Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Euclide

le mardi 7 avril 2009

Avec la contribution de:

University of Waterloo

Great-West, London Life, Canada-Vie

LA PARFAITE ALLIANCE COMMUNAUTAIRE^MC

Samson Bélair Deloitte & Touche Comptables agréés

Maplesoft

Avec la participation de:

Canadian Institute of Actuaries / Institut canadien des actuaires

---

Durée : 2 heures et demie

L'utilisation de la calculatrice est permise, pourvu que celle-ci ne soit ni programmable, ni munie d'affichage graphique.

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal. Le concours est composé de 10 questions de 10 points chacune. Chaque question peut avoir des parties à réponse courte et des parties à développement. Une partie à **RÉPONSE COURTE** vaut 3 points. Les parties **À DÉVELOPPEMENT** valent le reste des 10 points attribués à la question.

Directives pour les questions à RÉPONSES COURTES

1. Les parties à **RÉPONSES COURTES** sont indiquées comme ceci : .
2. **Écrire la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse.** Le maximum des points est attribué pour une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. Une partie des points sera attribuée **pour du travail pertinent** inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse.

Directives pour les questions À DÉVELOPPEMENT

1. Les questions **À DÉVELOPPEMENT** sont indiquées comme ceci : .
2. **Les solutions complètes doivent être écrites aux endroits appropriés du cahier-réponse.** Le brouillon doit être fait ailleurs. Si le cahier est rempli, le surveillant ou la surveillante distribuera des feuilles lignées. Insérer ces feuilles dans le cahier-réponse. Inscrire son nom, le nom de son école et le numéro du problème sur chaque feuille insérée.
3. Des points sont attribués pour les solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

Remarque : À la fin du concours, insérer la feuille de renseignements à l'intérieur du cahier-réponse.

Le nom de quelques-uns des candidats ayant obtenu les meilleurs résultats sera publié dans les Résultats du concours Euclide sur notre site web à http://www.cemc.uwaterloo.ca.

REMARQUES

1. Bien lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Écrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de « », le maximum des points est accordé à une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. **Si une réponse est incorrecte, une partie des points peut être accordée pour du travail pertinent** inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse. On encourage fortement les candidates et les candidats à montrer leur travail.
4. Sauf indication contraire, les réponses et les calculs devraient être exprimés au moyen de valeurs exactes, telles que 4π, $2+\sqrt{7}$, plutôt que 12,566 . . . ou 4,646 . . .

Remarque au sujet de l'encodage

S'assurer d'avoir bien encodé votre nom, votre date de naissance, votre niveau et votre sexe sur la feuille de renseignements et d'avoir répondu à la question portant sur l'admissibilité.

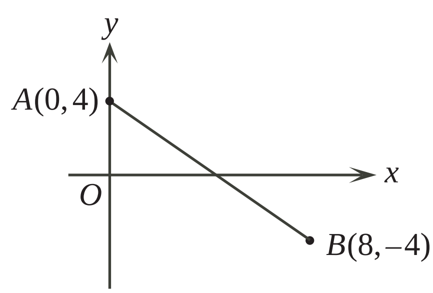
Remarque au sujet de la rédaction des solutions

Lorsqu'un problème est accompagné de « », une solution complète est exigée. Une solution devrait être bien organisée et contenir une dose appropriée d'énoncés mathématiques et de mots d'explications et de justification. Avant de rédiger une solution finale, il est bon de rédiger les grandes lignes et certains détails au brouillon. La solution finale devrait permettre à la correctrice ou au correcteur de comprendre l'approche choisie ainsi que toutes les étapes mathématiques suivies.

1. (a) Une droite a pour équation $6x+3y-21=0$. Quelle est la pente de la droite ?

   (b) Une droite de pente 3 passe aux points $(1,0)$ et $(5,c)$. Quelle est la valeur de c ?

   (c) Le point (k,k) est situé sur le segment de droite AB de la figure ci-contre. Déterminer la valeur de k.

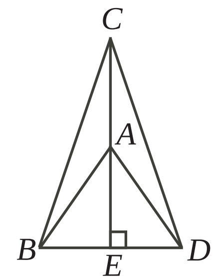


2. (a) Quelle est la somme des deux nombres qui vérifient l'équation $x^2-6x-7=0$?

