Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Les solutions de 8ième année suit les solutions de 7ième année

Concours Gauss 2008

(7^e et 8^e années – Secondaire I et II)

le mercredi 14 mai 2008

Solutions

Personnel du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique

Ed Anderson
Lloyd Auckland
Steve Brown
Jennifer Couture
Fiona Dunbar
Jeff Dunnett
Barry Ferguson
Judy Fox
Sandy Graham
Judith Koeller
Joanne Kursikowski
Angie Lapointe
Dean Murray
J.P. Pretti
Linda Schmidt
Kim Schnarr
Jim Schurter
Carolyn Sedore
Ian VanderBurgh
Troy Vasiga

Comité du concours Gauss

Mark Bredin (président), St. John's Ravenscourt School, Winnipeg, MB
Kevin Grady (président adjoint), Cobden District P.S., Cobden, ON
Ed Barbeau, Toronto, ON
John Grant McLoughlin, University of New Brunswick, Fredericton, NB
JoAnne Halpern, Thornhill, ON
David Matthews, University of Waterloo, Waterloo, ON
Allison McGee, All Saints C.H.S., Kanata, ON
Kim Stenhouse, William G. Davis P.S., Cambridge, ON
David Switzer, Sixteenth Ave. P.S., Richmond Hill, ON
Tanya Thompson, Collingwood C.I., Collingwood, ON
Chris Wu, Elia M.S., Toronto, ON

Les solutions de 8ième année suit les solutions de 7ième année

7e année

1. On a : $6 \times 2 - 3 = 12 - 3 = 9$

Réponse : (A)

2. On a : $1 + 0{,}01 + 0{,}0001 = 1{,}01 + 0{,}0001 = 1{,}0100 + 0{,}0001 = 1{,}0101$

Réponse : (E)

3. On utilise 8 comme dénominateur commun : $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} + \frac{2}{8} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

Réponse : (D)

4. Puisque le polygone a un périmètre de 108 cm et que chacun de ses côtés mesure 12 cm, alors le nombre de côtés est égal à $108 \div 12$, ou 9.

Réponse : (D)

5. Dans l'ensemble, il y a le nombre 3, deux nombres supérieurs à 3 et deux nombres inférieurs à 3.
Le plus petit nombre doit être un de ces deux derniers nombres, soit 2,3 ou 2,23.
Le plus petit de ces deux nombres est 2,23. Il s'agit donc du plus petit nombre de l'ensemble.

Réponse : (D)

6. Puisque PQ est une droite, alors $x^\circ + x^\circ + x^\circ + x^\circ + x^\circ = 180^\circ$, d'où $5x = 180$, ou $x = 36$.

Réponse : (A)

7. 20 n'est pas un nombre premier, puisqu'il est divisible par 2.
21 n'est pas un nombre premier, puisqu'il est divisible par 3.
25 n'est pas un nombre premier, puisqu'il est divisible par 5.
27 n'est pas un nombre premier, puisqu'il est divisible par 3.
23 est un nombre premier, puisque ses seuls diviseurs positifs sont 1 et 23.

Réponse : (C)

8. Lundi, Katia a marché 8 km.
Mardi, elle a marché la moitié de 8 km, soit 4 km.
Mercredi, elle a marché la moitié de 4 km, soit 2 km.
Jeudi, elle a marché la moitié de 2 km, soit 1 km.
Vendredi, elle a marché la moitié de 1 km, soit 0,5 km.

Réponse : (E)

9. Puisque 50 % des gens interrogés préfèrent la crème glacée au chocolat et que 10 % préfèrent la crème glacée aux fraises, alors 50 % + 10 %, soit 60 % des gens interrogés préfèrent la crème glacée au chocolat ou aux fraises. Or $60\,\% = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}$.
Donc $\frac{3}{5}$ des gens interrogés préfèrent la crème glacée au chocolat ou aux fraises.

Réponse : (A)

10. Puisque Max a vendu 41 verres de limonade samedi et 53 verres dimanche, il a vendu $41 + 53$ verres, soit 94 verres en tout.
Puisqu'il a obtenu 25 ¢ par verre, il a obtenu $94 \times 0{,}25$ \$, soit 23,50 \$ en tout.

Réponse : (A)

11. Christian a acheté un casque protecteur au prix de 25 \$ et il a dépensé 68 \$ en tout. Il a donc dépensé 68 \$ − 25 \$, soit 43 \$ pour les deux bâtons de hockey.
    Puisque les deux bâtons coûtent le même prix, un bâton coûte 43 \$ ÷ 2, soit 21,50 \$.

