



Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation
en mathématiques et en informatique,
Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Fermat (11^e année – Sec. V)

Wednesday, February 18, 2009

Avec la contribution de:



Avec la participation de:



LA PARFAITE ALLIANCE COMMUNAUTAIRE^{MC}

**Samson Béclair
Deloitte
& Touche**
Comptables
agrés



Durée: 60 minutes ©2008 Centre d'éducation en mathématiques et en informatique

L'usage de la calculatrice est permis.

Directives

1. Attendez le signal du surveillant ou de la surveillante avant d'ouvrir le cahier.
2. Il est permis d'utiliser du papier brouillon, ainsi qu'une règle et un compas.
3. Assurez-vous de bien comprendre le système de codage des feuilles-réponses. Au besoin, demandez à l'enseignante ou à l'enseignant d'apporter des précisions. Il faut coder avec un crayon à mine, préférablement un crayon HB. Il faut bien remplir les cercles.
4. Dans la case dans le coin supérieur gauche de la feuille-réponse, écrivez en lettres moulées le nom de votre école, le nom de la ville et celui de la province.
5. **Sur la feuille-réponse, assurez-vous de bien coder votre nom, votre âge, votre sexe, votre année scolaire et le concours que vous passez. Seuls ceux qui le font pourront être considérés candidats officiels.**
6. Le concours est composé de questions à choix multiple. Chaque question est suivie de cinq choix de réponse, notés **A**, **B**, **C**, **D** et **E**, dont un seul est juste. Une fois le choix établi, remplissez le cercle approprié sur la feuille-réponse.
7. Notation: Chaque réponse juste vaut 5 points dans la partie A, 6 points dans la partie B et 8 points dans la partie C.
Une réponse fautive n'est *pas* pénalisée.
Chaque question laissée sans réponse vaut 2 points, jusqu'à un maximum de 10 questions.
8. Les figures *ne sont pas* dessinées à l'échelle. Elles servent d'appui visuel seulement.
9. Après le signal du surveillant ou de la surveillante, vous aurez 60 minutes pour terminer.

Le nom de quelques-uns des candidats ayant obtenu les meilleurs résultats sera publié sur notre site web à <http://www.cemc.uwaterloo.ca>.

Notation: Une réponse fautive n'est pas pénalisée.

On accorde 2 points par question laissée sans réponse, jusqu'à un maximum de 10 questions.

Partie A (5 points par bonne réponse)

1. Quelle est la valeur de $3 + 3^3$?

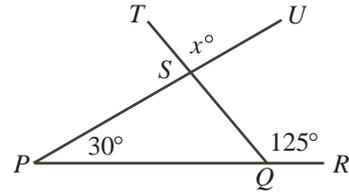
- (A) 12 (B) 18 (C) 216 (D) 30 (E) 36

2. Si $3 \times 2 + 8 = \nabla + 5$, alors ∇ est égal à :

- (A) 14 (B) 25 (C) 19 (D) 17 (E) 9

3. Dans la figure ci-contre, PQR , QST et PSU sont des segments de droites. Quelle est la valeur de x ?

- (A) 75 (B) 85 (C) 95
(D) 125 (E) 155



4. Si $w = 4$, $x = 9$ et $z = 25$, alors $\sqrt{\frac{w}{x}} + \sqrt{\frac{x}{z}}$ est égal à :

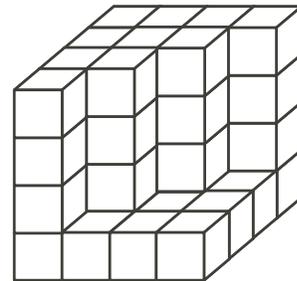
- (A) $\frac{5}{8}$ (B) $\frac{19}{15}$ (C) $\frac{77}{225}$ (D) $\frac{181}{225}$ (E) $\frac{2}{5}$

5. Quelle est la valeur de $1 - 4(3 - 1)^{-1}$?

- (A) -1 (B) $-\frac{3}{2}$ (C) 9 (D) 6 (E) $\frac{11}{3}$

6. Soixante-quatre petits cubes identiques ont été placés pour former une structure de dimensions $4 \times 4 \times 4$, puis certains des petits cubes ont été enlevés du devant de la structure, comme on le voit dans la figure ci-contre. Aucun cube caché de la vue n'a été enlevé. Combien de petits cubes reste-t-il dans la structure ?

