Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique
Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Pascal 2008

(9[e] année – Secondaire III)

le mardi 19 février 2008

Solutions

1. On a : $\dfrac{2+3+4}{2\times3\times4} = \dfrac{9}{24} = \dfrac{3}{8}$

Réponse : (E)

2. Puisque $3x-9=12$, alors $3x=12+9$, ou $3x=21$.
Puisque $3x=21$, alors $2(3x)=2(21)$, ou $6x=42$.
(Remarquer qu'on n'a pas demandé de déterminer la valeur de x.)

Réponse : (A)

3. On a : $\sqrt{5^2-4^2} = \sqrt{25-16} = \sqrt{9} = 3$

Réponse : (B)

4. *Solution 1*
Puisque $JLMR$ est un rectangle et que $JR=2$, alors $LM=2$.
De même, puisque $JL=8$, alors $RM=8$.
Puisque $RM=8$ et $RQ=3$, alors $QM=8-3$, ou $QM=5$.
Puisque $KLMQ$ est un rectangle et que $QM=5$ et $LM=2$, son aire est égale à 5×2, ou 10.

Solution 2
Puisque $JL=8$ et $JR=2$, alors l'aire du rectangle $JLMR$ est égale à 2×8, ou 16.
Puisque $RQ=3$ et $JR=2$, alors l'aire du rectangle $JKQR$ est égale à 2×3, ou 6.
L'aire du rectangle $KLMQ$ est égale à la différence de ces aires, soit $16-6$, ou 10.

Réponse : (C)

5. Puisque $x=12$ et $y=-6$, alors :

$$\frac{3x+y}{x-y} = \frac{3(12)+(-6)}{12-(-6)} = \frac{30}{18} = \frac{5}{3}$$

Réponse : (C)

6. *Solution 1*
Puisque l'angle PQS est un angle extérieur du triangle QRS, alors $\angle PQS = \angle QRS + \angle QSR$.
Donc $136^\circ = x^\circ + 64^\circ$, d'où $x = 136-64$, ou $x=72$.

Solution 2
Puisque $\angle PQS = 136^\circ$, alors $\angle RQS = 180^\circ - \angle PQS$, d'où $\angle RQS = 180^\circ - 136^\circ$, ou $\angle RQS = 44^\circ$.
Puisque la somme de la mesure des angles du triangle QRS est égale à 180°, alors $44^\circ + 64^\circ + x^\circ = 180^\circ$, d'où $x = 180-44-64$, ou $x=72$.

Réponse : (A)

7. Le nombre de bonbons dans le sac est égal à $5+6+7+8$, ou 26.
Puisqu'il y a 8 bonbons bleus, la probabilité de choisir un bonbon bleu est égale à $\frac{8}{26}$, ou $\frac{4}{13}$.

Réponse : (D)

8. Puisque Odile a vendu 108 pommes en 6 heures, alors à chaque heure, elle a vendu 18 pommes ($108 \div 6 = 18$). Ceci est équivalent à 9 pommes à chaque demi-heure.
Dans une heure et 30 minutes, il y a 3 demi-heures. Odile a donc vendu 3×9 pommes, soit 27 pommes, en une heure et 30 minutes.

RÉPONSE : (A)

9. Puisque le grillage rectangulaire a une longueur de 10 et qu'il y a 5 carrés sur sa longueur, chaque carré a des côtés de longueur $10 \div 5$, ou 2.
Il y a 4 fils horizontaux, chacun de longueur 10, pour une longueur totale de 4×10, ou 40.
Puisque chaque petit carré a des côtés de longueur 2 et que le grillage est 3 carrés de haut, il a une hauteur de 3×2, ou 6.
Il y a 6 fils verticaux, chacun de longueur 6, pour une longueur totale de 6×6, ou 36.
Pour construire le grillage, il faut du fil de fer d'une longueur de $40 + 36$, ou 76.

RÉPONSE : (E)

10. *Solution 1*
Puisque Q est à 46 et que P est à -14, alors la distance de P à Q, sur la droite numérique, est égale à $46 - (-14)$, ou 60.
Puisque le point S est situé aux trois quarts du chemin de P à Q, alors S est à $-14 + \frac{3}{4}(60)$, c'est-à-dire à $-14 + 45$, ou 31.
Puisque le point T est situé à un tiers du chemin de P à Q, alors T est à $-14+\frac{1}{3}(60)$, c'est-à-dire à $-14 + 20$, ou 6.
La distance, sur la droite numérique, du point T au point S, est égale à $31 - 6$, ou 25.

