Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Hypatie 2008

le mercredi 16 avril 2008

Solutions

1. (a) Par définition, $3\nabla 2 = 2(3) + 2^2 + 3(2) = 6 + 4 + 6 = 16$.

   (b) On a :

$$\begin{aligned} x\nabla(-1) &= 8 \\ 2x + (-1)^2 + x(-1) &= 8 \\ x + 1 &= 8 \\ x &= 7 \end{aligned}$$

   Donc $x = 7$.

   (c) On a :

$$\begin{aligned} 4\nabla y &= 20 \\ 2(4) + y^2 + 4y &= 20 \\ y^2 + 4y + 8 &= 20 \\ y^2 + 4y - 12 &= 0 \\ (y+6)(y-2) &= 0 \end{aligned}$$

   Donc $y = -6$ ou $y = 2$.

   (d) On a :

$$\begin{aligned} (w-2)\nabla w &= 14 \\ 2(w-2) + w^2 + (w-2)w &= 14 \\ 2w - 4 + w^2 + w^2 - 2w &= 14 \\ 2w^2 - 4 &= 14 \\ 2w^2 &= 18 \\ w^2 &= 9 \end{aligned}$$

   Donc $w = 3$ ou $w = -3$.

2. (a) La droite qui passe aux points $A(7,8)$ et $B(9,0)$ a pour pente : $\dfrac{8-0}{7-9} = \dfrac{8}{-2} = -4$
   Cette droite a donc une équation de la forme $y = -4x + b$, b étant un nombre quelconque.
   Puisque la droite passe au point $B(9,0)$, les coordonnées de B vérifient l'équation de la droite.
   Donc $0 = -4(9) + b$, d'où $b = 36$.
   Donc, la droite a pour équation $y = -4x + 36$.

   (b) On cherche le point d'intersection des droites d'équations $y = -4x + 36$ et $y = 2x - 10$.
   À ce point, les équations présentent la même valeur de y pour une même valeur de x.
   En posant $y = y$, on obtient $-4x + 36 = 2x - 10$, d'où $46 = 6x$, ou $x = \frac{23}{3}$.
   On reporte $x = \frac{23}{3}$ dans l'équation $y = 2x - 10$ et on obtient $y = 2(\frac{23}{3}) - 10$, soit $y = \frac{46}{3} - \frac{30}{3}$, ou $y = \frac{16}{3}$.
   Le point P a pour coordonnées $(\frac{23}{3}, \frac{16}{3})$.

   (c) *Solution 1*
   Le point A a une abscisse de 7 et le point B a une abscisse de 9.
   Ces abscisses ont une moyenne de $\frac{1}{2}(7+9)$, ou 8.

Le point P a une abscisse de $\frac{23}{3}$ et $\frac{23}{3} < 8$. Donc, l'abscisse de P est plus près de l'abscisse de A que de celle de B.
Puisque les points P, A et B sont alignés, alors P est plus près de A que de B.

Solution 2
Le point A a une ordonnée de 8 et le point B a une ordonnée de 0.
Ces ordonnées ont une moyenne de $\frac{1}{2}(8+0)$, ou 4.
Le point P a une ordonnée de $\frac{16}{3}$ et $\frac{16}{3} > 4$. Donc, l'ordonnée de P est plus près de celle de A que de celle de B.
Puisque les points P, A et B sont alignés, alors P est plus près de A que de B.

Solution 3
Les coordonnées respectives de A, B et P sont $(7,8)$, $(9,0)$ et $(\frac{23}{3}, \frac{16}{3})$. Donc :

$$PA = \sqrt{(7-\tfrac{23}{3})^2 + (8-\tfrac{16}{3})^2} = \sqrt{(-\tfrac{2}{3})^2 + (\tfrac{8}{3})^2} = \sqrt{\tfrac{68}{9}}$$

et

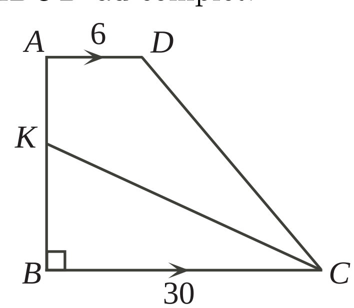
$$PB = \sqrt{(9-\tfrac{23}{3})^2 + (0-\tfrac{16}{3})^2} = \sqrt{(\tfrac{4}{3})^2 + (-\tfrac{16}{3})^2} = \sqrt{\tfrac{272}{9}}$$

Donc $PB > PA$ et P est plus près de A que de B.

3. (a) *Solution 1*
Le trapèze $ABCD$ a pour bases AD et BC et AB est une hauteur, puisqu'il est perpendiculaire à BC. De plus, $AD = 6$, $BC = 30$ et $AB = 20$.
Donc, l'aire de $ABCD$ est égale à $\frac{1}{2}(6+30)(20)$, ou 360.