- (A) 46 (B) 40 (C) 52
(D) 55 (E) 49



7. Si $n > 0$ et $\sqrt{n^2 + n^2 + n^2 + n^2} = 64$, quelle est la valeur de n ?

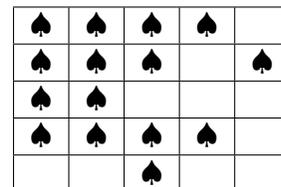
- (A) $\sqrt{8}$ (B) 16 (C) 4 (D) 32 (E) $\sqrt{2}$

8. Gabrielle a une collection de 50 chansons qui ont chacune une durée de 3 minutes et de 50 chansons qui ont chacune une durée de 5 minutes. Quel est le nombre maximum de chansons de sa collection qu'elle peut jouer en 3 heures ?

- (A) 100 (B) 36 (C) 56 (D) 60 (E) 45

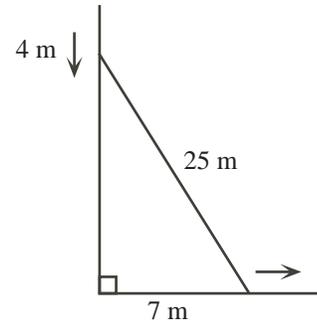
9. Dans la figure ci-contre, on peut déplacer n'importe quel ♠ pour le placer dans n'importe quelle case vide. Quel est le plus petit nombre de ♠ qu'il faut déplacer pour que chaque rangée et chaque colonne contienne trois ♠ ?

- (A) 1 (B) 2 (C) 3
(D) 4 (E) 5



10. Jade appuie une échelle de 25 m contre un mur vertical, le bas de l'échelle étant à 7 m du mur. (Jade est très forte — il ne faut pas chercher à l'imiter à la maison !) Ensuite, elle tire le bas de l'échelle et l'éloigne du mur, de manière que le haut de l'échelle glisse vers le bas sur une distance de 4 m. Sur quelle distance Jade a-t-elle déplacé le bas de l'échelle par rapport à sa position initiale ?

- (A) 4 m (B) 11 m (C) 2 m
(D) 13 m (E) 8 m



Partie B (6 points par bonne réponse)

11. On considère deux entiers strictement positifs, m et n , de manière que $m < n$.

La valeur de $\frac{m+3}{n+3}$ est :

- (A) égale à 1
(B) égale à 3
(C) inférieure à celle de $\frac{m}{n}$
(D) supérieure à celle de $\frac{m}{n}$
(E) égale à celle de $\frac{m}{n}$

12. Combien y a-t-il d'entiers de quatre chiffres, de 5000 à 6000, dont le chiffre des milliers est égal à la somme des trois autres chiffres ? (Le chiffre des milliers de 5124 est 5.)

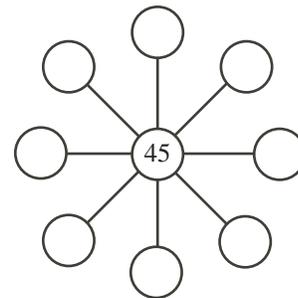
- (A) 5 (B) 15 (C) 21 (D) 30 (E) 12

13. Combien y a-t-il de valeurs entières de x pour lesquelles la valeur de $\frac{-6}{x+1}$ est un entier ?

- (A) 8 (B) 9 (C) 2 (D) 6 (E) 7

14. Il est possible d'écrire divers entiers positifs différents dans les huit cercles vides de manière que le produit de n'importe quels trois entiers sur une même ligne droite soit égal à 3240. Quelle est la plus grande somme possible des huit nombres qui entourent 45 ?

