Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Galois 2008

le mercredi 16 avril 2008

Solutions

1. (a) Puisque $(36, 25, x)$ est un triplet O'Hara, alors $\sqrt{36}+\sqrt{25}=x$, d'où $x=6+5$, ou $x=11$.

   (b) Puisque $(a, 9, 5)$ est un triplet O'Hara, alors $\sqrt{a}+\sqrt{9}=5$, ou $\sqrt{a}+3=5$, d'où $\sqrt{a}=2$, ou $a=4$.

   (c) On cherche des entiers positifs a et b tels que $\sqrt{a}+\sqrt{b}=6$.
   On peut déterminer les cinq triplets en utilisant :
   - $\sqrt{a}=5$ et $\sqrt{b}=1$, d'où $a=25$ et $b=1$;
   - $\sqrt{a}=4$ et $\sqrt{b}=2$, d'où $a=16$ et $b=4$;
   - $\sqrt{a}=3$ et $\sqrt{b}=3$, d'où $a=9$ et $b=9$;
   - $\sqrt{a}=2$ et $\sqrt{b}=4$, d'où $a=4$ et $b=16$;
   - $\sqrt{a}=1$ et $\sqrt{b}=5$, d'où $a=1$ et $b=25$.

   Donc, $(25, 1, 6)$, $(16, 4, 6)$, $(9, 9, 6)$, $(4, 16, 6)$ et $(1, 25, 6)$ sont cinq triplets O'Hara pour lesquels $x=6$.
   (Remarquer qu'on ne demandait pas de prouver que ce sont les seuls tels triplets.)

2. (a) La pente de la droite est égale à : $\dfrac{9-5}{6-0}=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$
   Puisque la droite passe au point $P(0, 5)$, elle a une ordonnée à l'origine de 5.
   Donc, la droite a pour équation $y=\frac{2}{3}x+5$.

   (b) Une droite perpendiculaire à la droite précédente a pour pente l'opposé de l'inverse de la pente $\frac{2}{3}$. Sa pente est donc égale à $-\dfrac{1}{\frac{2}{3}}$, ou $-\frac{3}{2}$.
   Cette droite a donc une équation de la forme $y=-\frac{3}{2}x+b$, b étant un nombre quelconque.
   Puisque la droite passe au point $Q(6, 9)$, ses coordonnées $(6, 9)$ vérifient l'équation de la droite. Donc $9=-\frac{3}{2}(6)+b$, d'où $9=-9+b$, ou $b=18$.
   Donc, la droite a pour équation $y=-\frac{3}{2}x+18$.

   (c) Puisque R est situé sur l'axe des abscisses, son ordonnée est égale à 0. Puisque R est sur la droite, ses coordonnées vérifient l'équation $y=-\frac{3}{2}x+18$. Pour déterminer l'abscisse de R, on pose donc $y=0$ dans l'équation qui devient $0=-\frac{3}{2}x+18$, ou $\frac{3}{2}x=18$, d'où $x=\frac{2}{3}(18)$, ou $x=12$.
   Donc, R a pour coordonnées $(12, 0)$.

   (d) *Solution 1*
   Puisque le triangle PQR est rectangle en Q, son aire est égale à $\frac{1}{2}(PQ)(QR)$.
   Puisque P, Q et R ont pour coordonnées respectives $(0, 5)$, $(6, 9)$ et $(12, 0)$, alors :

$$PQ=\sqrt{(6-0)^2+(9-5)^2}=\sqrt{6^2+4^2}=\sqrt{52}=2\sqrt{13}$$

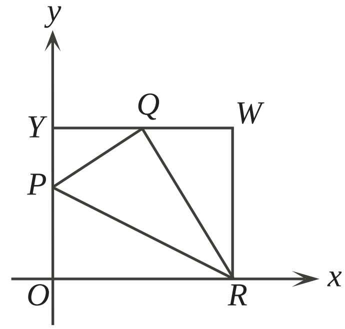
   et

$$QR=\sqrt{(6-12)^2+(9-0)^2}=\sqrt{6^2+9^2}=\sqrt{117}=3\sqrt{13}$$

   L'aire du triangle est donc égale à $\frac{1}{2}(2\sqrt{13})(3\sqrt{13})$, soit $3(13)$, ou 39.

Solution 2

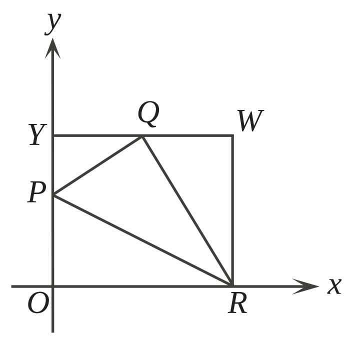
On forme un rectangle $ORWY$ en traçant une droite horizontale qui passe au point Q et qui coupe l'axe des ordonnées au point $Y(0,9)$, de même qu'une droite verticale qui passe au point R et qui coupe la droite horizontale précédente au point $W(12,9)$.