Solution 2
Puisque Q est à 46 et que P est à -14, alors la distance de P à Q, sur la droite numérique, est égale à $46 - (-14)$, ou 60.
Puisque le point S est situé aux trois quarts du chemin de P à Q et que le point T est situé à un tiers du chemin de P à Q, alors la distance de T à S est égale à $60\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3}\right)$, c'est-à-dire à $60\left(\frac{9}{12} - \frac{4}{12}\right)$, soit $60\left(\frac{5}{12}\right)$, ou 25.

RÉPONSE : (D)

11. Le nombre total d'élèves de l'école secondaire de Mathville qui ont participé au concours Pascal est égal à $30 + 20$, ou 50.
Puisque 30 % (ou $\frac{3}{10}$) des garçons et 40 % (ou $\frac{4}{10}$) des filles ont reçu un certificat, le nombre d'élèves qui ont reçu un certificat est égal à $\frac{3}{10}(30) + \frac{4}{10}(20)$, soit $9 + 8$, ou 17.
Donc, 17 des 50 participantes et participants ont reçu un certificat. Puisque $\frac{17}{50} = \frac{34}{100}$, ceci correspond à 34 % des participants.

RÉPONSE : (A)

12. Puisque le rectangle a un périmétre de 56, alors :

$$\begin{aligned} 2(x+4) + 2(x-2) &= 56 \\ 2x + 8 + 2x - 4 &= 56 \\ 4x + 4 &= 56 \\ 4x &= 52 \\ x &= 13 \end{aligned}$$

On a donc $x + 4 = 17$ et $x - 2 = 11$. Le rectangle mesure donc 17 sur 11 et son aire est égale à 17×11, ou 187.

Réponse : (B)

13. D'après les lois d'exposants, on a : $2^3 \times 2^2 \times 3^3 \times 3^2 = 2^{3+2} \times 3^{3+2} = 2^5 \times 3^5 = (2 \times 3)^5 = 6^5$

Réponse : (A)

14. *Solution 1*
L'énoncé du problème laisse entendre que la valeur de $a + b + c + d + e + f$ est la même, peu importe les nombres abc et def choisis qui vérifient les conditions données.
Voici un exemple qui vérifie les conditions données : $889 + 111 = 1000$
On a alors $a+b+c+d+e+f = 8+8+9+1+1+1 = 28$, ce qui doit être la valeur constante.

Solution 2
On considère l'addition, colonne par colonne, en commençant par la colonne des unités.
Puisque $c + f$ se termine par un 0, alors $c + f = 0$ ou $c + f = 10$. (L'expression $c + f$ ne peut avoir une valeur supérieure ou égale à 20, puisque c et f prennent des valeurs de 1 à 9.)
Puisqu'aucun chiffre n'est égal à 0, on ne peut avoir $c+f = 0+0$. Donc $c+f = 10$. (Il y a donc une retenue de 1 dans la 2e colonne.)
Puisque le chiffre des dizaines de la somme est égal à 0 et qu'il y a une retenue de 1, alors $b + e$ se termine par un 9. On a donc $b+e = 9$. (Puisque b et e sont des chiffres, $b+e$ ne peut prendre une valeur de 19 ou plus.)
Dans la colonne des dizaines, on a $b + e = 9$ plus la retenue de 1, ce qui donne le chiffre 0 dans la somme, ainsi qu'une retenue de 1 dans la colonne des centaines.
On utilise un argument semblable pour conclure que $a + d = 9$.
Donc, $a + b + c + d + e + f = (a + d) + (b + e) + (c + f) = 9 + 9 + 10 = 28$.

Réponse : (D)

15. Chacun des triangles PSQ et RSQ est rectangle en S. On peut donc utiliser le théorème de Pythagore dans chaque triangle.
Dans le triangle RSQ, on a $QS^2 = QR^2 - SR^2$, d'où $QS^2 = 25^2 - 20^2$, ou $QS^2 = 225$.
Donc $QS = 15$, puisque $QS > 0$.
Dans le triangle PSQ, on a $PQ^2 = PS^2 + QS^2$, d'où $PQ^2 = 8^2 + 15^2$, ou $PQ^2 = 289$.
Donc $PQ = 17$, puisque $PQ > 0$.
Le périmètre du triangle PQR est égal à $PQ + QR + RP$, soit $17 + 25 + (20 + 8)$, ou 70.