    Réponse : (C)

12. Le nombre situé dans la 2ᵉ ligne, entre 17 et 6, est égal à 17 − 6, ou 11.
    Le nombre situé dans la 3ᵉ ligne, entre 8 et 11, est égal à 11 − 8, ou 3.
    Le nombre situé dans la 3ᵉ ligne, entre 11 et 2, est égal à 11 − 2, ou 9.
    Le nombre situé dans la 4ᵉ ligne, entre 7 et 3, est égal à 7 − 3, ou 4.
    Le nombre situé dans la 4ᵉ ligne, entre 3 et 9, est égal à 9 − 3, ou 6.

$$\begin{array}{ccccccccc} 8 & & 9 & & 17 & & 6 & & 4 \\ & 1 & & 8 & & 11 & & 2 & \\ & & 7 & & 3 & & 9 & & \\ & & & 4 & & 6 & & & \\ & & & & x & & & & \end{array}$$

    Donc $x = 6 - 4$, ou $x = 2$.

    Réponse : (B)

13. Puisque $PQ = PR$, alors $\angle PQR = \angle PRQ$.
    Puisque les mesures d'angles d'un triangle ont une somme de 180°, alors

$$40^\circ + \angle PQR + \angle PRQ = 180^\circ$$

    d'où $\angle PQR + \angle PRQ = 140^\circ$. Puisque $\angle PQR = \angle PRQ$, alors $\angle PQR = \angle PRQ = 70^\circ$.
    Puisque l'angle qui a pour mesure x° est opposé à l'angle PRQ, alors $x^\circ = \angle PRQ = 70^\circ$.
    Donc $x = 70$.

    Réponse : (B)

14. La somme de l'âge de Walid et de l'âge de Bahia est de 22 ans.
    À chaque année, chaque âge augmente de 1 an et la somme augmente donc de 2 ans.
    La somme doit passer de 22 ans à 2 × 22 ans, soit 44 ans. Elle doit donc augmenter de 22 ans, ce qui prendra (22 ÷ 2) ans, soit 11 ans.

    Réponse : (E)

15. Par la première transformation, la lettre subit une rotation de 180°, ce qui donne G → ⅁.
    Par la deuxième transformation, l'image subit une réflexion par rapport à un axe vertical, ce qui donne G → ⅁ → ᘓ.

    Réponse : (D)

16. Dans la figure, il y a 8 rangées de 8 petits carrés, pour un total de 8 × 8, ou 64 petits carrés.
    Il y a 48 carrés ombrés. (On peut les compter ou soustraire les 16 carrés *non ombrés*.)
    On a donc 48 des 64 carrés qui sont ombrés. On peut exprimer cette fraction en pourcentage : $\frac{48}{64} = \frac{3}{4} = 0{,}75 = 75\,\%$.

    Réponse : (D)

17. *Solution 1*
    Puisque le rectangle a un périmètre de 120, il a un demi-périmètre de 60.
    Puisque la longueur est 6 de plus que le double de la largeur, alors le double de la largeur plus

la largeur ont une somme de $60 - 6$, ou 54.
Donc, trois fois la largeur donnent 54. La largeur mesure donc $54 \div 3$, ou 18.

Solution 2
Soit l la largeur du rectangle.
Donc, la longueur du rectangle est égale à $2l + 6$.
Puisque le rectangle a un périmètre de 120, alors

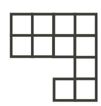
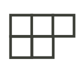
$$\begin{aligned} l + 2l + 6 + l + 2l + 6 &= 120 \\ 6l + 12 &= 120 \\ 6l &= 108 \\ l &= 18 \end{aligned}$$

Donc, le rectangle a une largeur de 18.

Réponse : (B)

18. La somme des notes des quatre premières épreuves est égale à $71 + 77 + 80 + 87$, ou 315.
Puisque la note de la 5^{e} épreuve peut varier de 0 à 100, la somme des notes des cinq épreuves peut varier de $315 + 0$ à $315 + 100$, soit de 315 à 415.
Puisque la moyenne est égale à la somme divisée par le nombre d'épreuves, la moyenne peut varier de $\dfrac{315}{5}$ à $\dfrac{415}{5}$, soit de 63 à 83.
Le seul choix qui paraît dans cet intervalle est 82.

Réponse : (C)

19. Après beaucoup de tâtonnements, on se rend compte que la seule façon de réussir est de faire subir à la deuxième figure une rotation de $90°$ dans le sens des aiguilles d'une montre et de la combiner à la première figure pour obtenir  .
La troisième figure est donc  .

