Concours canadien de mathématiques
Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique
Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Cayley 2009

(10^{e} année – Secondaire IV)

le mercredi 18 février 2009

Solutions

1. On a : $\dfrac{10^2 - 10}{9} = \dfrac{100-10}{9} = \dfrac{90}{9} = 10$

Réponse : (A)

2. Samedi, Deepit a travaillé 6 heures. Dimanche, il a travaillé 4 heures.
Samedi et dimanche, il a travaillé un total de 10 heures ($6 + 4 = 10$).

Réponse : (E)

3. Puisque $3(-2) = \nabla + 2$, alors $-6 = \nabla + 2$, d'où $\nabla = -6 - 2$, ou $\nabla = -8$.

Réponse : (C)

4. Puisque $\sqrt{5+n} = 7$ et $7 = \sqrt{49}$, alors $5 + n = 49$, d'où $n = 44$.

Réponse : (D)

5. *Solution 1*
On a : $3^2 + 4^2 + 12^2 = 9 + 16 + 144 = 25 + 144 = 169 = 13^2$

Solution 2
Notre expérience avec le théorème de Pythagore nous rappelle que $3^2 + 4^2 = 5^2$.
(Cela vient du triangle rectangle remarquable 3-4-5.)
Donc : $3^2 + 4^2 + 12^2 = 5^2 + 12^2$
Si on connaît aussi le triangle rectangle remarquable 5-12-13, on sait que $5^2 + 12^2 = 13^2$.
Donc : $3^2 + 4^2 + 12^2 = 5^2 + 12^2 = 13^2$

Réponse : (A)

6. Puisque l'aire de la région ombrée est égale à 20 % de l'aire du cercle, alors la mesure $x°$ de l'angle au centre doit être 20 % de la mesure de l'angle au centre qui intercepte le cercle au complet.
Donc $x° = \frac{20}{100}(360°)$, ou $x = \frac{1}{5}(360)$, ou $x = 72$.

Réponse : (D)

7. Puisque la somme de la mesure des angles d'un triangle est égale à 180°, alors dans le triangle QSR, on a :

$$\angle SQR = 180° - \angle QSR - \angle SRQ = 180° - 90° - 65° = 25°$$

Puisque $PQ = PR$, alors $\angle PQR = \angle PRQ$.
Donc $x° + 25° = 65°$, ou $x + 25 = 65$, d'où $x = 40$.

Réponse : (E)

8. D'après l'énoncé, on cherche le choix de réponse qui est vrai peu importe le choix des trois entiers consécutifs.
On choisit 1(2)(3) pour voir si le produit nous permet d'éliminer certains choix de réponse.
Or $1(2)(3) = 6$. 6 n'est pas un multiple de 4, de 5 ou de 12. De plus, 6 n'est pas impair.
Donc, seul le choix « un multiple de 6 » est possible.
(On peut affirmer que le produit de n'importe quels trois entiers consécutifs strictement positifs est toujours divisible par 6, puisque au moins un des entiers est pair et qu'un des entiers doit être un multiple de 3.)

Réponse : (B)

9. *Solution 1*
Puisqu'il y a 24 heures dans une journée, Francis passe $\frac{1}{3}$ de 24 heures, soit 8 heures, à dormir.
Il passe aussi $\frac{1}{4}$ de 24 heures, soit 6 heures, à étudier et $\frac{1}{8}$ de 24 heures, soit 3 heures, à manger.
Il lui reste donc $24 - 8 - 6 - 3$ heures, ou 7 heures.

Solution 2
La fraction totale de la journée que Francis passe à dormir, à étudier et à manger est égale à $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$, ou $\frac{8+6+3}{24}$, ou $\frac{17}{24}$.
La fraction de la journée qu'il lui reste est égale à $1 - \frac{17}{24}$, ou $\frac{7}{24}$.
Puisqu'il y a 24 heures dans une journée, il lui reste 7 heures.

Réponse : (D)

10. *Solution 1*
Soit h cm la hauteur de la boîte, L cm sa longueur et l cm sa largeur.
D'après les aires de faces données, on a $Lh = 12$, $Ll = 8$ et $lh = 6$.
On multiplie ces trois équations, membre par membre, pour obtenir $LhLllh = 12(8)(6)$, ou $L^2h^2l^2 = 576$.
Donc $(Lhl)^2 = 576$, d'où $Lhl = \sqrt{576}$, ou $Lhl = 24$, puisque $Lhl > 0$.
Puisque le volume de la boîte est égal à Lhl cm^3, il est égal à 24 cm^3.