Réponse : (E)

16. Supposons que le rayon du cercle est égal à r cm. On a donc $M = \pi r^2$ et $N = 2\pi r$.
Donc $\dfrac{\pi r^2}{2\pi r} = 20$, d'où $\dfrac{r}{2} = 20$, ou $r = 40$.

Réponse : (C)

17. *Solution 1*
Le grand cube a une aire totale de 5400 cm^2 et sa surface est composée de six carrés identiques.
L'aire de chaque face, en centimètres carrés, est donc égale à $5400 \div 6$, ou 900.
Puisque chaque face est un carré, la longueur des côtés des carrés est égale à $\sqrt{900}$ cm, ou 30 cm.
Chaque arête du grand cube a donc une longueur de 30 cm.
Le grand cube a donc un volume de 30^3 cm^3, soit 27 000 cm^3. Puisqu'il a été coupé en petits cubes qui ont un volume de 216 cm^3, le nombre de petits cubes est égal à $27\,000 \div 216$, ou 125.

Solution 2

Le grand cube a une aire totale de 5400 cm^2 et sa surface est composée de six carrés identiques. L'aire de chaque face, en centimètres carrés, est donc égale à $5400 \div 6$, ou 900.
Puisque chaque face est un carré, la longueur des côtés des carrés est égale à $\sqrt{900}$ cm, ou 30 cm.
Chaque arête du cube a donc une longueur de 30 cm.
Puisque chaque petit cube a un volume de 216 cm^3, chacun a des arêtes de longueur $\sqrt[3]{216}$ cm, ou 6 cm.
Puisque le grand cube a des arêtes de 30 cm et que les petits cubes ont des arêtes de 6 cm, alors on peut placer 5 petits cubes le long de chaque arête du grand cube ($30 \div 6 = 5$).
Le grand cube est donc formé de 5^3 petits cubes, soit 125 petits cubes.

Réponse : (B)

18. *Solution 1*

Alex a 265 cents en tout.
Puisque 265 n'est pas divisible par 10, Alex ne peut avoir que des pièces de 10 ¢. Il doit avoir au moins une pièce de 25 ¢.
S'il a 1 pièce de 25 ¢, alors la valeur de ses pièces de 10 ¢, en cents, est égale à $265 - 25$, ou 240. Il a donc 24 pièces de 10 ¢.
Il ne peut avoir 2 pièces de 25 ¢, car $265 - 2(25) = 215$, ce qui n'est pas divisible par 10.
S'il a 3 pièces de 25 ¢, alors la valeur de ses pièces de 10 ¢, en cents, est égale à $265 - 3(25)$, ou 190. Il a donc 19 pièces de 10 ¢.
On voit qu'Alex ne peut avoir un nombre pair de pièces de 25 ¢, car la valeur de ces pièces, en cents, se terminerait par un 0, ce qui ferait que la valeur des pièces de 10 ¢, en cents, se terminerait par un 5, ce qui est impossible.
S'il a 5 pièces de 25 ¢, alors la valeur de ses pièces de 10 ¢, en cents, est égale à $265 - 5(25)$, ou 140. Il a donc 14 pièces de 10 ¢.
S'il a 7 pièces de 25 ¢, alors la valeur de ses pièces de 10 ¢, en cents, est égale à $265 - 7(25)$, ou 90. Il a donc 9 pièces de 10 ¢.
S'il a 9 pièces de 25 ¢, alors la valeur de ses pièces de 10 ¢, en cents, est égale à $265 - 9(25)$, ou 40. Il a donc 4 pièces de 10 ¢.
Si Alex a plus de 9 pièces de 25 ¢, il a moins de 4 pièces de 10 ¢. Or, on sait qu'il a plus de pièces de 10 ¢ que de pièces de 25 ¢. Il n'est donc pas nécessaire d'examiner d'autres possibilités.
Les possibilités pour le nombre total de pièces sont donc $1 + 24 = 25$, $3 + 19 = 22$, $5 + 14 = 19$ et $7 + 9 = 16$.
Le plus petit nombre de pièces de monnaie qu'Alex pourrait avoir est donc 16.
(Remarquer que chaque fois qu'on augmentait le nombre de pièces de 25 ¢, ci-haut, on échangeait 2 pièces de 25 ¢, qui valent 50 cents, pour 5 pièces de 10 ¢, qui valent aussi 50 cents.)