Réponse : (C)

20. Voici toutes les façons d'exprimer 72 comme produit de trois entiers positifs différents : $1 \times 2 \times 36$; $1 \times 3 \times 24$; $1 \times 4 \times 18$; $1 \times 6 \times 12$; $1 \times 8 \times 9$; $2 \times 3 \times 12$; $2 \times 4 \times 9$; $3 \times 4 \times 6$.
(Pour trouver ces possibilités, on prend le plus petit premier facteur et on le combine avec toutes les paires possibles de deuxième et troisième facteurs, puis on recommence avec le plus petit premier facteur suivant, et ainsi de suite.)
Les sommes des trois facteurs, dans l'ordre, sont 39, 28, 23, 19, 18, 17, 15 et 13. La plus petite somme possible est égale à 13.

Réponse : (A)

21. Puisque Andréa a parcouru $\frac{3}{7}$ de la distance totale de 168 km et que $\frac{1}{7}$ de 168 km correspond à 24 km, elle a parcouru 3×24 km, ou 72 km.
Il lui reste 96 km à parcourir, car $168 - 72 = 96$.
Pour parcourir 96 km en trois jours, elle doit parcourir une distance moyenne de $\frac{96}{3}$ km, soit 32 km par jour.

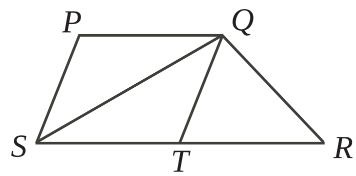
Réponse : (D)

22. *Solution 1*

Puisque PQ est parallèle à SR, alors la base du triangle PQS (qui correspond à la base PQ) est la même que la hauteur du triangle SRQ (qui correspond à la base SR). Cette hauteur correspond à la distance de PQ à SR, mesurée verticalement).
Puisque SR est deux fois plus long que PQ et que les hauteurs sont les mêmes, alors l'aire du triangle SRQ est deux fois l'aire du triangle PQS.
Donc, l'aire du triangle PQS est $\frac{1}{3}$ de l'aire du trapèze, soit $\frac{1}{3} \times 12$, ou 4.

Solution 2

Au point Q, on trace un segment QT, T étant le milieu de SR.



Puisque $SR = 2(PQ)$ et que T est le milieu de SR, alors $PQ = ST = TR$.
On considère les bases PQ, ST et TR des triangles respectifs PQS, STQ et TRQ.
Par rapport à ces bases, les triangles ont la même hauteur, puisque PQ est parallèle à SR.
Puisque $PQ = ST = TR$ et que les triangles ont la même hauteur, ils ont la même aire.
Le trapèze a donc été coupé en trois triangles ayant la même aire.
L'aire du triangle PQS est donc égale à un tiers de l'aire du trapèze, soit $\frac{1}{3} \times 12$, ou 4.

Réponse : (B)

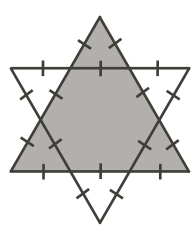
23. Puisque Eduardo n'est pas assis à côté de Diane, les quatre personnes doivent s'asseoir selon une des configurations suivantes :

D __ E __	D __ __ E	__ D __ E
E __ D __	E __ __ D	__ E __ D

Pour chacune de ces six configurations, il y a 2 façons d'asseoir Bianca et Jamal, soit Bianca à gauche et Jamal à droite ou vice versa).
Le nombre de façons d'asseoir les quatre personnes est donc égal à 6×2, soit 12. (Essayer de toutes les écrire !)

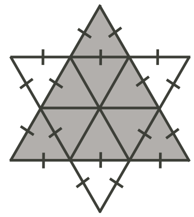
Réponse : (B)

24. Puisque les deux grands triangles sont équilatéraux, alors chacun de leurs angles mesure 60°.
Donc, chacun des six petits triangles qui forment l'étoile a un angle de 60° entre deux côtés congrus.
Puisque chacun de ces petits triangles est isocèle, chacun de ses deux autres angles doit mesurer $\frac{1}{2}(180^\circ - 60^\circ)$, soit 60°.
Donc, chacun des petits triangles est équilatéral.



Donc, l'hexagone intérieur a six côtés congrus et ses angles intérieurs mesurent chacun $180^\circ - 60^\circ$, soit 120°. Donc, cet hexagone est régulier.

