Concours canadien de mathématiques
Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Euclide 2009

le mardi 7 avril 2009

Solutions

1. (a) On écrit l'équation $6x + 3y = 21$ sous la forme $3y = -6x + 21$, ou $y = -2x + 7$.
D'après cette dernière équation, la pente est égale à -2.

(b) *Solution 1*

Puisque la droite qui passe par les points a une pente de 3, alors $\dfrac{c-0}{5-1} = 3$, d'où $\dfrac{c}{4} = 3$, ou $c = 12$.

Solution 2

Puisque la droite qui passe par les points a une pente de 3, alors lorsqu'on bouge d'une unité vers la droite sur la droite, on monte de 3 unités.
Puisque le point $(5, c)$ est situé à 4 unités à la droite du point $(1, 0)$, il est à 12 unités au-dessus de $(1, 0)$ $(3(4) = 12)$. Donc $c = 0 + 12$, ou $c = 12$.

(c) *Solution 1*

Le segment donné passe aux points $(0, 4)$ et $(8, -4)$. Sa pente est donc égale à $\dfrac{4-(-4)}{0-8}$, ou $\dfrac{8}{-8}$, ou -1.
Puisque le segment a une ordonnée à l'origine de 4, la droite qui passe aux points A et B a pour l'équation $y = -x + 4$.
Puisque le point (k, k) est situé sur la droite, alors $k = -k + 4$, d'où $2k = 4$, ou $k = 2$.

Solution 2

Soit K le point (k, k).
Puisque K est situé sur le segment AB, alors les segments AK et AB ont la même pente.
Le segment AB joint les points $(0, 4)$ et $(8, -4)$. Sa pente est donc égale à $\dfrac{4-(-4)}{0-8}$, ou $\dfrac{8}{-8}$, ou -1.
Le segment AK joint les points $(0, 4)$ et (k, k). Sa pente est donc égale à $\dfrac{k-4}{k-0}$.
Donc $\dfrac{k-4}{k} = -1$, d'où $k - 4 = -k$, ou $2k = 4$. Donc $k = 2$.

2. (a) *Solution 1*

La somme des racines de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ est égale à $-\dfrac{b}{a}$.
La somme des racines de l'équation donnée est donc égale à $-\left(\frac{(-6)}{1}\right)$, ou 6.

Solution 2

Puisque $x^2 - 6x - 7 = 0$, alors $(x - 7)(x + 1) = 0$, d'où $x = 7$ ou $x = -1$.
Les racines sont donc 7 et -1. Leur somme est égale à 6.

(b) *Solution 1*

Le produit des racines de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ est égal à $\dfrac{c}{a}$.
Le produit des racines de l'équation donnée est donc égal à $\frac{-20}{5}$, ou -4.

Solution 2

Puisque $5x^2 - 20 = 0$, alors $x^2 - 4 = 0$, ou $(x - 2)(x + 2) = 0$. Donc $x = 2$ ou $x = -2$.
Les racines sont 2 et -2 et leur produit est égal à -4.

(c) *Solution 1*

Puisque $x^3 - 6x^2 + 5x = 0$, alors $x(x^2 - 6x + 5) = 0$, ou $x(x - 5)(x - 1) = 0$. Donc $x = 0$, $x = 1$ ou $x = 5$.

Les racines sont 0, 1 et 5. Leur moyenne est égale à $\frac{1}{3}(0+1+5)$, ou $\frac{1}{3}(6)$, ou 2.

Solution 2

La somme des racines de l'équation cubique $a^3 + bx^2 + cx + d = 0$ est égale à $-\dfrac{b}{a}$.
La somme des trois racines de l'équation donnée est donc égale à $-\left(\frac{-6}{1}\right)$, ou 6.
Puisque la moyenne de trois nombres est égale à leur somme divisée par 3, la moyenne des racines est égale à $\frac{6}{3}$, ou 2.

3. (a) Puisque $AB = AD = BD$, le triangle BDA est équilatéral.
Donc $\angle ABD = \angle ADB = \angle DAB = 60^\circ$.
De plus, $\angle DAE = 180^\circ - \angle ADE - \angle AED$, ou $\angle DAE = 180^\circ - 60^\circ - 90^\circ$, ou $\angle DAE = 30^\circ$.
Puisque CAE est un segment de droite, alors $\angle CAD = 180^\circ - \angle DAE$, d'où $\angle CAD = 180^\circ - 30^\circ$, ou $\angle CAD = 150^\circ$.
Puisque $AC = AD$, le triangle CAD est isocèle. Donc $\angle CDA = \angle DCA$.
Puisque la somme des mesures d'angles du triangle CAD est égale à 180° et que $\angle CDA = \angle DCA$, alors :

$$\angle CDA = \tfrac{1}{2}(180^\circ - \angle CAD) = \tfrac{1}{2}(180^\circ - 150^\circ) = 15^\circ$$

Donc $\angle CDB = \angle CDA + \angle ADB$, d'où $\angle CDB = 15^\circ + 60^\circ$, ou $\angle CDB = 75^\circ$.

(b) *Solution 1*

Puisque $ABCD$ est un rectangle, alors $AB = CD = 40$ et $AD = BC = 30$.
D'après le théorème de Pythagore, $BD^2 = AD^2 + AB^2$, d'où :

$$BD = \sqrt{30^2 + 40^2} = \sqrt{900 + 1600} = \sqrt{2500} = 50$$

On calcule l'aire du triangle ADB de deux façons.
En utilisant la base AB et la hauteur AD, l'aire est égale à $\frac{1}{2}(40)(30)$, ou 600.
En utilisant la base DB et la hauteur AF, l'aire est égale à $\frac{1}{2}(50)x$, ou $25x$.
Donc $25x = 600$, d'où $x = \frac{600}{25}$, ou $x = 24$.