Solution 2

Supposons qu'Alex a d pièces de 10 ¢ et v pièces de 25 ¢, d et v étant des entiers non négatifs.
Puisque Alex a 2,65 \$, alors $10d + 25v = 265$, ou $2d + 5v = 53$.
Puisque le membre de droite est impair, le membre de gauche doit l'être aussi. Donc, $5v$ doit être impair, ce qui implique que v doit être impair.
Si $v \geq 11$, alors $5v \geq 55$, ce qui est trop grand.
Donc $v < 11$, ce qui implique que $v = 1, 3, 5, 7$ ou 9 et $d = 24, 19, 14, 9$ ou 4.
La solution pour laquelle $d > v$ et $d + v$ est un minimum est $v = 7$ et $d = 9$, ce qui donne 16 pièces de monnaie en tout.

Réponse : (B)

19. D'après la définition d'un nombre montant, les deux premiers chiffres d'un nombre montant déterminent automatiquement le troisième chiffre.
On considère d'abort les nombres montants qui commencent par 1.
On obtient 101, 112, 123, 134, 145, 156, 167, 178 et 189, puisque $1+0=1$, $1+1=2$ et ainsi de suite. (Le deuxième chiffre ne peut être un 9, car $1+9=10$, ce qui n'est pas un chiffre.) On obtient donc 9 nombres montants.
Les nombres montants qui commencent par 2 sont 202, 213, 224, 235, 246, 257, 268 et 279. Il y en a 8.
On continue de la sorte pour déterminer qu'il y a respectivement 7, 6, 5, 4, 3, 2 et 1 nombres montants qui commencent par 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9. Le nombre d'entiers positifs de trois chiffres qui sont montants est donc égal à $9+8+7+6+5+4+3+2+1$, ou 45.

Réponse : (D)

20. La somme des six nombres est égale à $1867+1993+2019+2025+2109+2121$, ou 12 134.
Les quatre nombres qui ont une moyenne de 2008 doivent avoir une somme de 4×2008, ou 8032. (On ne sait pas de quels nombres il s'agit, mais il n'est pas nécessaire de le savoir.)
La somme des deux autres nombres est donc égale à $12\,134 - 8032$, ou 4102.
La moyenne de ces deux nombres est donc égale à $\frac{4102}{2}$, ou 2051.
(On peut vérifier que 1867, 2019, 2025 et 2121 ont bien une moyenne de 2008 et que 1993 et 2109 ont une moyenne de 2051.)

Réponse : (D)

21. L'expression $\dfrac{p}{q}$ prend la plus grande valeur possible lorsque p prend la plus grande valeur possible, soit 10, et q prend la plus petite valeur possible, soit 12. La plus grande valeur possible de $\dfrac{p}{q}$ est donc égale à $\dfrac{10}{12}$, ou $\dfrac{5}{6}$.
Elle prend la plus petite valeur possible lorsque p prend la plus petite valeur possible, soit 3, et q prend la plus grande valeur possible, soit 21. La plus petite valeur possible de $\dfrac{p}{q}$ est donc égale à $\dfrac{3}{21}$, ou $\dfrac{1}{7}$.
La différence entre ces deux valeurs est égale à $\dfrac{5}{6} - \dfrac{1}{7}$, soit $\dfrac{35}{42} - \dfrac{6}{42}$, ou $\dfrac{29}{42}$.

Réponse : (A)

22. Soit d km la distance de la maison de Gaël à l'école.
Puisqu'il y a 60 minutes dans une heure, alors $3\frac{3}{4}$ minutes (ou $\frac{15}{4}$ minutes) correspondent à $\frac{15}{4} \times \frac{1}{60}$ heure, ou $\frac{1}{16}$ heure.
Puisque Gaël marche à une vitesse de 4 km/h, alors elle met $\dfrac{d}{4}$ heure pour marcher à l'école.
Puisque Gaël court à une vitesse de 6 km/h, alors elle met $\dfrac{d}{6}$ heure pour courir à l'école.
Puisqu'elle épargne $\frac{1}{16}$ heure en courant, alors la différence entre ces deux temps est égale à

$\frac{1}{16}$ heure. Donc :

$$\begin{aligned} \frac{d}{4} - \frac{d}{6} &= \frac{1}{16} \\ \frac{3d}{12} - \frac{2d}{12} &= \frac{1}{16} \\ \frac{d}{12} &= \frac{1}{16} \\ d &= \frac{12}{16} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

La distance de sa maison à l'école est égale à $\frac{3}{4}$ km.