Solution 2
On joint B et D.
Puisque AB est perpendiculaire à BC et que AD est parallèle à BC, alors AB est perpendiculaire à AD.
Le triangle DAB est donc rectangle en A. Son aire est égale à $\frac{1}{2}(6)(20)$, ou 60.
On considère la base BC du triangle BDC et la hauteur correspondante AB. Or $BC = 30$ et $AB = 20$. Donc, l'aire du triangle est égale à $\frac{1}{2}(30)(20)$, ou 300.
L'aire du trapèze $ABCD$ est égale à la somme de l'aire du triangle DAB et de celle du triangle BDC, soit $60 + 300$, ou 360.

(b) On remarque que puisque K est situé sur AB, alors le triangle KBC et le quadrilatère $KADC$ recouvrent le trapèze $ABCD$ au complet.

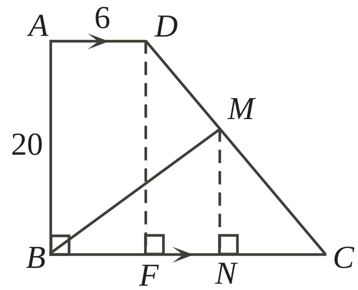


Puisque l'aire du triangle KBC est égale à celle du quadrilatère $KADC$, chacune est égale à la moitié de l'aire du trapèze $ABCD$, soit $\frac{1}{2}(360)$, ou 180.
Soit $BK = h$.

On considère la base BC du triangle KBC et la hauteur correspondante BK. Or $BC = 30$ et $BK = h$. Donc $\frac{1}{2}(30)h = 180$, d'où $h = 12$. Donc $BK = 12$.

(c) *Solution 1*

Comme dans la partie (b), l'aire du triangle MBC doit être égale à 180.



Au point M, on abaisse une perpendiculaire MN à BC.
Comme dans la partie (b), puisque la base BC du triangle MBC a une longueur de 30, alors la hauteur MN du triangle MBC doit avoir une longueur de 12 pour que le triangle ait une aire de 180.
Au point D, on abaisse une perpendiculaire DF à BC.
Puisque DF est perpendiculaire à BC, alors $ADFB$ est un rectangle. Donc $BF = 6$ et on a donc $FC = BC - BF$, c'est-à-dire $FC = 30 - 6$, ou $FC = 24$.
De plus, $DF = AB = 20$.
D'après le théorème de Pythagore, $DC = \sqrt{20^2 + 24^2} = \sqrt{400 + 576} = \sqrt{976} = 4\sqrt{61}$.
Il reste à déterminer la longueur MC.

<u>1re approche</u>

On sait que $\sin(\angle DCF) = \dfrac{DF}{DC} = \dfrac{20}{4\sqrt{61}} = \dfrac{5}{\sqrt{61}}$.

Puisque $MN = 12$, alors $MC = \dfrac{MN}{\sin(\angle DCF)} = \dfrac{12}{5/\sqrt{61}} = \dfrac{12}{5}\sqrt{61}$.

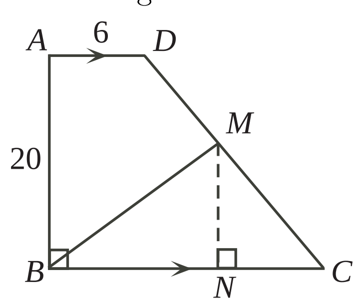
<u>2e approche</u>

Les triangles DFC et MNC sont semblables, puisqu'ils sont rectangles et qu'ils ont un angle commun C.

Donc $\dfrac{MC}{MN} = \dfrac{DC}{DF}$, d'où $MC = \dfrac{12}{20}(4\sqrt{61})$, ou $MC = \dfrac{12}{5}\sqrt{61}$.

Solution 2

Comme dans la partie (b), l'aire du triangle MBC doit être égale à 180.



Au point M, on abaisse une perpendiculaire MN à BC.
Comme dans la partie (b), puisque la base BC du triangle MBC a une longueur de 30, alors la hauteur MN du triangle MBC doit avoir une longueur de 12 pour que le triangle ait une aire de 180.