- (A) 139 (B) 211 (C) 156
(D) 159 (E) 160

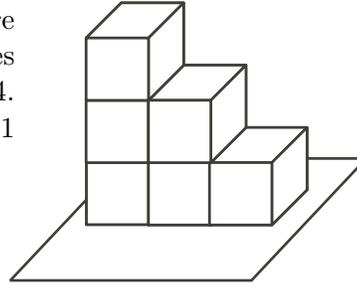


15. Lundi, 10 % des élèves de l'école Desloges étaient absents et 90 % des élèves étaient présents. Mardi, 10 % des élèves qui étaient absents lundi sont présents et les autres qui étaient absents lundi sont toujours absents. De plus, 10 % des élèves qui étaient présents lundi sont absents et les autres qui étaient présents lundi sont toujours présents. Quel pourcentage des élèves de l'école Desloges sont présents mardi ?

- (A) 81 % (B) 82 % (C) 90 % (D) 91 % (E) 99 %

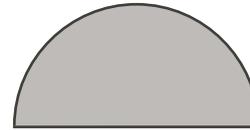
16. Six dés sont placés sur une table comme dans la figure ci-contre. Sur chaque dé, les nombres 1 et 6 sont sur des faces opposées ; il en est de même de 2 et 5 et de 3 et 4. Quelle est la somme maximale des numéros sur les 21 faces visibles ?

(A) 69 (B) 88 (C) 89
(D) 91 (E) 96



17. La figure ci-contre, formée d'un demi-cercle et de son diamètre, a un périmètre de 20. (Le périmètre inclut la mesure du demi-cercle et du diamètre.) Lequel des nombres suivants est la meilleure approximation de l'aire de la région ombrée ?

(A) 36,6 (B) 23,8 (C) 49,3
(D) 51,6 (E) 26,7



18. Lundi, Hana s'est rendue au travail en voiture à une vitesse de 70 km/h et elle est arrivée 1 minute en retard. Mardi, elle est partie à la même heure et elle a suivi le même chemin. Cette fois-ci, elle a conduit à une vitesse de 75 km/h et elle est arrivée 1 minute en avance. Quelle est la longueur du chemin qu'elle a suivi ?

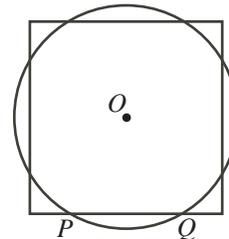
(A) 30 km (B) 35 km (C) 45 km (D) 50 km (E) 60 km

19. Si $2^x = 15$ et $15^y = 32$, quelle est la valeur de xy ?

(A) 5 (B) 8 (C) 16 (D) 6 (E) 4

20. Dans la figure ci-contre, le cercle et le carré ont le même centre O et la même aire. Le cercle, qui a un rayon de 1, coupe un côté du carré aux points P et Q . Quelle est la longueur de PQ ?

(A) $\sqrt{4 - \pi}$ (B) 1 (C) $\sqrt{2}$
(D) $2 - \sqrt{\pi}$ (E) $4 - \sqrt{\pi}$

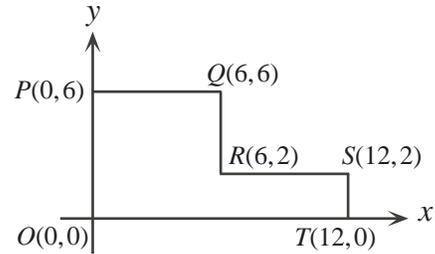


Partie C (8 points par bonne réponse)

21. À la fête d'anniversaire de Matilde, le rapport du nombre de personnes qui ont mangé de la crème glacée au nombre de personnes qui ont mangé du gâteau était de 3 : 2. Les personnes qui ont mangé du gâteau et de la crème glacée ont été comptées dans les deux catégories. S'il y avait 120 personnes à la fête, quel est le nombre maximum de personnes qui pourraient avoir mangé du gâteau et de la crème glacée ?