Solution 2
On peut tenter de trouver des dimensions qui produiraient les aires données.
Après quelques tâtonnements, on détermine que la boîte a une longueur de 4 cm, une hauteur de 3 cm et une largeur de 2 cm, car avec ces dimensions, on obtient les aires données.
Le volume est donc égal à $(4 \times 3 \times 2)$ cm^3, ou 24 cm^3.

Solution 3
Soit h cm la hauteur de la boîte, L cm sa longueur et l cm sa largeur.
D'après les aires de faces données, on a $Lh = 12$, $Ll = 8$ et $lh = 6$.
D'après la première équation, $L = \dfrac{12}{h}$.
On reporte $L = \dfrac{12}{h}$ dans la deuxième équation pour obtenir $\dfrac{12l}{h} = 8$.
On multiplie cette équation et l'équation $lh = 6$, membre par membre, pour obtenir $12l^2 = 48$, d'où $l^2 = 4$, ou $l = 2$, puisque $l > 0$.
Puisque $lh = 6$, alors $2h = 6$, ou $h = 3$.
Puisque $Ll = 8$, alors $2L = 8$, ou $L = 4$.
Le volume est donc égal à $(4 \times 3 \times 2)$ cm^3, ou 24 cm^3.

Réponse : (A)

11. Pour maximiser le nombre de chansons qu'elle peut jouer en 3 heures, Gabrielle devrait utiliser autant de chansons courtes que possible. (En remplaçant une chanson longue par une chanson courte, elle diminue le temps utilisé.)
Si Gabrielle utilise toutes les 50 chansons courtes de sa collection, elle utilisera 150 minutes.
Il lui reste 30 minutes ($180 - 150 = 30$). Elle peut donc jouer 6 chansons longues ($30 \div 5 = 6$) qui ont chacune une durée de 5 minutes.
En tout, elle peut jouer un maximum de 56 chansons ($50 + 6 = 56$).

Réponse : (C)

12. Puisqu'il y a 6 colonnes et que chaque terme de la suite est 3 de plus que le terme précédent, alors chaque nombre dans une case est 18 de plus que le nombre dans la case directement au-dessus. (Chaque nombre dans une case se trouve à 6 termes plus loin dans la suite que le nombre dans la case directement au-dessus.)
Donc, x est égal à $17 + 5(18)$, ou $17 + 90$, ou 107, puisqu'il se trouve à 5 rangées directement au-dessous de 17.

RÉPONSE : (C)

13. Au départ, la pièce de monnaie se trouve sur le 8^{e} carreau, en comptant de gauche à droite.
Après le 1er jet du dé, la pièce est déplacée de 1 carreau vers la gauche, puisque 1 est impair.
Après le 2^{e} jet du dé, la pièce est déplacée de 2 carreaux vers la droite, puisque 2 est pair.
Après les 6 jets du dé, la pièce se trouve sur le 11^{e} carreau ($8 - 1 + 2 - 3 + 4 - 5 + 6 = 11$), soit 3 carreaux à la droite du carreau initial.

RÉPONSE : (E)

14. Parmi les entiers de 3 à 20, les nombres 3, 5, 7, 11, 13, 17 et 19 sont premiers.
Donc, les entiers 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18 et 20 sont des nombres composés.
La somme de trois nombres composés différents doit être supérieure ou égale à $4 + 6 + 8$, ou 18.
Donc, 19 est le plus petit nombre premier qui pourrait être égal à la somme de trois nombres composés différents.
Peut-on écrire 19 comme somme de trois nombres composés différents ? Oui : $19 = 4 + 6 + 9$

RÉPONSE : (D)