Solution 2

Puisque $ABCD$ est un rectangle, alors $AB = CD = 40$ et $AD = BC = 30$.
D'après le théorème de Pythagore, $BD^2 = AD^2 + AB^2$, d'où :

$$BD = \sqrt{30^2 + 40^2} = \sqrt{900 + 1600} = \sqrt{2500} = 50$$

Le triangle DAB est rectangle en A. Donc $\sin(\angle ADB) = \dfrac{AB}{BD}$, d'où $\sin(\angle ADB) = \frac{40}{50}$, ou $\sin(\angle ADB) = \frac{4}{5}$.
Or, le triangle ADF est rectangle en F et $\angle ADF = \angle ADB$.
Donc $\sin(\angle ADF) = \dfrac{AF}{AD}$, d'où $\sin(\angle ADF) = \dfrac{x}{30}$.
Donc $\dfrac{x}{30} = \dfrac{4}{5}$, d'où $x = \frac{4}{5}(30)$, ou $x = 24$.

Solution 3

Puisque $ABCD$ est un rectangle, alors $AB = CD = 40$ et $AD = BC = 30$.
D'après le théorème de Pythagore, $BD^2 = AD^2 + AB^2$, d'où :

$$BD = \sqrt{30^2 + 40^2} = \sqrt{900 + 1600} = \sqrt{2500} = 50$$

Or, les triangles BFA et BAD sont semblables, puisqu'ils sont rectangles et qu'ils ont un angle commun en B.

Donc $\dfrac{AF}{AB} = \dfrac{AD}{BD}$, d'où $\dfrac{x}{30} = \dfrac{40}{50}$, ou $x = \dfrac{30(40)}{50}$, ou $x = 24$.

4. (a) *Solution 1*

La somme des termes d'une suite arithmétique est égale au produit du nombre de termes et de la moyenne du premier et du dernier terme.
Soit n le nombre de termes de la suite. Donc $\frac{1}{2}(1+19)n = 70$, d'où $10n = 70$, ou $n = 7$.

Solution 2

Soit n le nombre de termes de la suite et d la raison arithmétique (c.-à-d. la différence entre deux termes consécutifs).
Puisque le premier terme est 1 et que le $n^{\text{ième}}$ terme est 19, alors $1 + (n-1)d = 19$, d'où $(n-1)d = 18$.
Puisque la somme des termes de la suite est égale à 70, alors $\frac{1}{2}n(1+1+(n-1)d) = 70$.
Donc $\frac{1}{2}n(2+18) = 70$, d'où $10n = 70$, ou $n = 7$.

(b) *Solution 1*

L'égalité donnée est vérifiée par toutes les valeurs de x.
Donc si $x = -3$, l'égalité devient $a(-3 + b(0)) = 2(3)$, d'où $-3a = 6$, ou $a = -2$.
Si $x = 0$, l'égalité devient $-2(0 + b(3)) = 2(6)$, d'où $-6b = 12$, ou $b = -2$.
Donc $a = -2$ et $b = -2$.

Solution 2

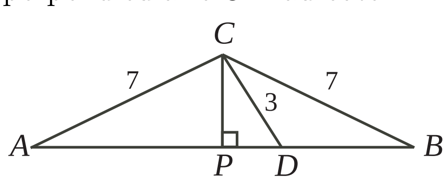
On développe les deux membres de l'égalité :

$$\begin{aligned}
a(x + b(x+3)) &= 2(x+6) \\
a(x + bx + 3b) &= 2x + 12 \\
ax + abx + 3ab &= 2x + 12 \\
(a + ab)x + 3ab &= 2x + 12
\end{aligned}$$

Puisque l'égalité est vérifiée par toutes les valeurs de x, alors les coefficients du membre de gauche doivent être égaux à ceux du membre de droite. Donc $a + ab = 2$ et $3ab = 12$.
D'après la deuxième équation, $ab = 4$ et la première équation devient $a+4 = 2$, ou $a = -2$.
Puisque $ab = 4$, alors $-2b = 4$, ou $b = -2$.
Donc $a = b = -2$.

5. (a) *Solution 1*

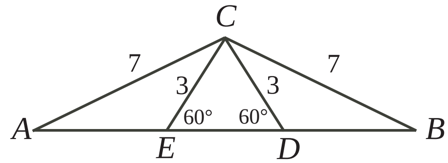
Au point C, on abaisse une perpendiculaire CP au côté AD.



Puisque le triangle ACB est isocèle, alors $AP = PB$.
Puisque le triangle CDP est un triangle remarquable 30°-60°-90°, alors $PD = \frac{1}{2}(CD) = \frac{3}{2}$.
Donc $AP = AD - PD$, d'où $AP = 8 - \frac{3}{2}$, ou $AP = \frac{13}{2}$.
Puisque $DB = PB - PD$, alors $DB = AP - PD$, d'où $DB = \frac{13}{2} - \frac{3}{2}$, ou $DB = 5$.

Solution 2

Puisque le triangle ACB est symétrique par rapport à la droite verticale qui passe par C, on fait subir à CD une réflexion par rapport à cette droite. On obtient donc l'image E de D sur AD de manière que $CE = 3$ et $\angle CED = 60°$.



Le triangle CDE a donc deux angles de $60°$ et son troisième angle doit donc mesurer $60°$. Le triangle est donc équilatéral.
Donc $ED = CD = CE = 3$, d'où $DB = AE = AD - ED = 8 - 3 = 5$.

Solution 3
$\angle CDB = 180° - \angle CDA$, d'où $\angle CDB = 180° - 60°$, ou $\angle CDB = 120°$. Selon la loi du cosinus dans le triangle CDB :

$$\begin{aligned} CB^2 &= CD^2 + DB^2 - 2(CD)(DB)\cos(\angle CDB) \\ 7^2 &= 3^2 + DB^2 - 2(3)(DB)\cos(120°) \\ 49 &= 9 + DB^2 - 6(DB)\left(-\tfrac{1}{2}\right) \\ 0 &= DB^2 + 3DB - 40 \\ 0 &= (DB-5)(DB+8) \end{aligned}$$

Puisque $DB > 0$, alors $DB = 5$.

(b) *Solution 1*
Puisque le triangle ABC est rectangle en C, alors $\sin B = \cos A$.
Puisque $2\sin B = 3\tan A$, alors $2\cos A = \dfrac{3\sin A}{\cos A}$, d'où $2\cos^2 A = 3\sin A$.
D'après l'identité de Pythagore, $\cos^2 A = 1 - \sin^2 A$, d'où $2 - 2\sin^2 A = 3\sin A$ ou $2\sin^2 A + 3\sin A - 2 = 0$, ou $(2\sin A - 1)(\sin A + 2) = 0$.
Puisque l'angle A est aigu, la valeur de $\sin A$ est entre 0 et 1. Donc, $(\sin A + 2) \neq 0$ et on a donc $(2\sin A - 1) = 0$, d'où $\sin A = \frac{1}{2}$.
Puisque l'angle A est aigu, donc $\angle A = 30°$.