On trace les trois diagonales qui passent par le centre de l'hexagone (ce qui est possible à cause de la symétrie de l'hexagone).



À cause de la symétrie de l'hexagone, chacun de ses angles intérieurs est par le fait même coupé en deux angles congrus de $120° \div 2$, ou $60°$.
Chacun des six nouveaux petits triangles a donc deux angles de $60°$. Leur troisième angle doit donc mesurer $60°$ également. Donc, chacun de ces six nouveaux triangles est équilateral.
On a donc 12 petits triangles équilatéraux. Chacun a au moins un côté indiqué par une petite barre. Les 12 petits triangles sont donc identiques.
Puisque l'étoile a une aire de 36, chacun des petits triangles a une aire de $36 \div 12$, soit 3.
La région ombrée est formée de 9 de ces petits triangles. Son aire est donc égale à 9×3, soit 27.

Réponse : (C)

25. On examine d'abord les entiers de 2000 à 2008.
Puisqu'on peut ignorer les zéros dans l'addition des chiffres, la somme des chiffres de ces entiers est égale à :

$$2 + (2 + 1) + (2 + 2) + (2 + 3) + (2 + 4) + (2 + 5) + (2 + 6) + (2 + 7) + (2 + 8) = 54$$

On examine ensuite les entiers de 1 à 1999.
Puisqu'on peut ignorer le chiffre zéro dans l'addition, on peut considérer qu'il s'agit des nombres de 0001 à 1999. On ajoutera même le nombre 0000 à la liste pour avoir 2000 nombres.
De ces 2000 nombres, 200 ont 0 pour chiffre des unités, 200 ont 1 pour chiffre des unités, etc. (Un dixième des nombres a 0 pour chiffre des unités et ainsi de suite.)
Donc, la somme des chiffres des unités de ces nombres est égale à :

$$200(0)+200(1)+\cdots+200(8)+200(9) = 200+400+600+800+1000+1200+1400+1600+1800 = 9000$$

De ces 2000 nombres, 200 ont 0 pour chiffre des dizaines, 200 ont 1 pour chiffre des dizaines, etc. (Un dixième des nombres a 0 pour chiffre des dizaines et ainsi de suite.)
Donc, la somme des chiffres des dizaines de ces nombres est égale à :

$$200(0) + 200(1) + \cdots + 200(8) + 200(9) = 9000$$

De ces 2000 nombres, 200 ont 0 pour chiffre des centaines, (il s'agit des entiers de 0000 à 0099 et de 1000 à 1099), 200 ont 1 pour chiffre des centaines, etc.
(Un dixième des nombres a 0 pour chiffre des centaines et ainsi de suite.)
Donc, la somme des chiffres des centaines de ces nombres est égale à :

$$200(0) + 200(1) + \cdots + 200(8) + 200(9) = 9000$$

Des 2000 nombres, 1000 ont 0 pour chiffre des milliers et 1000 ont 1 pour chiffre des milliers.
Donc, la somme des chiffres des milliers de ces nombres est égale à :

$$1000(0) + 1000(1) = 1000$$

Donc, la somme de tous les chiffres des entiers de 1 à 2008 est égale à $54+9000+9000+9000+1000$, soit 28 054.

Réponse : (E)

8e année

1. On utilise la priorité des opérations : $8 \times (6 - 4) + 2 = 8 \times 2 + 2 = 16 + 2 = 18$

RÉPONSE : (C)

2. Puisque le polygone a un périmètre de 108 cm et que chacun de ses côtés mesure 12 cm, alors le nombre de côtés est égal à $108 \div 12$, ou 9.

RÉPONSE : (D)

3. Puisque $\angle PQR = 90°$, alors $2x° + x° = 90°$, d'où $3x = 90$, ou $x = 30$.

RÉPONSE : (A)

4. On a : $(1 + 2)^2 - (1^2 + 2^2) = 3^2 - (1 + 4) = 9 - 5 = 4$.

RÉPONSE : (B)

5. Lorsqu'on place ces nombres en ordre croissant, on place deux nombres négatifs, suivis de deux nombres positifs.
Des deux nombres positifs, soit 0,28 et 2,8, le plus petit est 0,28.
Des deux nombres négatifs, soit $-0{,}2$ et $-8{,}2$, le plus petit est $-8{,}2$.
En ordre croissant, les nombres sont : $-8{,}2$; $-0{,}2$; 0,28 ; 2,8

RÉPONSE : (A)

6. D'après la formule, le nombre qui doit être placé dans la case est $5^3 + 5 - 1$, soit $125 + 4$, ou 129.

RÉPONSE : (E)

7. Puisque 50 % des gens interrogés préfèrent la crème glacée au chocolat et que 10 % préfèrent la crème glacée aux fraises, alors 50 % + 10 %, soit 60 % des gens interrogés préfèrent la crème glacée au chocolat ou aux fraises. Or $60\,\% = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}$.
Donc $\frac{3}{5}$ des gens interrogés préfèrent la crème glacée au chocolat ou aux fraises.