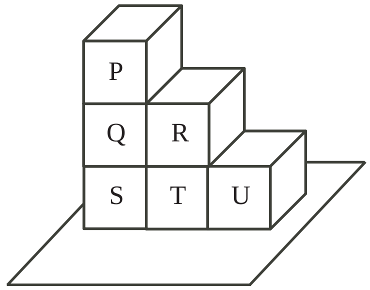
15. On tentera d'écrire les cinq nombres en ordre croissant.
On sait que le nombre 8 paraît au moins deux fois dans la liste.
Puisque la médiane de la liste est égale à 9, alors le nombre du milieu (le troisième) est égal à 9.
La liste est donc a, b, 9, d, e.
Puisque le nombre 8 paraît au moins deux fois et que le troisième nombre est 9, alors le 8 paraît exactement deux fois et on a donc $a = b = 8$.
La liste est donc 8, 8, 9, d, e.
Puisque la liste a une moyenne de 10 et qu'elle contient cinq nombres, alors la somme des nombres de la liste est égale à 5(10), ou 50.
Donc $8 + 8 + 9 + d + e = 50$, d'où $25 + d + e = 50$, ou $d + e = 25$.
Puisque 8 est le seul nombre qui paraît plus d'une fois, alors $d > 9$.
Donc $10 \leq d < e$ et $d + e = 25$.
Pour que e soit aussi grand que possible, il faut que d soit aussi petit que possible. On choisit donc $d = 10$. Donc $e = 15$.
La liste 8, 8, 9, 10, 15 satisfait à toutes les conditions. Le plus grand entier possible qui pourrait paraître dans la liste est donc 15.

RÉPONSE : (A)

16. Soit x la longueur des côtés des petits carrés. (Puisque les petits carrés ont la même hauteur, leurs côtés doivent avoir la même longueur.)
Les côtés du plus grand carré ont donc une longueur de $4x$.
Puisque les côtés des carrés ombrés ont une longueur de 10, alors $QR = 3(10) = 30 = PS$.
Donc $PS = 30 = 4x + x$, d'où $5x = 30$, ou $x = 6$.
Le plus grand carré a donc des côtés de longueur 4(6), ou 24.

RÉPONSE : (B)

17. On nomme les six dés comme suit :



La somme maximale des numéros sur les 21 faces exposées se produit lorsque l'on maximise la somme des numéros sur les faces exposées de chaque dé.
Le dé P a 5 faces exposées. La somme des numéros sur ses faces exposées est maximisée lorsque la face 1 est cachée. La somme est égale à $2+3+4+5+6$, ou 20.
Les dés Q et S ont chacun 3 faces exposées. Deux de ces faces sont opposées et leurs numéros ont donc une somme de 7. Pour maximiser la somme des numéros sur les faces exposées de ces dés, on place les dés de manière que le numéro sur la face exposée non appariée soit un 6. (Ce numéro paraîtra du côté gauche de la pile.) La somme des numéros sur les faces exposées de chacun de ces dés est égale à $6+7$, ou 13.
Les dés R et U ont chacun 4 faces exposées. Deux de ces faces sont opposées et leurs numéros ont donc une somme de 7. Pour maximiser la somme des numéros sur les faces exposées de ces dés, on place les dés de manière que les numéros sur les faces non appariées soient un 5 et un 6 (sur le dessus et du côté droit de la pile). La somme des numéros sur les faces exposées de chacun de ces dés est égale à $5+6+7$, ou 18.
Le dé T a 2 faces exposées et ces faces sont opposées l'une à l'autre. Les numéros sur ces faces exposées ont donc une somme de 7.
Donc, la somme maximale des numéros sur les 21 faces exposées de ces dés est égale à $20+13+13+18+18+7$, ou 89.

Réponse : (C)

18. Le segment QP a une pente de 1. Puisqu'il y a un déplacement vertical de 6 unités du point Q au point P, le déplacement horizontal est aussi de 6 unités. Le point Q est donc situé à 6 unités à la gauche du point P et il a donc pour coordonnées $(-5,0)$.
Le segment RP a une pente de 2. Puisqu'il y a un déplacement vertical de 6 unités du point R au point P, le déplacement horizontal est de $\frac{1}{2}(6)$ unités, ou de 3 unités. Le point R est donc situé à 3 unités à la gauche du point P et il a donc pour coordonnées $(-2,0)$.
(On aurait pu utiliser les coordonnées de P et les pentes pour déterminer que les droites ont pour équations respectives $y=x+5$ et $y=2x+4$ et utiliser ces équations pour déterminer les coordonnées de Q et de R.)
Donc $QR=-2-(-5)$, ou $QR=3$ et le point P est à 6 unités au-dessus de l'axe des abscisses.
On prend le segment QR comme base du triangle PQR. L'aire du triangle est donc égale à $\frac{1}{2}(3)(6)$, ou 9.