On place la figure dans un repère cartésien, de manière que B soit situé à l'origine, A soit situé sur la partie positive de l'axe des ordonnées et C soit situé sur la partie positive de l'axe des abscisses.
Les coordonnées respectives de B, A, D et C sont donc $(0,0)$, $(0,20)$ $(6,20)$ et $(30,0)$.
Puisque $MN = 12$, les coordonnées de M sont $(s,12)$, s étant une nombre réel quelconque.
Puisque M est situé sur DC, la pente de MC est égale à celle de DC, c'est-à-dire que $\dfrac{0-20}{30-6} = \dfrac{0-12}{30-s}$. Donc $-20(30-s) = 24(-12)$, d'où $20s - 600 = -288$, ou $20s = 312$, ou $s = \frac{78}{5}$.
On utilise les coordonnées de M et de C pour obtenir :

$$MC = \sqrt{\left(30 - \tfrac{78}{5}\right)^2 + (0-12)^2} = \sqrt{\left(\tfrac{72}{5}\right)^2 + 12^2} = \tfrac{12}{5}\sqrt{6^2+5^2} = \tfrac{12}{5}\sqrt{61}$$

4. (a) Puisque la somme-peizi de la suite 2, 3, x, $2x$ est égale à 7, alors :

$$\begin{aligned} 2(3) + 2x + 2(2x) + 3x + 3(2x) + x(2x) &= -7 \\ 6 + 15x + 2x^2 &= -7 \\ 2x^2 + 15x + 13 &= 0 \\ (2x+13)(x+1) &= 0 \end{aligned}$$

Donc $x = -1$ ou $x = -\frac{13}{2}$.

(b) Puisque chaque terme est égal à 1, -1 ou 2, alors les paires de termes distincts qui ont un produit de 1 doivent être « 1 et 1 » ou « -1 et -1 » .
On sait que m termes égalent 1. Combien de produits de deux termes peuvent-ils former ?
Pour former un produit, il y a m choix pour le premier facteur et $m-1$ choix pour le deuxième (c'est-à-dire n'importe quel terme sauf le premier facteur). Il y a donc $m(m-1)$ produits.
Or, chaque choix de deux facteurs a été compté deux fois (on a compté ab et ba). On doit donc diviser le nombre de produits par 2. Les m termes qui égalent 1 forment donc $\frac{1}{2}m(m-1)$ produits.
(On aurait pu dire que le nombre de produits est égal à $\dbinom{m}{2} = \dfrac{m(m-1)}{2}$.)
On sait aussi que n termes égalent -1.
De la même manière, ces termes formeront $\frac{1}{2}n(n-1)$ produits.
Le nombre de paires de termes distincts qui ont un produit de 1 est donc égal à $\frac{1}{2}m(m-1) + \frac{1}{2}n(n-1)$.

(c) Si la suite contient m termes qui égalent 2, elle contient $n = 100 - m$ termes qui égalent -1.
Les termes qui égalent 2 forment $\frac{1}{2}m(m-1)$ fois le produit 4 (soit $2 \times 2 = 4$) dans la somme-peizi.
Les termes qui égalent -1 forment $\frac{1}{2}n(n-1)$ fois, ou $\frac{1}{2}(100-m)(99-m)$ fois le produit 1 (soit $(-1)\times(-1) = 1$) dans la somme-peizi.
Les m termes qui égalent 2 et les $100-m$ termes qui égalent -1 forment $m(100-m)$ fois le produit -2 (soit $2 \times (-1) = -2$) dans la somme-peizi. En effet, il y a m choix d'un terme qui égale 2 et $100-m$ choix d'un terme qui égale -1.
Puisqu'il s'agit de tous les produits possibles, la somme-peizi S est égale à :

$$S = 4\left(\tfrac{1}{2}m(m-1)\right) + 1\left(\tfrac{1}{2}(100-m)(99-m)\right) + (-2)\left(m(100-m)\right)$$

ou

$$S = 2m^2 - 2m + 50(99) - \tfrac{199}{2}m + \tfrac{1}{2}m^2 - 200m + 2m^2$$

ou

$$S = \tfrac{9}{2}m^2 - \tfrac{603}{2}m + 4950$$

L'équation $S = \frac{9}{2}m^2 - \frac{603}{2}m + 4950$ définit une fonction du second degré (dont la représentation graphique est une parabole ouverte vers le haut). La fonction admet une valeur minimale au sommet de la parabole. En ce point, on a :

$$m = -\frac{-\frac{603}{2}}{2\left(\frac{9}{2}\right)} = \tfrac{67}{2} = 33\tfrac{1}{2}$$

Puisque cette valeur de m n'est pas un entier, il ne s'agit pas de la valeur de m qui résout le problème.

La parabole est symétrique par rapport à son axe vertical qui passe au sommet. Les valeurs de la fonction augmentent de part et d'autre du sommet. La valeur minimale de la fonction pour une valeur entière de m est donc produite à $m = 33$ et $m = 34$ (il s'agit des entiers les plus près de $33\frac{1}{2}$ et ils sont à la même distance de $33\frac{1}{2}$).

On peut reporter $m = 33$ ou $m = 34$ dans l'expression de la somme-peizi pour obtenir la valeur minimale de $\frac{9}{2}(33)^2 - \frac{603}{2}(33) + 4950$, ou -99.