Solution 2
Puisque le triangle ABC est rectangle en C, alors $\sin B = \dfrac{b}{c}$ et $\tan A = \dfrac{a}{b}$.
L'équation $2\sin B = 3\tan A$ devient $\dfrac{2b}{c} = \dfrac{3a}{b}$, ou $2b^2 = 3ac$.
D'après le théorème de Pythagore, $b^2 = c^2 - a^2$ et l'équation précédente devient ainsi $2c^2 - 2a^2 = 3ac$, ou $2c^2 - 3ac - 2a^2 = 0$. On factorise pour obtenir $(c - 2a)(2c + a) = 0$.
Puisque a et c sont positifs, alors $c = 2a$.
Puisque le triangle ABC est rectangle, la relation $c = 2a$ indique que le triangle ABC est un triangle remarquable $30°$-$60°$-$90°$ et que $\angle A = 30°$.

6. (a) Le nombre d'entiers de 100 à 999 est égal à $999 - 100 + 1$, ou 900.
On considère un entier n dans cet intervalle. Soit a, b et c ses chiffres, a étant le chiffre des centaines.
On a donc $0 \leq b, c \leq 9$ et $1 \leq a \leq 9$.
Pour que $a + b + c = 24$, il faut que les chiffres, dans n'importe quel ordre, soient $9, 9, 6$ ou $9, 8, 7$ ou $8, 8, 8$. (Il est clair qu'on ne peut avoir trois chiffres 9. Si deux chiffres égalent 9, l'autre chiffre doit être un 6. Si un seul chiffre égale 9, les deux autres doivent avoir une somme de 15 et ils doivent donc être 7 et 8. Si aucun chiffre n'égale 9, les trois chiffres doivent égaler 8 pour avoir une somme de 24.)
Si les chiffres sont 9, 9 et 6, il y a 3 arrangements : 996, 969, 699

Si les chiffres sont 9, 8 et 7, il y a 6 arrangements : 987, 978, 897, 879, 798, 789
Si les chiffres sont 8, 8 et 8, il y a 1 seul arrangement : 888
Il y a donc 10 entiers n (soit $3+6+1$) dans l'intervalle de 100 à 999 dont la somme des chiffres est égale à 24.
Il y a donc 24 choix favorables sur 900 choix possibles. La probabilité de choisir un entier n dont la somme des chiffres est égale à 24 est donc égale à $\frac{10}{900}$, ou $\frac{1}{90}$.

(b) Puisque Alice conduit à une vitesse de 60 km/h, elle parcourt 1 km à chaque minute.
Puisqu'elle a parcouru la distance de G à F en 45 minutes, alors il y a une distance de 45 km de G à F.
Soit d km la distance de E à G et B km/h la vitesse de Bob.
Puisque Bob a parcouru la distance de G à E en 20 minutes (ou $\frac{1}{3}$ d'une heure), alors $\dfrac{d}{B}=\dfrac{1}{3}$. Donc $d=\frac{1}{3}B$.
Pour parcourir la distance de F à G, Bob a mis $\dfrac{45}{B}$ heures. Pour parcourir la distance de E à G, Alice a mis $\dfrac{d}{60}$ heures.
Puisque Alice et Bob ont mis le même temps pour se rendre à G, alors $\dfrac{d}{60}=\dfrac{45}{B}$, d'où $Bd=45(60)$, ou $Bd=2700$.
Donc $B\left(\frac{1}{3}B\right)=2700$, d'où $B^2=8100$, ou $B=90$ puisque $B>0$.
Donc, Bob a conduit sa voiture à une vitesse de 90 km/h.

7. (a) On écrit l'équation de la parabole donnée sous forme canonique en complétant le carré :

$$y=x^2-2x+4=x^2-2x+1-1+4=(x-1)^2+3$$

La parabole donnée a donc pour sommet $(1,3)$.
Puisque l'image de cette parabole par la translation a pour abscisses à l'origine 3 et 5, son équation est $y=1(x-3)(x-5)$, ou $y=x^2-8x+15$.
On écrit cette équation sous forme canonique en complétant le carré :

$$y=x^2-8x+15=x^2-8x+16-16+15=(x-4)^2-1$$

L'image de la parabole initiale a donc pour sommet $(4,-1)$.
Puisque le point $(1,3)$ subit une translation de p unités vers la droite et de q unités vers le bas pour arriver au point $(4,-1)$, alors $p=3$ et $q=4$.

(b) On détermine d'abord les coordonnées du point A.
Le triangle ABC a une aire de 4. On considère sa base AC. Sa hauteur correspondante est donc la distance du point B à l'axe des abscisses.
Soit $(a,0)$ les coordonnées de A. Le triangle a donc une base de $4-a$ et une hauteur de 4.
Donc $\frac{1}{2}(4-a)(4)=4$, d'où $4-a=2$, ou $a=2$.
Donc, A a pour coordonnées $(2,0)$.

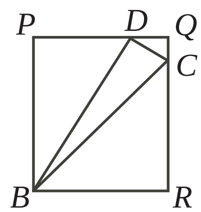
On détermine ensuite l'équation de la parabole.
Puisque la parabole a pour abscisses à l'origine 2 et 4, son équation est de la forme $y=k(x-2)(x-4)$.
Puisque la parabole passe au point $(0,-4)$, alors $-4=k(-2)(-4)$, d'où $k=-\frac{1}{2}$.
La parabole a donc pour équation $y=-\frac{1}{2}(x-2)(x-4)$.

On détermine ensuite les coordonnées du sommet D de la parabole.

Puisque la parabole a pour abscisses à l'origine 2 et 4, l'abscisse du sommet est égale à la moyenne de ces nombres, soit 3.
Puisque D est sur la parabole, alors $y = -\frac{1}{2}(3-2)(3-4)$, ou $y = -\frac{1}{2}(1)(-1)$, ou $y = \frac{1}{2}$.
Le sommet D de la parabole a donc pour coordonnées $(3, \frac{1}{2})$.