(A) 24 (B) 30 (C) 48 (D) 80 (E) 72

22. Dans la figure ci-contre, on veut tracer deux droites qui passent au point $O(0,0)$ de manière que ces droites coupent la figure $OPQRST$ en trois parties ayant une même aire. Quelle est la somme des pentes de ces droites ?



- (A) $\frac{35}{24}$ (B) $\frac{7}{6}$ (C) $\frac{5}{4}$
 (D) $\frac{4}{3}$ (E) $\frac{11}{8}$

23. On considère quatre entiers strictement positifs, a, b, c et d , de manière que :

$$ab + cd = 38$$

$$ac + bd = 34$$

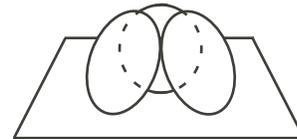
$$ad + bc = 43$$

Quelle est la valeur de $a + b + c + d$?

- (A) 15 (B) 16 (C) 17 (D) 18 (E) 19
24. Si on place l'entrée (m, n) dans la machine A, on obtient la sortie (n, m) .
 Si on place l'entrée (m, n) dans la machine B, on obtient la sortie $(m + 3n, n)$.
 Si on place l'entrée (m, n) dans la machine C, on obtient la sortie $(m - 2n, n)$.
 Nathalie choisit le couple $(0, 1)$ et le place comme entrée dans une des machines. Elle prend ensuite la sortie et la place comme entrée dans n'importe quelle des machines. Elle continue de la sorte en prenant la sortie à chaque fois et en la plaçant comme entrée dans n'importe quelle des machines. (Par exemple, elle peut commencer par le couple $(0, 1)$ et utiliser successivement les machines B, B, A, C et B pour obtenir la sortie finale $(7, 6)$.) Lequel des couples suivants est impossible à obtenir commençant par le couple $(0, 1)$ et en utilisant ces machines dans n'importe quel ordre n'importe quel nombre de fois ?

- (A) $(2009, 1016)$ (B) $(2009, 1004)$ (C) $(2009, 1002)$
 (D) $(2009, 1008)$ (E) $(2009, 1032)$

25. Dans la figure ci-contre, trois cercles de rayon 10 sont tangents les uns aux autres et tangents à un plan dans l'espace tridimensionnel. Chaque cercle est incliné de manière à former un angle de 45° avec le plan. Les cercles se touchent les uns les autres en trois points. Ces trois points sont situés sur un cercle qui est parallèle au plan. Lequel des nombres suivants est la meilleure approximation du rayon de ce cercle ?



- (A) 6,9 (B) 7,1 (C) 7,3
 (D) 7,5 (E) 7,7



Concours canadien de mathématiques



Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Fermat de 2009!
En 2008, plus de 83 000 élèves à travers le monde se sont inscrits aux concours Pascal, Cayley et Fermat.

Encouragez votre enseignant à vous inscrire au concours Hypatie qui aura lieu le 8 avril 2009.

Visitez notre site Web au www.cemc.uwaterloo.ca pour :

- plus d'information à propos du concours Hypatie;
- des copies gratuites des concours précédents;
- des ateliers pour vous aider à vous préparer aux concours futurs;
- de l'information au sujet de nos publications qui visent l'enrichissement en mathématiques et la préparation aux concours;
- de l'information concernant les carrières en mathématiques.

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web au www.cemc.uwaterloo.ca pour :

- inscrire vos élèves aux concours Fryer, Galois et Hypatie qui auront lieu le 8 avril 2009;
- vous renseigner sur des ateliers et des ressources disponibles pour les enseignants;
- trouver les résultats de votre école.