Réponse : (B)

19. *Solution 1*
Le produit des chiffres de n est égal à 0 si un des chiffres de n est égal à 0.
On considère les entiers de 5000 à 5999. Chacun peut s'écrire sous forme $5xyz$.
Combien de ces entiers ne contiennent *aucun* 0 ?
Si le nombre $5xyz$ n'inclut aucun 0, il y a 9 possibilités pour x, pour y et pour z (il s'agit des

chiffres de 1 à 9), ce qui fait qu'il y a 9^3, ou 729 tels entiers.
Donc, 271 des entiers de 5000 à 5999 ($1000 - 729 = 271$) ont au moins un chiffre 0.
On doit aussi inclure le nombre 6000 qui a des chiffres 0.
Il y a donc 272 entiers n (où $5000 \leq n \leq 6000$) dont le produit des chiffres est égal à 0.

Solution 2
Le produit des chiffres de n est égal à 0 si un des chiffres de n est égal à 0.
On compte le nombre d'entiers qui ont un chiffre 0 dans chacune des positions, tout en s'assurant de ne pas compter le même entier plus d'une fois.
L'entier $n = 6000$ a au moins un chiffre 0 et contribue donc 1 au nombre total.
Il y a 100 entiers de la forme $50xy$ (il s'agit des entiers de 5000 à 5099).
Il y a 10 entiers de la forme $510y$ (il s'agit des entiers de 5100 à 5109). De même, il y a 10 entiers de chacune des formes $520y$, $530y$, et ainsi de suite jusquà $590y$. On a donc 9 groupes de 10 entiers pour un total de 90 qui est ajouté au grand total.
Il y a 9 entiers de la forme $51x0$, où x n'est pas égal à 0 (il s'agit des entiers 5110, 5120 et ainsi de suite jusqu'à 5190). De même, il y a 9 entiers de chacune des formes $52x0$, $53x0$, et ainsi de suite. On a donc 9 groupes de 9 entiers pour un total de 81 qui est ajouté au grand total.
En tout, le nombre de tels entiers est égal à $1 + 100 + 90 + 81$, ou 272.

Réponse : (D)

20. Soit d km la longueur de sa route.
Puisque Hana arrive 1 minute en avance lorsqu'elle conduit à 75 km/h et 1 minute en retard lorsqu'elle conduit à 70 km/h, il y a une différence de 2 minutes, ou $\frac{1}{30}$ d'heure entre ces deux temps.
À une vitesse de 75 km/h, elle met $\dfrac{d}{75}$ heures pour faire le trajet, tandis qu'à 70 km/h, elle met $\dfrac{d}{70}$ heures pour le faire. Donc :

$$\begin{aligned} \frac{d}{70} - \frac{d}{75} &= \frac{1}{30} \\ 75d - 70d &= \frac{75(70)}{30} \\ 5d &= 25(7) \\ d &= 35 \end{aligned}$$

Le chemin suivi a une longueur de 35 km.

Réponse : (B)

21. On compte les points de treillis en commençant par le point le plus près du segment horizontal PS et en s'arrêtant juste avant d'arriver au segment QR.
Pour qu'un point (a, b) de la droite d'équation $y = 3x - 5$ soit un point de treillis au-dessus du segment PS, il faut que $b \geq 0$. Il faut donc que $3a - 5 \geq 0$, ou $3a \geq 5$, ou $a \geq \frac{5}{3}$.
Puisque a est un entier, alors $a \geq 2$. (Avec $a = 2$, on obtient le point $(2, 1)$.)
Pour qu'un point (a, b) de la droite d'équation $y = 3x - 5$ soit un point de treillis au-dessous du segment QR, il faut que $b \leq 2009$. Il faut donc que $3a - 5 \leq 2009$, ou $3a \leq 2014$, ou $a \leq \frac{2014}{3}$.
Puisque a est un entier, alors $a \leq 671$. (Avec $a = 671$, on obtient le point $(671, 2008)$.)
Donc, pour qu'un point (a, b) de treillis soit sur la droite et à l'intérieur du carré, il faut que $2 \leq a \leq 671$. De plus, chacune de ces valeurs entières de a donne un point de treillis, puisque chacune donne une valeur entière de b à cause de $b = 2a - 5$.