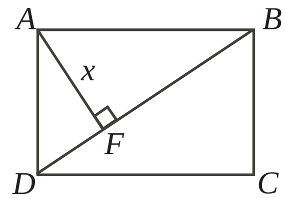
   (b) Quel est le produit des deux nombres qui vérifient l'équation $5x^2-20=0$?

   (c) Déterminer la moyenne des nombres qui vérifient l'équation $x^3-6x^2+5x=0$.

3. (a) Dans la figure ci-contre, $AB = AC = AD = BD$ et CAE est un segment de droite perpendiculaire à BD. Quelle est la mesure de l'angle CDB ?



(b) Le point F est situé sur la diagonale BD du rectangle $ABCD$ de manière que AF soit perpendiculaire à BD. De plus, $BC = 30$, $CD = 40$ et $AF = x$. Déterminer la valeur de x.

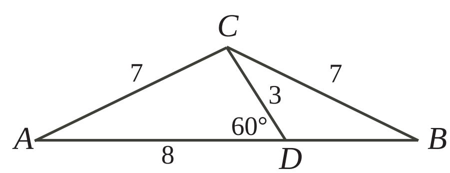


4. (a) Le premier terme d'une suite arithmétique est égal à 1 et le dernier terme est égal à 19. La somme de tous les termes de la suite est égale à 70. Combien la suite a-t-elle de termes ?

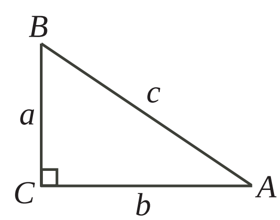
(Une *suite arithmétique* est une suite dans laquelle chaque terme, à partir du 2^{e}, est formé en ajoutant une constante au terme précédent. Par exemple, 3, 5, 7, 9 est une suite arithmétique de quatre termes.)

(b) Supposons que l'égalité $a(x + b(x + 3)) = 2(x + 6)$ est vérifiée par *toutes* les valeurs de x. Déterminer a et b.

5. (a) Dans la figure ci-contre, le triangle ABC est isocèle et $AC = BC = 7$. Le point D est situé sur AB de manière que $\angle CDA = 60°$, $AD = 8$ et $CD = 3$. Déterminer la longueur de BD.

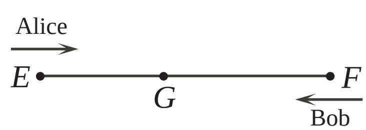


(b) Dans la figure ci-contre, le triangle ABC est rectangle en C. De plus, $2 \sin B = 3 \tan A$. Déterminer la mesure de l'angle A.



6. (a) Un entier n, (où $100 \leq n \leq 999$) est choisi au hasard. Quelle est la probabilité pour que la somme des chiffres de n soit égale à 24 ?

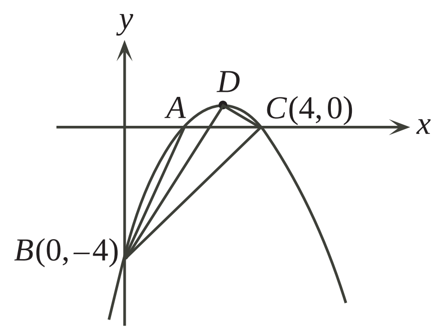
(b) Alice a conduit sa voiture de la ville E à la ville F à une vitesse constante de 60 km/h. Bob a conduit sa voiture de F à E sur la même route, à une vitesse constante. Les deux ont commencé leur trajet à la même heure et ils se sont croisés au point G.



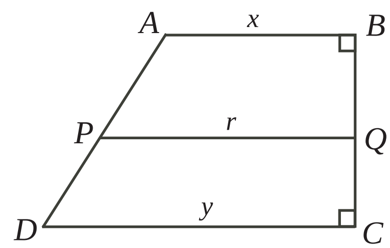
Alice a parcouru la distance de G à F en 45 minutes. Bob a parcouru la distance de G à E en 20 minutes. Déterminer la vitesse constante de Bob.

7. (a) La parabole définie par $y = x^2 - 2x + 4$ subit une translation de p unités vers la droite et de q unités vers le bas. L'image de la parabole a pour abscisses à l'origine 3 et 5. Quelles sont les valeurs de p et q ?

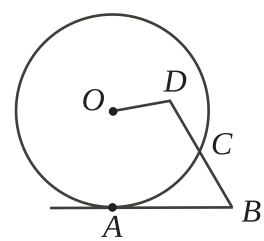
(b) Dans la figure ci-contre, D est le sommet d'une parabole. La parabole coupe l'axe des abscisses en A et en $C(4, 0)$. La parabole coupe également l'axe des ordonnées en $B(0, -4)$. Sachant que le triangle ABC a une aire de 4, déterminer l'aire du triangle DBC.



