant sur FD.
Par symétrie, $DE = EF = FD$. De plus, A, B et C sont les milieux de ces segments. (De façon plus formelle, on peut tirer ces conclusions puisque la configuration n'est pas changée lorsqu'on lui fait subir une rotation de 120° ou des réflexions par rapport aux plans verticaux qui passent par T et chacun des points D, E et F.)
Donc, le triangle DEF est équilatéral. Soit O le centre de son cercle inscrit. O est donc le point d'intersection des bissectrices du triangle DEF. Puisque ce triangle est équilatéral, ses bissectrices sont aussi ses médianes, ses médiatrices et ses hauteurs.
Soit G le point de contact des cercles contenant C et A, H le point de contact des cercles contenant A et B et J le point de contact des cercles contenant B et C. Par symétrie, on a $GH = HJ = JG$. On cherche le rayon du cercle qui passe par les points G, H et J.
On trace les droites DG, EH et FJ. Ces droites sont tangentes aux cercles initiaux aux points respectifs G, H et J. Elles sont aussi concourantes. Soit T leur point d'intersection. T est directement au-dessus du point O. (Ces conclusions proviennent aussi de la symétrie par rotation et par réflexion.) Le tétraèdre $TDEF$ a pour base le triangle équilatéral DEF et ses faces sont des triangles congruents.

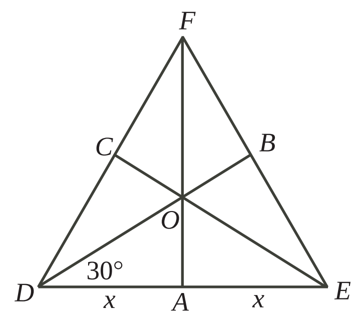


On considère le triangle DET qui est une face latérale du tétraèdre. Le cercle initial (de rayon 10) qui contient A est tangent aux trois côtés du triangle DET aux points de contact A, G et H.



De plus, le triangle DET est incliné à un angle de 45° par rapport au plan horizontal.
Puisque A est le milieu de DE, alors OA est perpendiculaire à DE. De plus, TA est perpendiculaire à DE.
Puisque le triangle DET est incliné à un angle de 45° par rapport à l'horizontale, alors $\angle TAO = 45°$.
Le triangle TAO est rectangle en O (puisque T est directement au-dessus de O). Donc puisque $\angle TAO = 45°$, le triangle TAO est un triangle remarquable 45°-45°-90°. Donc $TA = \sqrt{2}AO$.

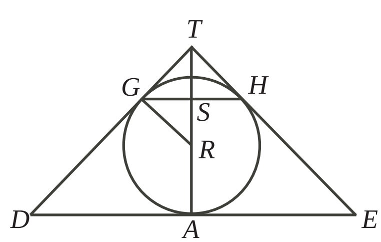
On se penche maintenant sur les dimensions du triangle DEF.
Soit $DE = 2x$. Donc, $DA = AE = x$ et le triangle DEF est équilatéral avec des côtés de longueur $2x$.



DO est la bissectrice de l'angle EDF. Donc $\angle ODA = 30°$ et OA est perpendiculaire à DE. Le triangle DOA est donc un triangle remarquable 30°-60°-90°. Donc $OA = \frac{1}{\sqrt{3}}DA$, ou $OA = \frac{1}{\sqrt{3}}x$, et $OD = \frac{2}{\sqrt{3}}DA$, ou $OD = \frac{2}{\sqrt{3}}x$.
Puisque $TA = \sqrt{2}AO$, alors $TA = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}x$.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle TAD, $TD = \sqrt{TA^2 + DA^2}$, d'où $TD = \sqrt{x^2 + \frac{2}{3}x^2}$, ou $TD = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}x$, puisque $x > 0$.

Ainsi dans le triangle DET, on a $DE = 2x$, $DA = AE = x$, $TD = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}x$ et $TA = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}x$.

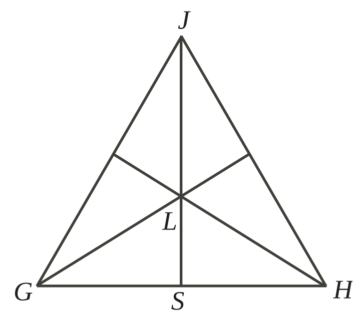
Soit R le centre du cercle inscrit dans le triangle DET. (Par symétrie, R est situé sur TA.)
On trace le segment RG. Puisque RG est un rayon du cercle, alors $RG = 10$ et RG est perpendiculaire à DT.
On trace le segment GH. Soit S le point d'intersection de GH et de TA. Par symétrie, GH est perpendiculaire à TA.



Les triangles TSG, TGR et TAD sont semblables, puisqu'ils sont rectangles et qu'ils ont un angle commun en T.
On cherche la longueur SG.
Puisque les triangles TSG et TAD sont semblables, $\dfrac{SG}{TG} = \dfrac{AD}{TD} = \dfrac{x}{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}x}$, d'où $SG = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}TG$.

Puisque les triangles TGR et TAD sont semblables, $\dfrac{TG}{GR} = \dfrac{TA}{AD} = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}x}{x}$, d'où $TG = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}GR$, ou $TG = 10\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.
Donc $SG = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\left(10\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$, ou $SG = 10\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$, ou $SG = 2\sqrt{10}$.

On considère le triangle GHJ. Il est équilatéral. S est le milieu de GH et $SG = 2\sqrt{10}$. Soit L le centre du cercle inscrit dans ce triangle.



L est aussi le centre du cercle qui passe par les points G, H et J. En effet, $LG = LJ = LH$ et LG est donc le rayon de ce cercle.
Puisque $OD = \frac{2}{\sqrt{3}}AD$, alors $LG = \frac{2}{\sqrt{3}}SG$, car les triangles DEF et GHJ sont équilatéraux et les rapports $OD : AD$ et $LG : SG$ sont égaux. Donc $LG = \frac{4\sqrt{10}}{\sqrt{3}}$, ou $LG = \frac{4}{3}\sqrt{30}$, ce qui est le rayon du cercle.
Puisque $\frac{4}{3}\sqrt{30} \approx 7{,}303$, le choix de réponse 7,3, est la meilleure approximation du rayon.

Réponse : (C)