Le nombre de valeurs entières de a est égal à $671 - 1$, ou 670.
Il y a donc 670 tels points de treillis.

Réponse : (E)

22. *Solution 1*
On additionne la deuxième et la troisième équation, membre par membre, pour obtenir :

$$\begin{aligned} ac + b + bc + a &= 18 + 6 \\ c(a+b) + (a+b) &= 24 \\ (c+1)(a+b) &= 24 \end{aligned}$$

D'après la première équation donnée, $a + b = 3$. La dernière équation ci-dessus devient donc $(c+1)(3) = 24$, ou $c + 1 = 8$.
Donc $c = 7$.

Solution 2
D'après la première équation, $b = 3 - a$. (On pourrait aussi exprimer a en fonction de b.)
La deuxième équation devient $ac + (3 - a) = 18$, ou $ac - a = 15$.
La troisième équation devient $(3 - a)c + a = 6$, ou $-ac + 3c + a = 6$.
On additionne ces deux équations, membre par membre, pour obtenir $3c = 15 + 6$, ou $3c = 21$, ou $c = 7$.

Réponse : (E)

23. *Solution 1*
On suppose qu'Aglaé et Baruch partagent un terrain de 100 hectares. (On peut choisir n'importe quelle grandeur, puisqu'il s'agit de rapports.)
Puisque l'aire de la portion d'Aglaé et l'aire de la portion de Baruch sont dans un rapport de 3 : 2, alors la portion d'Aglaé correspond à $\frac{3}{5}$ des 100 hectares, soit 60 hectares. La portion de Baruch est donc de 40 hectares.
Puisque le terrain au complet est recouvert de maïs et de pois dans un rapport de 7 : 3, alors le maïs recouvre $\frac{7}{10}$ des 100 hectares, soit 70 hectares, et les pois recouvrent les 30 autres hectares.
La portion de terrain d'Aglaé est recourte de maïs et de pois dans un rapport de 4 : 1. Donc le maïs recouvre $\frac{4}{5}$ de ses 60 hectares, soit 48 hectares, et les pois recouvrent les 12 autres hectares.
Puisqu'il y a 70 hectares de maïs en tout, alors sur la portion de terrain de Baruch, le maïs recouvre $(70 - 48)$ hectares, c'est-à-dire 22 hectares.
Puisqu'il y a 30 hectares de pois en tout, alors sur la portion de terrain de Baruch, les pois recouvrent $30 - 12$ hectares, c'est-à-dire 18 hectares.
Donc, dans la portion de terrain de Baruch, le rapport du maïs et des pois est de 22 : 18, ou 11 : 9.

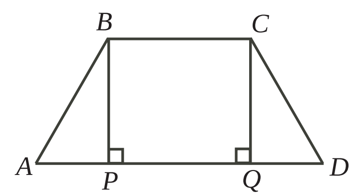
Solution 2
Soit x l'aire du terrain au complet.
Puisque l'aire de la portion d'Aglaé et l'aire de la portion de Baruch sont dans un rapport de 3 : 2, alors la portion d'Aglaé a une aire de $\frac{3}{5}x$ et la portion de Baruch a une aire de $\frac{2}{5}x$.
Puisque le terrain au complet est recouvert de maïs et de pois dans un rapport de 7 : 3, alors la portion de terrain recouverte de maïs a une aire de $\frac{7}{10}x$ et la portion de terrain recouverte de pois a une aire de $\frac{3}{10}x$.
La portion de terrain d'Aglaé est recouverte de maïs et de pois dans un rapport de 4 : 1. Donc le maïs recouvre $\frac{4}{5}$ de sa portion de terrain, soit une aire de $\frac{4}{5}$ de $\frac{3}{5}x$, ou $\frac{4}{5}(\frac{3}{5}x)$, ou $\frac{12}{25}x$. Les pois sur sa portion de terrain recouvrent une aire de $\frac{3}{5}x - \frac{12}{25}x$, ou $\frac{3}{25}x$.

Puisque la portion de terrain recouverte de maïs a une aire de $\frac{7}{10}x$, alors la portion du terrain de Baruch qui est recouverte de maïs a une aire de $\frac{7}{10}x - \frac{12}{25}x$, ou $\frac{35}{50}x - \frac{24}{50}x$, ou $\frac{11}{50}x$.
Puisque la portion de terrain recouverte de pois a une aire $\frac{3}{10}x$, alors la portion de terrain de Baruch qui est recouverte de pois a une aire de $\frac{3}{10}x - \frac{3}{25}x$, ou $\frac{15}{50}x - \frac{6}{50}x$, ou $\frac{9}{50}x$.
Donc, dans la portion de terrain de Baruch, le rapport du maïs et des pois est de $\frac{11}{50}x : \frac{9}{50}x$, ou 11 : 9.