RÉPONSE : (A)

8. *Solution 1*
Puisqu'on obtient 51 après avoir soustrait 9, on avait 60 avant de soustraire. Donc, 5 fois le nombre initial est égal à 60.
Donc, le nombre initial est égal à 60 divisé par 5, soit 12.

Solution 2
Soit x le nombre initial.
Donc $5x - 9 = 51$, d'où $5x = 60$, ou $x = 12$.

RÉPONSE : (D)

9. *Solution 1*
Daniel pèse 40 kg. Donc, 20 % de son poids est égal à $\frac{20}{100}$ de 40 kg, soit $\frac{1}{5}$ de 40 kg, ou 8 kg.
Puisque Stan pèse 20 % de plus que Daniel, son poids est de 40 kg + 8 kg, soit 48 kg.

Solution 2
Puisque Stan pèse 20 % de plus que Daniel, alors son poids est égal à 120 % du poids de Daniel.
Daniel pèse 40 kg. Donc, le poids de Stan est égal à $\frac{120}{100}$ de 40 kg, soit $\frac{6}{5}$ de 40 kg, ou 48 kg.

RÉPONSE : (C)

10. Parmi les 11 nombres donnés, 3, 5, 7, 11 et 13 sont premiers. (4, 6, 8, 10 et 12 ne sont pas premiers, puisqu'ils sont divisibles par 2 ; 9 n'est pas premier, puisqu'il est divisible par 3.)
Donc, 5 des 11 nombres sont premiers.
Si on choisit un carton au hasard et qu'on le retourne à l'endroit, la probabilité pour que le nombre sur le carton soit premier est égale à $\frac{5}{11}$.

RÉPONSE : (E)

11. Les dimensions de la boîte, en centimètres, sont 20 cm, 50 cm et 100 cm (puisque 1 m est égal à 100 cm).
Le volume de la boîte est donc égal à :

$$20 \times 50 \times 100 \text{ cm}^3 = 100\,000 \text{ cm}^3$$

RÉPONSE : (D)

12. *Solution 1*
Puisque chaque pizza a 8 tranches et que chaque tranche est vendue 1 $, alors chaque pizza rapporte 8 $ en recettes.
Puisque 55 pizzas ont été vendues, les recettes sont de 55×8 $, ou 440 $.
Le coût total des 55 pizzas est de $55 \times 6{,}85$ $, soit 376,75 $.
Le profit total est donc égal à 440,$ $-$ 376,75 $, soit 63,25 $.

Solution 2
Puisque chaque pizza a 8 tranches et que chaque tranche est vendue 1 $, alors chaque pizza rapporte 8 $.
Puisque chaque pizza a coûté 6,85 $, chacune rapporte un profit 8,00 $ $-$ 6,85 $, soit 1,15 $.
Puisque l'école a acheté et vendu 55 pizzas, le profit total est égal à $55 \times 1{,}15$ $, soit 63,25 $.

RÉPONSE : (D)

13. Puisque RSP est un segment de droite, alors $\angle RSQ + \angle QSP = 180^\circ$. Donc $\angle RSQ = 180^\circ - 80^\circ$, ou $\angle RSQ = 100^\circ$.
Puisque le triangle RSQ est isocèle ($RS = SQ$), alors :

$$\angle RQS = \tfrac{1}{2}(180^\circ - \angle RSQ) = \tfrac{1}{2}(180^\circ - 100^\circ) = 40^\circ$$

De même, puisque le triangle PSQ est isocèle ($PS = SQ$), alors :

$$\angle PQS = \tfrac{1}{2}(180^\circ - \angle PSQ) = \tfrac{1}{2}(180^\circ - 80^\circ) = 50^\circ$$

Donc $\angle PQR = \angle PQS + \angle RQS$, d'où $\angle PQR = 50^\circ + 40^\circ$, ou $\angle PQR = 90^\circ$.