Le rectangle $ORWY$ a une base de 12 et une hauteur de 9. Il a donc une aire de 12(9), ou 108.

L'aire du triangle PQR est égale à l'aire du rectangle moins l'aire des triangles POR, PYQ et QWR.

Chacun de ces trois derniers triangles a des cathètes parallèles aux axes.



D'après la figure précédente, l'aire du triangle POR est égale à $\frac{1}{2}(5)(12)$, ou 30.

De même, l'aire du triangle PYQ est égale à $\frac{1}{2}(4)(6)$, ou 12, et l'aire du triangle QWR est égale à $\frac{1}{2}(6)(9)$, ou 27.

Donc, l'aire du triangle PQR est égale à $108 - 30 - 12 - 27$, ou 39.

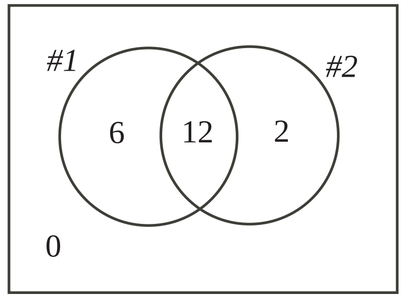
3. (a) Le plus grand nombre possible d'élèves qui auraient pu répondre correctement aux deux questions est 14. (Ceci se produirait si chacun des 14 élèves qui ont répondu correctement à la question 2 avait aussi répondu correctement à la question 1.) Il ne peut pas y avoir plus de 14 élèves, car seulement 14 élèves ont répondu correctement à la question 2.

Pour déterminer le plus petit nombre possible d'élèves qui auraient pu répondre correctement aux deux questions, on détermine le plus grand nombre possible d'élèves qui auraient pu répondre incorrectement à au moins une question. On suppose donc que les élèves qui ont répondu incorrectement à une question ne sont pas les mêmes que ceux qui ont répondu incorrectement à l'autre question.

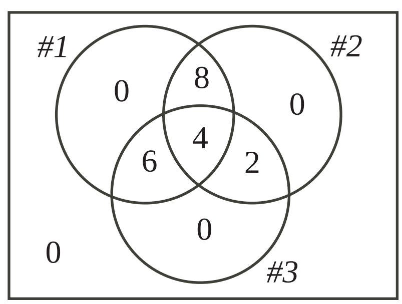
On sait que sur 20 élèves, 2 ont répondu incorrectement à la question 1 et 6 ont répondu incorrectement à la question 2. Il peut donc y avoir un maximum de 8 élèves qui ont répondu incorrectement à une question. (Il pourrait y avoir moins de 8 élèves si certains d'entre eux ont répondu incorrectement aux deux questions.)

Puisque 8 élèves au plus ont répondu incorrectement à une question, alors au moins 8 élèves (soit $20 - 8$) ont répondu correctement aux deux questions.

Le diagramme de Venn suivant montre que ce nombre est possible. Les cercles indiquent les nombres d'élèves qui ont répondu correctement aux questions.

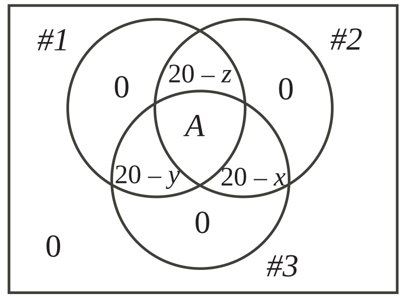


(b) Le plus grand nombre possible d'élèves qui auraient pu répondre correctement aux trois questions est 12. (Cela se produirait si chacun des 12 élèves qui ont répondu correctement à la question 3 ont aussi répondu correctement aux deux autres questions.) Il ne peut pas y avoir plus de 12 élèves, car seulement 12 élèves ont répondu correctement à la question 3.
Pour déterminer le plus petit nombre possible d'élèves qui auraient pu répondre correctement aux trois questions, on détermine le plus grand nombre possible d'élèves qui auraient pu répondre incorrectement à au moins une question. On suppose donc que les élèves qui ont répondu incorrectement à une question ne sont pas les mêmes que ceux qui ont répondu incorrectement à une autre question.
On sait que sur 20 élèves, 2 ont répondu incorrectement à la question 1, 6 ont répondu incorrectement à la question 2 et 8 ont répondu incorrectement à la question 3. Donc, il peut y avoir un maximum de 16 élèves qui ont répondu incorrectement à une question.
Puisque 16 élèves au plus ont répondu incorrectement à une question, alors au moins 4 élèves (soit $20 - 16$) ont répondu correctement aux trois questions.
Le diagramme de Venn suivant montre que ce nombre est possible. Les cercles indiquent les nombres d'élèves qui ont répondu correctement aux questions.