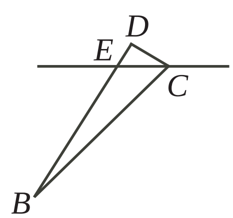
On détermine ensuite l'aire du triangle BDC dont les sommets ont pour coordonnées $B(0,-4)$, $D(3, \frac{1}{2})$ et $C(4,0)$.

Méthode 1
On trace le rectangle dont les côtés horizontaux sont sur les droites d'équations $y = \frac{1}{2}$ et $y = -4$ et les côtés verticaux sont sur les droites d'équations $x = 0$ et $x = 4$. On le nomme $BPQR$.



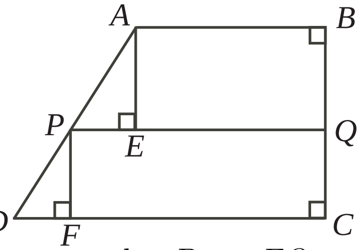
L'aire du triangle BDC est égale à l'aire du rectangle moins l'aire des triangles BPD, DQC et CRB.
Le rectangle $BPQR$ a une hauteur de $4 + \frac{1}{2}$, ou $\frac{9}{2}$ et une base de 4.
Le triangle BPD a une hauteur de $\frac{9}{2}$ et une base de 3.
Le triangle DQC a une hauteur de $\frac{1}{2}$ et une base de 1.
Le triangle CRB a une hauteur de 4 et une base de 4.
Donc, l'aire du triangle BDC est égale à $4(\frac{9}{2}) - \frac{1}{2}(\frac{9}{2})(3) - \frac{1}{2}(\frac{1}{2})(1) - \frac{1}{2}(4)(4)$, ou $18 - \frac{27}{4} - \frac{1}{4} - 8$, ou 3.

Méthode 2
On détermine les coordonnées du point E où le segment BD coupe l'axe des abscisses. L'aire du triangle BDC est alors égale à la somme de l'aire du triangle ECB et de celle du triangle ECD.



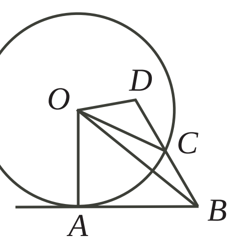
Puisque B et D ont pour coordonnées respectives $(0,-4)$ et $(3, \frac{1}{2})$, la pente de BD est égale à $\dfrac{\frac{1}{2} - (-4)}{3 - 0}$, ou $\dfrac{\frac{9}{2}}{3}$, ou $\dfrac{3}{2}$.
Puisque $B(0,-4)$ est situé sur l'axe des ordonnées, alors la droite qui passe aux points B et D a pour équation $y = \frac{3}{2}x - 4$.
Pour déterminer l'abscisse de E, posons $y = 0$. On obtient $0 = \frac{3}{2}x - 4$, ou $\frac{3}{2}x = 4$, d'où $x = \frac{8}{3}$.
On considère EC comme base de chacun des petits triangles. Or $EC = 4 - \frac{8}{3}$, ou $EC = \frac{4}{3}$.
Donc, l'aire du triangle ECD est égale à $\frac{1}{2}(\frac{4}{3})(\frac{1}{2})$, ou $\frac{1}{3}$.
L'aire du triangle ECB est égale à $\frac{1}{2}(\frac{4}{3})(4)$, ou $\frac{8}{3}$.
Donc, l'aire du triangle BDC est égale à $\frac{1}{3} + \frac{8}{3}$, ou 3.

8. (a) Puisque PQ est parallèle à AB, il est parallèle à DC et perpendiculaire à BC.
Aux points A et P, on abaisse des perpendiculaires respectives AE à PQ et PF à DC.



$ABQE$ et $PQCF$ sont donc des rectangles. Donc $EQ = x$ et $FC = r$, d'où $PE = r - x$ et $DF = y - r$.
Soit $BQ = b$ et $QC = c$. Donc $AE = b$ et $PF = c$.
L'aire du trapèze $ABQP$ est égale à $\frac{1}{2}(x+r)b$. Celle du trapèze $PQCD$ est égale à $\frac{1}{2}(r+y)c$.
Puisque ces aires sont égales, $\frac{1}{2}(x+r)b = \frac{1}{2}(r+y)c$, d'où $\dfrac{x+r}{r+y} = \dfrac{c}{b}$.
Puisque AE est parallèle à PF, alors $\angle PAE = \angle DPF$ et les triangles AEP et PFD sont semblables.
Donc $\dfrac{AE}{PE} = \dfrac{PF}{DF}$, d'où $\dfrac{b}{r-x} = \dfrac{c}{y-r}$, ou $\dfrac{c}{b} = \dfrac{y-r}{r-x}$.
Puisque $\dfrac{x+r}{r+y} = \dfrac{c}{b}$ et $\dfrac{c}{b} = \dfrac{y-r}{r-x}$, donc $\dfrac{x+r}{r+y} = \dfrac{y-r}{r-x}$, d'où $(x+r)(r-x) = (r+y)(y-r)$.
Cette équation devient $r^2 - x^2 = y^2 - r^2$, d'où $2r^2 = x^2 + y^2$, ce qu'il fallait démontrer.

(b) On joint O aux points A, B et C.



Puisque AB est tangent au cercle en A, alors $\angle OAB = 90^\circ$.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle OAB, $OA^2 + AB^2 = OB^2$, d'où $r^2 + p^2 = OB^2$.
Dans le triangle ODC, on a $OD = DC = q$ et $OC = r$.
D'après la loi du cosinus dans ce triangle :

$$\begin{aligned} OC^2 &= OD^2 + DC^2 - 2(OD)(DC)\cos(\angle ODC) \\ r^2 &= q^2 + q^2 - 2q^2\cos(\angle ODC) \\ \cos(\angle ODC) &= \frac{2q^2 - r^2}{2q^2} \end{aligned}$$

Or $\angle ODB = \angle ODC$. D'après la loi du cosinus dans le triangle ODB :

$$\begin{aligned} OB^2 &= OD^2 + DB^2 - 2(OD)(DB)\cos(\angle ODB) \\ &= q^2 + (2q)^2 - 2(q)(2q)\left(\frac{2q^2 - r^2}{2q^2}\right) \\ &= q^2 + 4q^2 - 2(2q^2 - r^2) \\ &= q^2 + 2r^2 \end{aligned}$$

Puisque $OB^2 = r^2 + p^2$ et $OB^2 = q^2 + 2r^2$, alors $r^2 + p^2 = q^2 + 2r^2$, d'où $p^2 = q^2 + r^2$, ce qu'il fallait démontrer.