Réponse : (A)

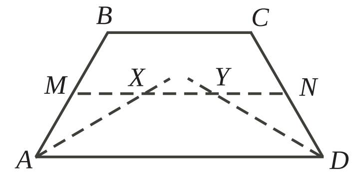
24. On remarque d'abord que le quadrilatère est un trapèze, car $60° + 120° = 180°$, ce qui assure que les côtés supérieur et inférieur sont parallèles.
Il faut déterminer l'aire du trapèze et la fraction du terrain qui est plus près du plus grand côté.

Aire du trapèze
On nomme le trapèze $ABCD$, comme dans la figure suivante, et aux points B et C, on abaisse les perpendiculaires BP et CQ au côté AD.



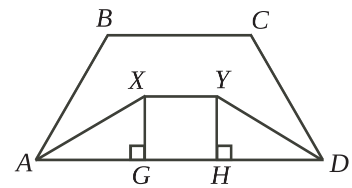
Puisque le triangle ABP est rectangle en P et que $\angle BAP = 60°$, alors $AP = 100\cos(60°)$ m, d'où $AP = 100(\frac{1}{2})$ m, ou $AP = 50$ m. De plus, $BP = 100\sin(60°)$ m, d'où $BP = 100(\frac{\sqrt{3}}{2})$ m, ou $BP = 50\sqrt{3}$ m. (On aurait pu utiliser les rapports des longueurs de côtés du triangle remarquable 30°-60°-90° pour obtenir les mêmes résultats.)
Par symétrie, $QD = 50$ m.
Puisque BC est parallèle à PQ et que BP et CQ sont perpendiculaires à PQ, alors $BPQC$ est un rectangle. Donc $PQ = BC = 100$ m. Donc $AD = (50 + 100 + 50)$ m, ou $AD = 200$ m.
L'aire du trapèze $ABCD$, en mètres carrés, est donc égale à $\frac{1}{2}(BC + AD)(BP)$, ou $\frac{1}{2}(100 + 200)(50\sqrt{3})$, ou $7500\sqrt{3}$.

Détermination de la région la plus près de AD
On doit déterminer la fraction du terrain qui est plus près du côté AD.
Pour être plus près du côté AD, un point à l'intérieur du trapèze doit être plus près du côté AD que de chacun des côtés BC, AB et DC.
Un point à l'intérieur du trapèze est plus près de AD que de BC s'il est situé au-dessous de la « ligne du milieu », c'est-à-dire au-dessous du segment MN (voir la figure ci-dessous).
Ce segment est à $\frac{1}{2}(50\sqrt{3})$ m, ou $25\sqrt{3}$ m au-dessus de AD.
Un point à l'intérieur du trapèze est plus près de AD que de AB s'il est situé au-dessous de la bissectrice de l'angle BAD. (Cet énoncé est justifié dans un paragraphe ci-dessous.)
De même, un point à l'intérieur du trapèze est plus près de AD que de DC s'il est situé au-dessous de la bissectrice de l'angle CDA.
Soit X et Y les points d'intersection respectifs du segment MN et des bissectrices des angles BAD et CDA. On confirmera un peu plus loin que les bissectrices se coupent au-dessus du segment MN et non pas au-dessous.



Aire du trapèze $AXYD$

Il reste à déterminer l'aire du trapèze $AXYD$.
On sait que $\angle XAD = \angle YDA = \frac{1}{2}(60^\circ) = 30^\circ$.
Aux points X et Y, on abaisse des perpendiculaires XG et YH à AD.