8. (a) Les côtés AB et DC du trapèze $ABCD$ sont parallèles. De plus, le côté BC est perpendiculaire à AB et à DC. Le segment PQ est parallèle à AB et il divise le trapèze en deux régions qui ont la même aire. Soit $AB = x$, $DC = y$ et $PQ = r$. Démontrer que $x^2 + y^2 = 2r^2$.



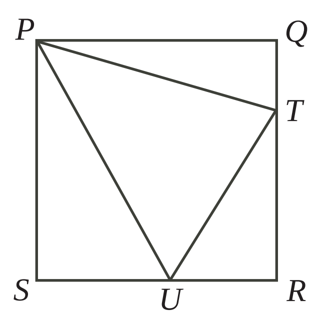
(b) Dans la figure ci-contre, AB est tangent au cercle de centre O et de rayon r. AB a pour longueur p. Le point C est situé sur le cercle et le point D est situé à l'intérieur du cercle de manière que BCD forme un segment de droite, comme l'indique la figure. Sachant que $BC = CD = DO = q$, démontrer que $q^2 + r^2 = p^2$.



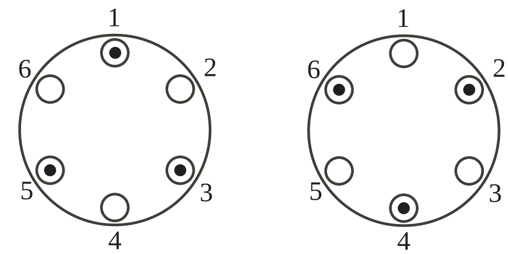
9. (a) Sachant que $\log_2 x$, $(1 + \log_4 x)$ et $\log_8 4x$ sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique, déterminer les valeurs possibles de x.

(Une *suite géométrique* est une suite dans laquelle chaque terme, à partir du 2$^{\text{e}}$, est formé en multipliant le terme précédent par une constante. Par exemple, 3, 6, 12 est une suite géométrique de trois termes.)

(b) Dans la figure ci-contre, $PQRS$ est un carré avec des côtés de longueur 4. Les points T et U sont situés sur les côtés respectifs QR et RS de manière que $\angle UPT = 45°$. Déterminer le périmètre maximal possible du triangle RUT.



10. Supposons qu'il y a n assiettes espacées également autour d'une table de forme circulaire. Rudi veut placer un cadeau identique dans chacune de k assiettes de manière que deux assiettes voisines ne puissent contenir chacune un cadeau. Soit $f(n, k)$ le nombre de façons possibles de répartir les cadeaux. Par exemple, $f(6, 3) = 2$, comme on peut le constater dans la figure suivante.



(a) Déterminer la valeur de $f(7, 3)$.

(b) Démontrer que $f(n, k) = f(n-1, k) + f(n-2, k-1)$ pour tous les entiers tels que $n \geq 3$ et $k \geq 2$.

(c) Déterminer la plus petite valeur possible de $n+k$ parmi tous les couples possibles d'entiers (n, k) pour lesquels $f(n, k)$ est un multiple strictement positif de 2009 (où $n \geq 3$ et $k \geq 2$).

Concours canadien de mathématiques

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Euclide de 2009!
En 2008, plus de 14 000 élèves à travers le monde se sont inscrits au concours Euclide.

Si vous terminez l'école secondaire, nous vous souhaitons bonne chance.
Si vous retournez à l'école secondaire l'an prochain, encouragez votre enseignant à vous inscrire au Défi ouvert canadien de mathématiques Financière Sun Life qui aura lieu fin novembre.

Visitez notre site Web au www.cemc.uwaterloo.ca pour
- **plus d'information à propos du Défi ouvert canadien de mathématiques Financière Sun Life**
- **des copies gratuites des concours précédents**
- **des ateliers pour vous aider à vous préparer pour les prochains concours**
- **de l'information au sujet de nos publications qui visent l'enrichissement en mathématiques et la préparation aux concours**

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web au www.cemc.uwaterloo.ca pour
- **obtenir des renseignements concernant les concours de 2009/2010**
- **vous renseigner sur des ateliers et des ressources disponibles pour les enseignants**
- **trouver les résultats de votre école**