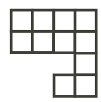
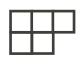
RÉPONSE : (B)

14. Lundi, Alain a lu 40 pages.
Mardi, Alain a lu 60 pages, pour un total de $40 + 60$ pages, soit 100 pages.
Mercredi, Alain a lu 80 pages, pour un total de $100 + 80$, soit 180 pages.
Jeudi, Alain a lu 100 pages, pour un total de $180 + 100$, soit 280 pages.
Vendredi, Alain a lu 120 pages, pour un total de $280 + 120$, soit 400 pages.
Donc, Alain finit le livre de 400 pages vendredi.

RÉPONSE : (A)

15. Si Aglaé avait 23 pièces de 5 ¢, la valeur des pièces serait de $23 \times 0{,}05\,\$$, soit 1,15 \$.
Or, la valeur totale des pièces qu'Aglaé a en sa possession est de 4,55 \$, ce qui est 3,40 \$ de plus.
Puisqu'une pièce de 25 ¢ vaut 20 cents de plus qu'une pièce de 5 ¢, alors à chaque fois qu'une pièce de 5 ¢ est remplacée par une pièce de 25 ¢, la valeur totale des pièces de monnaie est augmentée de 20 cents.
Pour que la valeur totale augmente de 3,40 \$, il faut remplacer une pièce de 5 ¢ par une pièce de 25 ¢ 17 fois, car $17 \times 0{,}20\,\$ = 3{,}40\,\$$.
Donc, Aglaé a 17 pièces de 25 ¢.
(On peut le vérifier : Si Aglaé avait 17 pièces de 25 ¢ et 6 pièces de 5 ¢, la valeur totale des pièces serait de $17 \times 0{,}25\,\$ + 6 \times 0{,}05\,\$$, soit $4{,}25\,\$ + 0{,}30\,\$$, ou 4,55 \$.)

Réponse : (B)

16. Après beaucoup de tâtonnements, on se rend compte que la seule façon de réussir est de faire subir à la deuxième figure une rotation de 90° dans le sens des aiguilles d'une montre et de la combiner à la première figure pour obtenir  .
La troisième figure est donc  .

Réponse : (C)

17. Après la virgule, les décimales se présentent en tranches répétées de 6 chiffres.
Puisque $2008 \div 6 = 334{,}666...$, alors le 2008^{e} chiffre après la virgule se présente dans la 335^{e} tranche.
Dans les 334 premières tranches de 6 chiffres, le nombre total de chiffres est égal à 334×6, soit 2004. Donc, le 2008^{e} chiffre est le 4^{e} chiffre de la 335^{e} tranche, soit un 8.

Réponse : (A)

18. Puisque Andréa a parcouru $\frac{3}{7}$ de la distance totale de 168 km et que $\frac{1}{7}$ de 168 km correspond à 24 km, elle a parcouru 3×24 km, ou 72 km.
Il lui reste 96 km à parcourir, car $168 - 72 = 96$.
Pour parcourir 96 km en trois jours, elle doit parcourir une distance moyenne de $\frac{96}{3}$ km, soit 32 km par jour.

Réponse : (D)

19. *Solution 1*
Après des tâtonnements, on peut découvrir que $x = 0$ et $y = 7$, puisque $307 + 703 = 1010$.
Puisqu'on nous demande *la* valeur de $y - x$, elle doit être égale à $7 - 0$, soit 7.

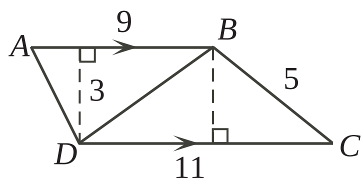
Solution 2
Si on additionne les chiffres des unités, on obtient soit $y + 3 = x$, soit $y + 3 = x$ et une retenue de 1, ce qui signifie que $y + 3 = 10 + x$.
On a donc soit $y - x = -3$, soit $y - x = 10 - 3$, c'est-à-dire $y - x = 7$.
Or, s'il n'y avait aucune retenue, la somme de la colonne des centaines donnerait $x + x$, ou $2x$, qui est pair. Puisque le chiffre des dizaines de la somme est égal à 1, on peut conclure que cette situation est impossible. Donc, il doit y avoir une retenue dans l'addition des chiffres des unités.
Donc $y - x = 7$.

Réponse : (C)

20. *Solution 1*
L'aire d'un trapèze est égale à la moitié du produit de la somme des bases et de la hauteur. Donc, l'aire de ce trapèze est égale à :

$$\frac{1}{2} \times (9 + 11) \times 3 = \frac{1}{2} \times 20 \times 3 = 10 \times 3 = 30$$

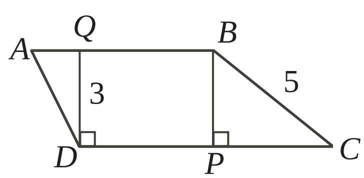
Solution 2
On trace la diagonale BD.