On sait que $AD = 200$ m et $XG = YH = 25\sqrt{3}$ m.
Puisque les triangles AXG et DYH sont des triangles remarquables 30°-60°-90°, alors :

$$AG = DH = \sqrt{3}XG = \sqrt{3}(25\sqrt{3}) = 75$$

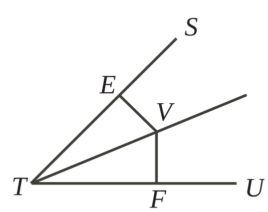
Ceci nous assure que les bissectrices se coupent au-dessus du segment MN, puisque $AG + HD = 150$ et $AD = 200$, d'où $AG + HD < AD$.
Puisque $XGHY$ est un rectangle (même raisonnement que pour $BPQC$), alors :

$$XY = GH = AD - AG - DH = 200 - 75 - 75 = 50$$

L'aire du trapèze $AXYD$, en mètres carrés, est donc égale à $\frac{1}{2}(AD + XY)(XG)$, ou $\frac{1}{2}(200 + 50)(25\sqrt{3})$, ou $3125\sqrt{3}$.
Donc, la fraction de la récolte qui est transportée sur le côté AD est égale à $\frac{3125\sqrt{3}}{7500\sqrt{3}}$, ou $\frac{25}{60}$, ou $\frac{5}{12}$.

Propriété des bissectrices

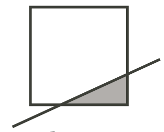
On justifie la propriété mentionnée précédemment.
On considère l'angle STU et un point V sur sa bissectrice.
Au point V, on abaisse une perpendiculaire VE à ST et une perpendiculaire VF à TU.



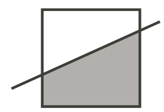
Les triangles VET et VFT sont congruents, puisqu'ils sont rectangles, que $\angle VTE = \angle VTF$ et qu'ils partagent la même hypoténuse TV.
Donc $EV = FV$, c'est-à-dire que le point V est équidistant de ST et de UT.
Donc, tout point sur la bissectrice est équidistant de ST et de UT.
Donc, n'importe quel point au-dessous de la bissectrice sera plus près du côté UT, puisqu'en déplaçant un point de la bissectrice vers le bas, il se rapproche de UT et s'éloigne de ST.

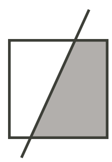
Réponse : (B)

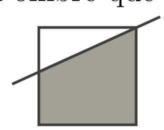
25. On superpose un repère cartésien de manière que l'origine $(0, 0)$ soit au sommet inférieur gauche, le point $(m, 0)$ au sommet inférieur droit, le point (m, n) au sommet supérieur droit et le point $(0, n)$ au sommet supérieur gauche.
La diagonale a donc une pente de $\dfrac{n}{m}$. Elle a donc pour équation $y = \dfrac{n}{m}x$.
Puisque $2n < m < 3n$, alors $\dfrac{1}{3} < \dfrac{n}{m} < \dfrac{1}{2}$. La pente est donc entre $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$.
Un carré partiellement ombré peut l'être d'une de trois façons :

- Un petit triangle est ombré, tandis que le reste du carré ne l'est pas : 

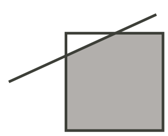
  Dans ce cas, le triangle a une base maximale de 1 et sa hauteur maximale survient lorsque la pente est à son maximum, soit $\frac{1}{2}$.
  Donc dans ce cas, l'aire maximale de la partie ombrée est égale à $\frac{1}{2}(1)(\frac{1}{2})$, ou $\frac{1}{4}$.
  Puisqu'on cherche une aire supérieure à 0,999, ce cas ne nous intéresse pas.

- La partie ombrée forme un trapèze, de même que la partie non ombrée : 

  (Puisque la pente est inférieure à 1, le cas  est impossible.)

  On considère l'aire de la partie non ombrée. Pour que l'aire de la partie ombrée soit supérieure à 0,999, l'aire de la partie non ombrée doit être inférieure à 0,001.
  Or, l'aire du trapèze non ombré est supérieure ou égale à l'aire du triangle non ombré que l'on obtient lorsque la diagonale du rectangle passe par le sommet supérieur droit : 

  Un tel triangle a une base de 1 et sa hauteur est supérieure ou égale à $\frac{1}{3}$ (puisque la pente est supérieure ou égale à $\frac{1}{3}$).
  Donc, l'aire d'un tel trapèze est supérieure ou égale à $\frac{1}{2}(1)(\frac{1}{3})$, ou $\frac{1}{6}$ et ne peut donc être inférieure à 0,001.