9. (a) On écrit d'abord chaque logarithme sous la forme d'un logarithme de base 2 :

$$\begin{aligned} 1+\log_4 x &= 1+\frac{\log_2 x}{\log_2 4} = 1+\frac{\log_2 x}{2} = 1+\tfrac{1}{2}\log_2 x \\ \log_8 4x &= \frac{\log_2 4x}{\log_2 8} = \frac{\log_2 4+\log_2 x}{3} = \tfrac{2}{3}+\tfrac{1}{3}\log_2 x \end{aligned}$$

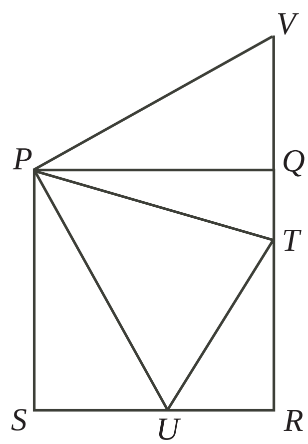
Soit $y=\log_2 x$. Les trois termes sont donc y, $1+\frac{1}{2}y$ et $\frac{2}{3}+\frac{1}{3}y$. Puisqu'ils forment une suite géométrique, alors :

$$\begin{aligned} y(\tfrac{2}{3}+\tfrac{1}{3}y) &= (1+\tfrac{1}{2}y)^2 \\ \tfrac{2}{3}y+\tfrac{1}{3}y^2 &= 1+y+\tfrac{1}{4}y^2 \\ 8y+4y^2 &= 12+12y+3y^2 \\ y^2-4y-12 &= 0 \\ (y-6)(y+2) &= 0 \end{aligned}$$

Donc $y=6$ ou $y=-2$, d'où $\log_2 x=6$ ou $\log_2 x=-2$. Donc $x=2^6$ ou $x=2^{-2}$, d'où $x=64$ ou $x=\frac{1}{4}$.

(b) *Solution 1*

On fait subir au triangle PSU une rotation de centre P et de 90° dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. Son image est le triangle PQV. On remarque que le point V est situé sur le prolongement de RQ. (Cette rotation permet en quelque sorte de juxtaposer les triangles PSU et QPT.)



D'après la rotation, $PV=PU$.

De plus, $\angle VPT=\angle VPQ+\angle QPT=\angle UPS+\angle QPT$, d'où $\angle VPT=90°-\angle UPT$, ou $\angle VPT=90°-45°$, ou $\angle VPT=45°$.

Donc les triangles PTU et PTV sont congruents (deux côtés et l'angle compris).

Le périmètre du triangle RUT est donc égal à :

$$\begin{aligned} UR+RT+UT &= UR+RT+TV \\ &= UR+RT+TQ+QV \\ &= UR+RQ+SU \\ &= SU+UR+RQ \\ &= SR+RQ \\ &= 8 \end{aligned}$$

Puisque le périmètre du triangle RUT est égal à 8, il ne varie pas et le périmètre maximal possible est égal à 8.

Solution 2
Soit $\angle SPU = \theta$.
Donc $\tan\theta = \dfrac{SU}{PS}$, d'où $SU = 4\tan\theta$.
Puisque $SR = 4$, alors $UR = SR - SU$, d'où $UR = 4 - 4\tan\theta$.
Puisque $\angle UPT = 45^\circ$, alors $\angle QPT = 90^\circ - 45^\circ - \theta$, ou $\angle QPT = 45^\circ - \theta$.
Donc $\tan(45^\circ - \theta) = \dfrac{QT}{PQ}$, d'où $QT = 4\tan(45^\circ - \theta)$.
Puisque $QR = 4$, alors $RT = 4 - 4\tan(45^\circ - \theta)$.
Or $\tan(A - B) = \dfrac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$. Donc $\tan(45^\circ - \theta) = \dfrac{\tan(45^\circ) - \tan\theta}{1 + \tan(45^\circ)\tan\theta} = \dfrac{1 - \tan\theta}{1 + \tan\theta}$,
puisque $\tan(45^\circ) = 1$.
Donc $RT = 4 - 4\left(\dfrac{1 - \tan\theta}{1 + \tan\theta}\right)$, d'où $RT = \dfrac{4 + 4\tan\theta}{1 + \tan\theta} - \dfrac{4 - 4\tan\theta}{1 + \tan\theta}$, ou $RT = \dfrac{8\tan\theta}{1 + \tan\theta}$.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle URT, on a :

$$\begin{aligned}
UT &= \sqrt{UR^2 + RT^2} \\
&= \sqrt{(4 - 4\tan\theta)^2 + \left(\frac{8\tan\theta}{1 + \tan\theta}\right)^2} \\
&= 4\sqrt{(1 - \tan\theta)^2 + \left(\frac{2\tan\theta}{1 + \tan\theta}\right)^2} \\
&= 4\sqrt{\left(\frac{1 - \tan^2\theta}{1 + \tan\theta}\right)^2 + \left(\frac{2\tan\theta}{1 + \tan\theta}\right)^2} \\
&= 4\sqrt{\frac{1 - 2\tan^2\theta + \tan^4\theta + 4\tan^2\theta}{(1 + \tan\theta)^2}} \\
&= 4\sqrt{\frac{1 + 2\tan^2\theta + \tan^4\theta}{(1 + \tan\theta)^2}} \\
&= 4\sqrt{\frac{(1 + \tan^2\theta)^2}{(1 + \tan\theta)^2}} \\
&= 4\left(\frac{1 + \tan^2\theta}{1 + \tan\theta}\right)
\end{aligned}$$

Donc, le périmètre du triangle URT est égal à :

$$\begin{aligned}
UR + RT + UT &= 4 - 4\tan\theta + \frac{8\tan\theta}{1 + \tan\theta} + 4\left(\frac{1 + \tan^2\theta}{1 + \tan\theta}\right) \\
&= 4\left(\frac{1 - \tan^2\theta}{1 + \tan\theta} + \frac{2\tan\theta}{1 + \tan\theta} + \frac{1 + \tan^2\theta}{1 + \tan\theta}\right) \\
&= 4\left(\frac{2 + 2\tan\theta}{1 + \tan\theta}\right) \\
&= 8
\end{aligned}$$

Ce périmètre est égal à 8 peu importe la mesure de θ. Le périmètre maximal possible est donc égal à 8.