Le triangle ABD a une base de 9 et une hauteur de 3. Le triangle BCD a une base de 11 et une hauteur de 3. L'aire du trapèze est égale à la somme de l'aire des deux triangles. Elle est donc égale à :

$$\frac{1}{2} \times 9 \times 3 + \frac{1}{2} \times 11 \times 3 = \frac{27}{2} + \frac{33}{2} = \frac{60}{2} = 30$$

Solution 3
On abaisse des perpendiculaires DQ et PB aux bases AB et CD.



D'après le théorème de Pythagore, $BP^2 + PC^2 = BC^2$. Donc $3^2 + PC^2 = 5^2$, ou $PC^2 = 25 - 9$, d'où $PC^2 = 16$, ou $PC = 4$.
Puisque $DC = 11$, alors $DP = 11 - 4$, ou $DP = 7$.
Puisque $QBPD$ est un rectangle, alors $QB = DP = 7$. Donc $AQ = 9 - 7$, ou $AQ = 2$.
L'aire du trapèze $ABCD$ est égale à la somme de l'aire du triangle AQD, du rectangle $QBPD$ et du triangle BPC. Elle est donc égale à :

$$\frac{1}{2} \times 2 \times 3 + 7 \times 3 + \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 3 + 21 + 6 = 30$$

Réponse : (D)

21. Lorsqu'on regarde l'objet de face, on voit 7 carrés mesurant 1×1. Donc, cette surface a une aire de $7 \times 1 \times 1$, ou 7.
De même, si on regarde l'objet de l'arrière, on voit une surface qui a une aire de 7.
On considère maintenant les faces vues de la gauche, de la droite, du dessus et du dessous. Chacune est formée de rectangles mesurant 1×2 et dont l'aire est donc égale à 2.
Combien de ces rectangles y a-t-il ?
Si on commence en bas, à gauche, et si on on fait le tour de la forme dans le sens des aiguilles d'une montre, on voit, dans l'ordre, 2 rectangles à gauche, 2 rectangles au dessus, 2 rectangles à gauche, 1 rectangle au dessus, trois rectangles à droite, 1 rectangle en dessous, 1 rectangle à droite et 2 rectangles en dessous, pour un total de 14 rectangles.
L'aire totale de ces rectangles est égale à 14×2, ou 28.
L'aire totale de l'objet est donc égale à $7 + 7 + 28$, ou 42.

Réponse : (A)

22. Il y a 6 façons de remplir la première rangée du tableau :

$$1,2,3 \quad 1,3,2 \quad 2,1,3 \quad 2,3,1 \quad 3,1,2 \quad 3,2,1$$

On considère la première rangée suivante : $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}$.

La première colonne pourrait contenir 1, 2, 3 ou 1, 3, 2 : $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & & \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array}$ ou $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 3 & & \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array}$.

Chacun de ces tableaux peut être rempli d'une seule façon.
(Dans le 1er tableau, le 2e nombre de la ligne du bas ne peut être un 2 ou un 3 ; il doit donc être un 1. Le nombre au-dessus de lui est donc un 3. La colonne de droite est donc 3, 1, 2.
De même, le nombre au milieu du 2e tableau doit être un 1. Essaie de remplir ce tableau !)
Pour résumer, une première ligne 1, 2, 3 donne deux tableaux possibles.
De même, chacune des 5 autres premières rangées possibles donne deux tableaux possibles.
(On peut le voir en l'essayant ou, par exemple, en interchangeant tous les 2 et les 3 du premier tableau pour obtenir les tableaux ayant 1, 3, 2 dans la 1re rangée.)
Donc, le nombre de façons différentes de remplir le tableau est égal à 6×2, ou 12.