- La partie non ombrée forme un triangle : 

C'est ce cas qui nous apportera une réponse.
Soit (p, q) les coordonnées du sommet supérieur gauche d'un tel carré-unité.
Le point où la diagonale (d'équation $y = \dfrac{n}{m}x$) du rectangle coupe le côté supérieur du carré $(y = q)$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{m}{n}q, q\right)$, puisque lorsque $y = q$, alors $q = \dfrac{n}{m}x$, d'où $x = \dfrac{m}{n}q$.
De même, le point où la diagonale coupe le côté gauche $(x = p)$ du carré a pour coordonnées $\left(p, \dfrac{n}{m}p\right)$.
Donc, le triangle a une base horizontale de longueur $\dfrac{m}{n}q - p$ et une hauteur correspondante de longueur $q - \dfrac{n}{m}p$.
On sait aussi que ni la base, ni la hauteur n'est égale à 0, car la partie non ombrée n'est pas nulle.

Puisque l'aire du triangle non ombré doit être inférieure à 0,001, alors :

$$\begin{array}{rcccl} 0 & < & \frac{1}{2}\left(\dfrac{m}{n}q-p\right)\left(q-\dfrac{n}{m}p\right) & < & 0{,}001 \\ 0 & < & \left(\dfrac{m}{n}q-p\right)\left(q-\dfrac{n}{m}p\right) & < & 0{,}002 \\ 0 & < & (mq-pn)(mq-pn) & < & 0{,}002mn \qquad \text{(on a multiplié chaque membre par } mn\text{)} \\ 0 & < & 500(mq-pn)^2 & < & mn \qquad \text{(on a multiplié chaque membre par 500)} \end{array}$$

Or m, n, p et q sont des entiers et $mq-pn$ n'est pas nul. En effet, $mq-pn = n\left(\dfrac{m}{n}q-p\right) > 0$.
Donc $(mq-pn)^2 \geq 1$, car m, q, p et n sont tous des entiers et $(mq-pn)^2 > 0$.
Donc $mn > 500(1) = 500$.
Si $(mq-pn)^2 > 1$, alors mn serait beaucoup plus grand. Puisqu'on cherche la plus petite valeur de mn, on cherche à déterminer une solution avec $(mq-pn)^2 = 1$.

On cherche donc une valeur de m et une valeur de n (où $2n < m < 3n$) de manière que le produit mn soit aussi près de 500 que possible et de manière qu'on puisse déterminer une valeur de p et une valeur de q qui vérifient $mq-pn = 1$.
On considère d'abord la restriction $2n < m < 3n$ et on examine les entiers de 501 à 510 pour voir si on peut trouver des valeurs de m et de n dont le produit est égal à un de ces nombres et de manière que $2n < m < 3n$.

- $501 = 3(167)$ et 167 est premier. Ce n'est donc pas possible.
- $502 = 2(251)$ et 251 est premier. Ce n'est donc pas possible.
- 503 est premier. Ce n'est donc pas possible.
- $504 = 8(7)(9)$. On peut choisir $n = 14$ et $m = 36$ (seule façon possible).
- $505 = 5(101)$ et 101 est premier. Ce n'est donc pas possible.
- $506 = 11(2)(23)$. Aucune valeur possible de m et n.
- $507 = 3(13)(13)$. Aucune valeur possible de m et n.
- $508 = 4(127)$ et 127 est premier. Ce n'est donc pas possible.
- 509 est premier. Ce n'est donc pas possible.
- $510 = 2(3)(5)(17)$. On peut choisir $n = 15$ et $m = 34$ (seule façon possible).

Il y a donc deux paires de valeurs possibles de m et de n que l'on peut considérer. Si une des paires fonctionne, cette paire donnera la plus petite valeur possible de mn.
Pour vérifier si une des paires fonctionne, il faut trouver des valeurs appropriées de p et de q.
On considère $n = 14$ et $m = 36$. On cherche des valeurs entières de p et de q de manière que $36q - 14p = 1$. Ce n'est pas possible car d'après cette équation, le membre de gauche doit être pair et le membre de droite est impair.
On considère $n = 15$ et $m = 34$. On cherche des valeurs entières de p et de q de manière que $34q - 15p = 1$.
Les entiers $q = 4$ et $p = 9$ vérifient cette équation.
Donc, $(m, n) = (34, 15)$ est le couple qui donne la plus petite valeur possible de mn qui vérifient les conditions données. Donc $mn = 510$.

Réponse : (C)