10. Partout dans cette solution, on représente l'état des n assiettes par une chaîne de longueur n formée des chiffres 0 et 1 (appelée *chaîne binaire*) . Chaque chaîne aura la forme $p_1p_2 \cdots p_n$, où le $r^{\text{ième}}$ chiffre à partir de la gauche, soit p_r, est égal à 1 si la $r^{\text{ième}}$ assiette contient un cadeau et à 0 si elle n'en contient pas. On dira qu'une chaîne binaire de longueur n est *permise* si elle satisfait à la condition donnée, soit que deux chiffres adjacents ne peuvent tous deux égaler 1. Il faut noter que le chiffre p_n est adjacent au chiffre p_1 ; on ne peut donc pas avoir $p_1 = p_n = 1$.

 (a) Supposons que $p_1 = 1$.
 Donc $p_2 = p_7 = 0$ et la chaîne est donc de la forme $10p_3p_4p_5p_60$.
 Puisque $k = 3$, alors deux des chiffres p_3, p_4, p_5, p_6 égalent 1, de manière que deux chiffres adjacents ne soient pas tous deux 1.
 Les chaînes possibles sont 1010100, 1010010 et 1001010.

 Supposons que $p_1 = 0$. Donc, p_2 peut égaler 1 ou 0.
 Si $p_2 = 1$, alors $p_3 = 0$. La chaîne est donc de la forme $010p_4p_5p_6p_7$. Cette chaîne a la même forme que la chaîne du cas précédent après une rotation d'une position autour du cercle. Il y a donc 3 chaînes possibles.
 Si $p_2 = 0$, alors la chaîne est de la forme $00p_3p_4p_5p_6p_7$ et trois des chiffres p_3, p_4, p_5, p_6, p_7 égalent 1, de façon que deux chiffres adjacents ne soient pas tous deux 1.
 Il y a une seule chaîne possible, soit 0010101.
 En tout, il y a 7 chaînes possibles. Donc $f(7, 3) = 7$.

 (b) *Solution 1*
 Dans une chaîne possible $p_1p_2 \cdots p_{n-1}p_n$, (p_1, p_n) est égal à $(1, 0)$, $(0, 1)$ ou $(0, 0)$.
 Soit $g(n, k, 1, 0)$ le nombre de chaînes possibles de longueur n qui contiennent k fois le chiffre 1 et de manière que $(p_1, p_n) = (1, 0)$.
 On définit $g(n, k, 0, 1)$ et $g(n, k, 0, 0)$ de façon semblable.
 On remarque que $f(n, k) = g(n, k, 1, 0) + g(n, k, 0, 1) + g(n, k, 0, 0)$.

 On considère les chaînes comptées dans $g(n, k, 0, 1)$.
 Puisque $p_n = 1$, alors $p_{n-1} = 0$. Puisque $p_1 = 0$, alors p_2 peut égaler 0 ou 1.
 On retranche le premier et le dernier chiffre de chacune de ces chaînes.
 On obtient des chaînes de la forme $p_2p_3 \cdots p_{n-2}p_{n-1}$, c'est-à-dire des chaînes de longueur $n - 2$ qui contiennent $k - 1$ fois le chiffre 1.
 Puisque $p_{n-1} = 0$, alors le premier chiffre et le dernier chiffre ne peuvent tous deux être 1.
 De plus, puisque les chaînes précédentes ne contenaient pas deux 1 consécutifs, alors il en est de même pour ces chaînes.
 Donc, les chaînes de la forme $p_2p_3 \cdots p_{n-2}p_{n-1}$ sont des chaînes permises de longueur $n-2$, elles contiennent $k - 1$ fois le chiffre 1 et elles sont telles que $p_{n-1} = 0$ et $p_2 = 1$ ou $p_2 = 0$.
 Le nombre de telles chaînes avec $p_2 = 1$ et $p_{n-1} = 0$ est égal à $g(n - 2, k - 1, 1, 0)$ et le nombre de telles chaînes avec $p_2 = 0$ et $p_{n-1} = 0$ est égal à $g(n - 2, k - 1, 0, 0)$.
 Donc $g(n, k, 0, 1) = g(n - 2, k - 1, 1, 0) + g(n - 2, k - 1, 0, 0)$.

 On considère les chaînes comptées dans $g(n, k, 0, 0)$.
 Puisque $p_1 = 0$ et $p_n = 0$, on peut retrancher p_n pour obtenir des chaînes de la forme $p_1p_2 \cdots p_{n-1}$ de longueur $n-1$ qui contiennent k fois le chiffre 1. Ces chaînes sont permises, puisque $p_1 = 0$ et que les chaînes initiales sont permises.
 On remarque que $p_1 = 0$ et que p_{n-1} est égal à 0 ou à 1.
 Les chaînes de la forme $p_1p_2 \cdots p_{n-1}$ sont des chaînes permises de longueur $n - 1$ et qui contiennent k fois le chiffre 1, qui commencent par un 0, et qui se terminent par un 0 ou un 1.
 Le nombre de telles chaînes avec $p_1 = 0$ et $p_{n-1} = 0$ est égal à $g(n - 1, k, 0, 0)$ et le nombre

de telles chaînes avec $p_1 = 0$ et $p_{n-1} = 1$ est égal à $g(n-1,k,0,1)$.
Donc $g(n,k,0,0) = g(n-1,k,0,0) + g(n-1,k,0,1)$.