Réponse : (B)

23. Puisque le grand cercle a une aire de 64π et qu'il a été séparé en deux régions de même aire, l'aire de la grande partie ombrée est égale à $\frac{1}{2}$ de 64π, soit 32π.
Soit r le rayon du grand cercle. Puisque l'aire de ce cercle est égale à 64π, alors $\pi r^2 = 64\pi$. Donc $r^2 = 64$ et $r = \sqrt{64} = 8$, puisque $r > 0$.
Puisque le petit cercle passe par le centre du grand cercle et qu'il touche au grand cercle, alors par symétrie, le rayon du grand cercle est un diamètre du petit cercle. (En d'autres mots, si on joint le point de contact des deux cercles au point O, le segment obtenu est un diamètre du petit cercle et un rayon du grand cercle.)
Donc, le petit cercle a un diamètre de 8 et un rayon de 4.
L'aire du petit cercle est égale à $\pi(4^2)$, ou 16π. L'aire de la petite région ombrée est donc égale à $\frac{1}{2}$ de 16π, soit 8π.
L'aire totale des régions ombrées est donc égale à $32\pi + 8\pi$, ou 40π.

Réponse : (D)

24. On examine d'abord les entiers de 2000 à 2008.
Puisqu'on peut ignorer les zéros dans l'addition des chiffres, la somme des chiffres de ces entiers est égale à :

$$2 + (2+1) + (2+2) + (2+3) + (2+4) + (2+5) + (2+6) + (2+7) + (2+8) = 54$$

On examine ensuite les entiers de 1 à 1999.
Puisqu'on peut ignorer le chiffre zéro dans l'addition, on peut considérer qu'il s'agit des nombres de 0001 à 1999. On ajoutera même le nombre 0000 à la liste pour avoir 2000 nombres.
De ces 2000 nombres, 200 ont 0 pour chiffre des unités, 200 ont 1 pour chiffre des unités, etc.
(Un dixième des nombres a 0 pour chiffre des unités et ainsi de suite.)
Donc, la somme des chiffres des unités de ces nombres est égale à :

$$200(0) + 200(1) + \cdots + 200(8) + 200(9) = 200(0+1+2+3+4+5+6+7+8+9) = 200(45) = 9000$$

De ces 2000 nombres, 200 ont 0 pour chiffre des dizaines, 200 ont 1 pour chiffre des dizaines, etc. (Un dixième des nombres a 0 pour chiffre des dizaines et ainsi de suite.)
Donc, la somme des chiffres des dizaines de ces nombres est égale à :

$$200(0) + 200(1) + \cdots + 200(8) + 200(9) = 9000$$

De ces 2000 nombres, 200 ont 0 pour chiffre des centaines, (il s'agit des entiers de 0000 à 0099 et de 1000 à 1099), 200 ont 1 pour chiffre des centaines, etc.
(Un dixième des nombres a 0 pour chiffre des centaines et ainsi de suite.)
Donc, la somme des chiffres des centaines de ces nombres est égale à :

$$200(0) + 200(1) + \cdots + 200(8) + 200(9) = 9000$$

Des 2000 nombres, 1000 ont 0 pour chiffre des milliers et 1000 ont 1 pour chiffre des milliers.
Donc, la somme des chiffres des milliers de ces nombres est égale à :

$$1000(0) + 1000(1) = 1000$$

Donc, la somme de tous les chiffres des entiers de 1 à 2008 est égale à 54+9000+9000+9000+1000, soit 28 054.

Réponse : (E)

25. Puisque les deux chandelles avaient la même longueur à 21 h, que la plus longue a fini de brûler à 22 h et que la plus courte a fini de brûler à minuit, alors la plus longue a mis 1 heure et la plus courte a mis 3 heures pour brûler cette même longueur.
Donc, la chandelle longue a brûlé 3 fois plus vite que la courte.
Supposons que la chandelle courte a brûlé x cm par heure.
Donc, la chandelle longue a brûlé $3x$ cm par heure.
Depuis qu'elle a été allumée à 15 h jusqu'à 21 h, la chandelle longue a brûlé pendant 6 heures. Elle a donc brûlé $6 \times 3x$ cm, soit $18x$ cm.
Depuis qu'elle a été allumée à 19 h jusqu'à 21 h, la chandelle courte a brûlé pendant 2 heures. Elle a donc brûlé $2 \times x$ cm, soit $2x$ cm.
Or, jusqu'à 21 h, la chandelle longue a brûlé 32 cm de plus que la chandelle courte, puisqu'elle était 32 cm plus longue que l'autre au départ.
Donc $18x - 2x = 32$, d'où $16x = 32$, ou $x = 2$.
Pour résumer, la chandelle courte a brûlé pendant 5 heures à une vitesse de 2 cm par heure. Elle mesurait donc 10 cm au départ.
La chandelle longue a brûlé pendant 7 heures à une vitesse de 6 cm par heure. Elle mesurait donc 42 cm au départ.
Au départ, la somme des longueurs des chandelles était de 42 cm + 10 cm, soit 52 cm.

Réponse : (E)