Réponse : (E)

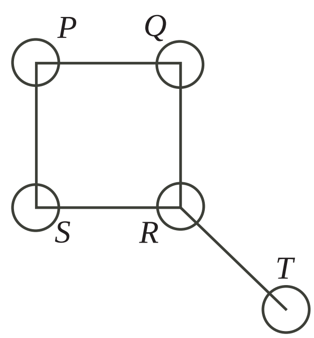
23. Soit d m la distance de la droite M à la droite L.
La partie du morceau W à gauche de la coupure a donc une longueur de d m.
Puisque le morceau X est à 3 m de la droite M, alors la partie du morceau X à la gauche de la coupure a une longueur de $(d-3)$ m, car 3 des d mètres à la gauche de la coupure sont vides.
De même, les parties des morceaux Y et Z à la gauche de la coupure ont une longueur respective de $(d-2)$ m et $(d-1{,}5)$ m.
Donc, la longueur totale, en mètres, des parties à la gauche de la coupure est égale à :

$$\begin{aligned} & d + (d-3) + (d-2) + (d-1{,}5) \\ = {} & 4d - 6{,}5 \end{aligned}$$

Puisque la longueur totale des morceaux de part et d'autre de la coupure est la même, cette longueur est égale à $\frac{1}{2}(5+3+5+4)$ m, ou 8,5 m.
(On aurait pu déterminer la longueur des parties à la droite des coupures, soit $5-d$, $6-d$, $7-d$ et $5{,}5-d$, et former une équation entre la somme des longueurs de part et d'autre de la coupure.)
Donc $4d - 6{,}5 = 8{,}5$, d'où $4d = 15$, ou $d = 3{,}75$. La partie du morceau W à la gauche de la coupure a une longueur de 3,75 m.

Réponse : (D)

24. Les cercles sont nommés P, Q, R, S et T, comme dans la figure suivante.

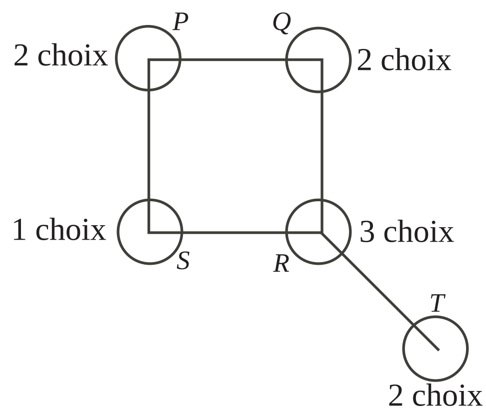


On remarque qu'il y a 3 couleurs possibles et que deux cercles adjacents ne peuvent avoir la même couleur.
On considère le cercle R. Il y a 3 choix de couleur pour ce cercle.
Pour chacun de ces choix, il y a 2 choix de couleur pour T (l'une ou l'autre couleur non utilisée pour R), puisque l'on doit utiliser une couleur différente de celle de R.
Les cercles Q et S peuvent être de la même couleur ou de couleurs différentes.

1er cas : Q et S sont de la même couleur

Pour chacun des choix précédents, il y a 2 choix de couleur pour Q (l'une ou l'autre couleur non utilisée pour R) ; pour chacun de ces choix, il y a 1 choix pour la couleur de S (la même couleur que Q).

Pour chacun des choix précédents, il y a 2 choix pour la couleur de P (l'une ou l'autre des couleurs non utilisée pour Q et S).

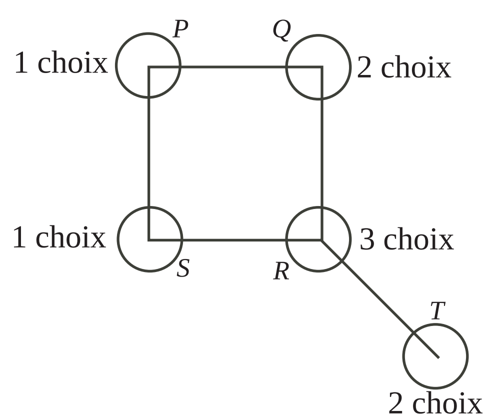


Dans ce cas, le nombre de façons de colorier les cercles est égal à $3 \times 2 \times 2 \times 1 \times 2$, ou 24.