On considère les chaînes comptées dans $g(n,k,1,0)$.
Dans ces chaînes, on a $p_1 = 1$ et $p_n = 0$. Donc, p_{n-1} peut égaler 0 ou 1. On traite de ces deux cas séparément.
Si $p_{n-1} = 0$, les chaînes de la forme $p_1p_2\cdots p_{n-1}$ sont des chaînes permises de longueur $n-1$, et qui contiennent k fois le chiffre 1, qui commencent par un 1 et qui se terminent par un 0.
Donc, le nombre $g(n,k,1,0)$ de telles chaînes avec $p_{n-1} = 0$ est égal à $g(n-1,k,1,0)$.
Si $p_{n-1} = 1$, les chaînes de la forme $p_2p_3\cdots p_{n-1}$ sont de longueur $n-2$ et elles commencent par un 0 et se terminent par un 1. Elles contiennent $k-1$ fois le chiffre 1 (puisqu'on a retranché le premier 1) et elles sont permises puisque les chaînes initiales sont permises.
Donc, le nombre $g(n,k,1,0)$ de chaînes permises dans lesquelles $p_{n-1} = 1$ est égal à $g(n-2,k-1,0,1)$.
Donc :

$$\begin{aligned}
f(n,k) &= g(n,k,1,0) + g(n,k,0,1) + g(n,k,0,0) \\
&= (g(n-1,k,1,0) + g(n-2,k-1,0,1)) \\
&\quad +(g(n-2,k-1,1,0) + g(n-2,k-1,0,0)) \\
&\quad +(g(n-1,k,0,0) + g(n-1,k,0,1)) \\
&= (g(n-1,k,1,0) + g(n-1,k,0,1) + g(n-1,k,0,0)) \\
&\quad +(g(n-2,k-1,0,1) + g(n-2,k-1,1,0) + g(n-2,k-1,0,0)) \\
&= f(n-1,k) + f(n-2,k-1)
\end{aligned}$$

Solution 2
On développe une formule pour $f(n,k)$ en comptant les chaînes permises.
On considère les chaînes permises de longueur n qui contiennent k fois le chiffre 1. On a $p_n = 0$ ou $p_n = 1$.

On considère d'abord le cas où $p_n = 0$. (On remarque que p_1 peut égaler 0 ou 1.)
Ces chaînes sont de la forme $p_1p_2p_3\cdots p_{n-1}0$.
Dans ce cas, les chiffres 1 sont toujours suivis d'un 0 et on peut donc construire ces chaînes en juxtaposant des groupes $\underline{10}$ et des chiffres 0. Dans ces juxtapositions, les chiffres 1 seront toujours précédés et suivis d'un 0.
On peut donc construire ces chaînes au moyen de k groupes $\underline{10}$ et de $n-2k$ chiffres 0. Chaque chaîne aura donc k fois le chiffre 1 et $k+(n-2k)$ fois, ou $n-k$ fois le chiffre 0.
On remarque que chaque chaîne construite de cette façon sera permise et se terminera par un 0 et que toute chaîne permise peut être construite de cette façon.
Le nombre d'arrangements de k groupes $\underline{10}$ et de $n-2k$ zéros est égal à $\binom{k+(n-2k)}{k}$, ou $\binom{n-k}{k}$.
On considère ensuite le cas où $p_n = 1$.
Il faut alors que $p_{n-1} = p_1 = 0$, puisque ces deux chiffres sont adjacents à p_n.
Ces chaînes sont toutes de la forme $0p_2p_3\cdots 01$.
On considère les chaînes obtenues en retranchant le premier et le dernier chiffre de ces chaînes.
Ces nouvelles chaînes sont de longueur $n-2$, elles contiennent $k-1$ fois le chiffre 1, elles se terminent par un 0, et commencent par un 0 ou un 1.

Puisque les chiffres 1 sont toujours suivis d'un 0, on peut construire ces chaînes en juxtaposant des groupes <u>10</u> et des chiffres 0. Toute juxtaposition formera une chaîne permise, puisque chaque 1 sera précédé et suivi d'un 0.
D'après le cas précédent, le nombre de combinaisons de $k-1$ blocs et de $(n-2)-(k-1)$ zéros est égal à $\binom{(n-2)-(k-1)}{k-1}$ ou $\binom{n-k-1}{k-1}$. Il y a donc $\binom{n-k-1}{k-1}$ telles chaînes.
Donc le nombre total de chaînes est égal à $f(n,k) = \binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1}$.

Pour démontrer l'identité requise, on utilisera l'identité $\binom{m}{r} = \binom{m-1}{r} + \binom{m-1}{r-1}$, appelée identité de Pascal, qui sera démontrée plus loin.
On a :

$$\begin{aligned}
&f(n-1,k) + f(n-2,k-1)\\
&= \binom{(n-1)-k}{k} + \binom{(n-1)-k-1}{k-1} + \binom{(n-2)-(k-1)}{k-1} + \binom{(n-2)-(k-1)-1}{(k-1)-1}\\
&= \binom{n-k-1}{k} + \binom{n-k-2}{k-1} + \binom{n-k-1}{k-1} + \binom{n-k-2}{k-2}\\
&= \binom{n-k-1}{k} + \binom{n-k-1}{k-1} + \binom{n-k-2}{k-1} + \binom{n-k-2}{k-2}\\
&= \binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1} \qquad \text{(d'après l'identitié de Pascal)}\\
&= f(n,k)
\end{aligned}$$

On démontre l'identité de Pascal en commençant par le membre de droite :

$$\begin{aligned}
\binom{m-1}{r} + \binom{m-1}{r-1} &= \frac{(m-1)!}{r!(m-r-1)!} + \frac{(m-1)!}{(r-1)!(m-r)!}\\
&= \frac{(m-1)!(m-r)}{r!(m-r-1)!(m-r)} + \frac{r(m-1)!}{r(r-1)!(m-r)!}\\
&= \frac{(m-1)!(m-r)}{r!(m-r)!} + \frac{r(m-1)!}{r!(m-r)!}\\
&= \frac{(m-1)!(m-r+r)}{r!(m-r)!}\\
&= \frac{(m-1)!m}{r!(m-r)!}\\
&= \frac{m!}{r!(m-r)!}\\
&= \binom{m}{r}
\end{aligned}$$

(c) On utilise la formule pour $f(n,k)$ qui a été développée dans la Solution 2 de la partie (b).
Pour étudier la divisibilité, on la simplifie d'abord :

$$\begin{aligned}
f(n,k) &= \binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1}\\
&= \frac{(n-k)!}{k!(n-k-k)!} + \frac{(n-k-1)!}{(k-1)!((n-k-1)-(k-1))!}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(n-k)!}{k!(n-2k)!} + \frac{(n-k-1)!}{(k-1)!(n-2k)!} \\
&= \frac{(n-k-1)!(n-k)}{k!(n-2k)!} + \frac{(n-k-1)!k}{k!(n-2k)!} \\
&= \frac{(n-k-1)!(n-k+k)}{k!(n-2k)!} \\
&= \frac{n(n-k-1)!}{k!(n-2k)!} \\
&= \frac{n(n-k-1)(n-k-2)\cdots(n-2k+2)(n-2k+1)}{k!}
\end{aligned}$$

L'expression de $f(n,k)$ sous la forme du quotient de deux produits simplifie le regard qu'on porte sur la divisibilité.
On remarque que $2009 = 41 \times 49$, ou $2009 = 7^2 \times 41$. Pour que $f(n,k)$ soit un multiple de 2009, il faut que $f(n,k)$ soit divisible par 41 et deux fois par 7. Il faut donc que le numérateur de $f(n,k)$ contienne un diviseur 41 de plus et deux diviseurs 7 de plus que le dénominateur.
Puisqu'on cherche à minimiser $n+k$, on utilise des valeurs de n et de k aussi petites que possible.
Si $n = 49$ et $k = 5$, alors :

$$f(49,5) = \frac{49(43)(42)(41)(40)}{5!} = \frac{49(43)(42)(41)(40)}{5(4)(3)(2)(1)} = 49(43)(14)(41)$$

Cette expression est divisible par 2009.
On démontre que le couple $(49,5)$ produit la valeur minimale de $n+k$.

On examine les cas possibles en considérant séparément les facteurs 41 et 7. On commence par le facteur 41.
Le numérateur est divisible par 41 si n est divisible par 41 ou si un des facteurs de l'expression $(n-k-1)(n-k-2)\cdots(n-2k+1)$ est divisible par 41.

<u>1^er cas : n est divisible par 41</u>

On sait déjà que $n = 82$ est trop grand. On considère donc $n = 41$. D'après la définition de $f(n,k)$, on a $k \leq 20$, car on ne peut placer plus de 20 cadeaux dans 41 assiettes.
Le numérateur de $f(41,k)$ est le produit du nombre 41 et de $k-1$ entiers consécutifs dont le plus grand est $40-k$.
Or, il faut que le numérateur contienne au moins deux diviseurs 7 de plus que le dénominateur.
Puisque le numérateur contient le produit de $k-1$ entiers consécutifs et que le dénominateur est le produit de k entiers consécutifs, alors le dénominateur contiendra au moins autant de diviseurs 7 que le numérateur (puisque le dénominateur est le produit d'un plus grand nombre d'entiers consécutifs). Donc, il est impossible que le numérateur contienne même un diviseur 7 de plus que le dénominateur.
Donc si $n = 41$, alors $f(n,k)$ ne peut être divisible par 2009.

<u>2^e cas : n n'est pas divisible par 41</u>

Le nombre 41 doit donc paraître comme facteur dans l'expression

$$(n-k-1)(n-k-2)\cdots(n-2k+1)$$

car un multiple comme 82 ferait en sorte que n serait supérieur à 82, ce qui ne minimiserait pas la valeur de $n+k$. On cherche donc des valeurs de n et de k qui produisent un facteur 41 dans cette expression.
On remarque que dans l'expression, $n-k-1$ est le plus grand facteur et $n-2k+1$ est le plus petit.
Puisque 41 paraît dans l'expression, on a $n-2k+1 \leq 41$ (d'où $n \leq 40+2k$) et $41 \leq n-k-1$ (d'où $n \geq 42+k$).
On combine ces deux restrictions pour obtenir $42+k \leq n \leq 40+2k$.

On se penche maintenant sur les diviseurs 7.
Ou bien n n'est pas divisible par 7 ou bien n est divisible par 7.

- Si n n'est pas divisible par 7, le nombre 7 doit être deux fois un diviseur de l'expression :

$$(n-k-1)(n-k-2)\cdots(n-2k+1)$$

  Donc $k \geq 8$ (pour qu'il y ait deux multiples de 7 dans l'expression de $k-1$ entiers consécutifs) ou un des facteurs est un multiple de 49.
  - Si $k \geq 8$, alors $n \geq 42+k \geq 50$. Donc $n+k \geq 58$, ce qui n'est pas une valeur minimale.
  - Si un des facteurs est un multiple de 49, alors 49 doit paraître dans la liste. Donc $n-2k+1 \leq 49$ (d'où $n \leq 48+2k$) et $49 \leq n-k-1$ (d'où $n \geq 50+k$).
    Or, on sait déjà que $42+k \leq n \leq 40+2k$ et on a maintenant $50+k \leq n \leq 48+2k$.
    Ces deux intervalles chevauchent si $50+k \leq 40+2k$, où $k \geq 10$, ce qui implique que $n \geq 50+k \geq 60$, ou $n+k \geq 70$, ce qui n'est pas une valeur minimale.
- On considère le cas où n est divisible par 7.
  On doit avoir $42+k \leq n \leq 40+2k$ (pour inclure 41 dans les facteurs) et n doit être un multiple de 7.
  Puisque k est supérieur ou égal à 2 par définition, alors $n \geq 42+k \geq 44$, et n est donc supérieur ou égal à 49.
  Si n était supérieur ou égal à 56, on n'aurait pas une valeur minimale de $n+k$.
  Il faut donc que $n=49$. Il n'est donc pas nécessaire de chercher un autre multiple de 7.
  Pour compléter ce cas, il faut déterminer la plus petite valeur de k pour laquelle 49 est dans l'intervalle de $42+k$ à $40+2k$, car il faut que $42+k \leq n \leq 40+2k$.
  Cette valeur de k est $k=5$, ce qui donne $n+k=49+5$, ou $n+k=54$.

Puisqu'on a déjà démontré que $f(49,5)$ est divisible par 2009, 54 est bien la valeur minimale de $n+k$.