2 ^{e} cas : Q et S sont de couleurs différentes

Dans ce cas, il y a 2 choix de couleur pour Q (l'une ou l'autre couleur non utilisée pour R) ; pour chacun de ces choix, il y a 1 choix de couleur pour S (elle doit être différente de celles de R et de Q).

Pour chacun des choix de couleur pour R, Q et S, il y a 1 choix de couleur possible pour P (il ne peut avoir la même couleur que Q ou S, qui sont de couleurs différentes, et il n'y a que 3 couleurs en tout).



Dans ce cas, le nombre de façons de colorier les cercles est égal à $3 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1$, ou 12.

En tout, le nombre de façons de colorier les cercles est égal à $24 + 12$, ou 36.

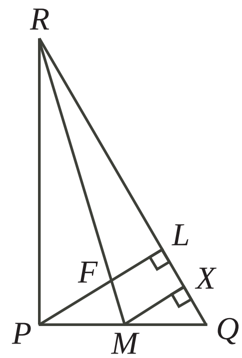
Réponse : (D)

25. Puisque $PQ = 2$ et que M est le milieu du côté PQ, alors $PM = MQ = \frac{1}{2}(2) = 1$.
Puisque le triangle PQR est rectangle en P, alors selon le théorème de Pythagore :

$$RQ = \sqrt{PQ^2 + PR^2} = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4$$

(On peut ajouter que le triangle PQR est un triangle remarquable 30°-60°-90°, mais on n'utilisera pas cette propriété.)

Puisque PL est une hauteur, alors $\angle PLR = 90^\circ$. Donc, les triangles RLP et RPQ sont semblables (ils sont rectangles et ils ont un angle commun, soit l'angle R).
Donc $\dfrac{PL}{QP} = \dfrac{RP}{RQ}$, c'est-à-dire que $PL = \dfrac{(QP)(RP)}{RQ}$, d'où $PL = \dfrac{2(2\sqrt{3})}{4}$, ou $PL = \sqrt{3}$.
De même, $\dfrac{RL}{RP} = \dfrac{RP}{RQ}$, c'est-à-dire que $RL = \dfrac{(RP)(RP)}{RQ}$, d'où $RL = \dfrac{(2\sqrt{3})(2\sqrt{3})}{4}$, ou $RL = 3$.
Donc $LQ = RQ - RL$, d'où $LQ = 4 - 3$, ou $LQ = 1$. Or $PF = PL - FL$, ou $PF = \sqrt{3} - FL$.
Il faut donc déterminer la longueur de FL.
Au point M, on abaisse une perpendiculaire MX à RQ.



Les triangles MXQ et PLQ sont semblables, puisqu'ils sont rectangles et qu'ils ont un angle commun, soit l'angle Q. Puisque $MQ = \frac{1}{2}PQ$, alors les côtés du triangle MXQ ont la moitié de la longueur des côtés correspondants du triangle PLQ.
Donc $QX = \frac{1}{2}QL$, d'où $QX = \frac{1}{2}(1)$, ou $QX = \frac{1}{2}$. De plus, $MX = \frac{1}{2}PL$, d'où $MX = \frac{1}{2}(\sqrt{3})$, ou $MX = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
Puisque $QX = \frac{1}{2}$, alors $RX = RQ - QX$, d'où $RX = 4 - \frac{1}{2}$, ou $RX = \frac{7}{2}$.
Les triangles RLF et RXM sont semblables (ils sont rectangles et ont un angle commun, soit l'angle R).
Donc $\dfrac{FL}{MX} = \dfrac{RL}{RX}$, c'est-à-dire que $FL = \dfrac{(MX)(RL)}{RX}$, d'où $FL = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}(3)}{\frac{7}{2}}$, ou $FL = \frac{3\sqrt{3}}{7}$.
Donc $PF = \sqrt{3} - \frac{3\sqrt{3}}{7}$, ou $PF = \frac{4\sqrt{3}}{7}$.

Réponse : (C)