(c) On utilise une démarche semblable à celle utilisée dans la partie (b).
Pour déterminer le plus petit nombre possible d'élèves qui auraient pu répondre correctement aux trois questions, on détermine le plus grand nombre possible d'élèves qui auraient pu répondre incorrectement à au moins une question. On suppose donc que les élèves qui ont répondu incorrectement à une question ne sont pas les mêmes que ceux qui ont répondu incorrectement à une autre question.
On sait que sur 20 élèves, $20 - x$ élèves ont répondu incorrectement à la question 1, $20 - y$ élèves ont répondu incorrectement à la question 2 et $20 - z$ élèves ont répondu incorrectement à la question 3. Donc, il peut y avoir un maximum de $60 - x - y - z$ élèves qui ont répondu incorrectement à une question.
(Puisque $40 \leq x + y + z \leq 60$, alors $0 \leq 60 - x - y - z \leq 20$. Il est donc approprié de parler de $60 - x - y - z$ élèves dans ce contexte.)
Puisque $60 - x - y - z$ élèves au plus ont répondu incorrectement à une question, alors au moins $x + y + z - 40$ élèves (soit $20 - (60 - x - y - z)$) ont répondu correctement aux

trois questions.
(On remarque que $0 \leq x+y+z-40 \leq 20$, puisque $40 \leq x+y+z \leq 60$. Donc, $x+y+z-40$ est un nombre permis d'élèves.)
Le diagramme de Venn suivant montre que ce nombre est possible. Les cercles indiquent les nombres d'élèves qui ont répondu correctement aux questions.



$A = x + y + z - 40$

4. (a) Au départ, la liste comprend les entiers 1, 2, 3, 4, 5 et 6.
Caroline enlève le 2. Paul enlève ensuite les diviseurs de 2, soit le nombre 1. La liste comprend maintenant les entiers 3, 4, 5 et 6.
Caroline doit enlever un nombre de cette liste de manière que dans la liste, ce nombre ait un diviseur propre, c'est-à-dire un diviseur autre que lui-même.
Le seul tel nombre est le 6. Caroline enlève donc le 6. Paul enlève ensuite les diviseurs de 6, soit le nombre 3. La liste comprend maintenant les entiers 4 et 5.
Caroline ne peut enlever aucun de ces deux nombres, car aucun n'a de diviseur propre dans la liste.
Donc, Paul enlève le 4 et le 5.
Caroline a donc enlevé le 2 et le 6 qui ont une somme de 8. Paul a enlevé le 1, le 3, le 4 et le 5, qui ont une somme de 13.

(b) À chacun de ses tours, Caroline enlève un seul nombre, de manière que Paul puisse à son tour enlever au moins un nombre. Elle peut donc enlever au plus la moitié des nombres de la liste. Dans ce cas-ci, elle peut enlever un maximum de 5 nombres de la liste.
Les cinq plus grands nombres que Caroline pourrait enlever, sans égard aux règles du jeu, sont 6, 7, 8, 9 et 10. Ils ont une somme de 40. Lui est-il possible de les enlever en suivant les règles du jeu ?
Pour réussir, elle doit forcer Paul à n'enlever qu'un seul nombre à chaque tour.
Si Caroline enlève d'abord le 7, Paul ne peut enlever que le 1.
Si Caroline enlève ensuite le 9, Paul ne peut enlever que le 3.
Si Caroline enlève ensuite le 6, Paul ne peut enlever que le 2.
Si Caroline enlève ensuite le 8, Paul ne peut enlever que le 4.
Si Caroline enlève ensuite le 10, Paul ne peut enlever que le 5.
(Caroline aurait pu changer ses deux derniers choix l'un pour l'autre.)
Donc, Caroline peut enlever les cinq plus grands nombres. Elle peut donc obtenir une somme maximale possible de 40.

(c) Comme dans la partie (b), Caroline peut enlever au plus la moitié des nombres, soit 7.
Lui est-il possible d'enlever 7 nombres en suivant les règles du jeu ?
Si Caroline enlève 7 nombres, Paul doit enlever 7 nombres, car il doit enlever au moins un nombre à chacun de ses tours et il y a 14 nombres en tout.
Puisque Paul enlève des nombres qui sont des diviseurs propres du nombre que Caroline a enlevé, alors les nombres qu'il enlève ne peuvent pas être supérieurs à $\frac{1}{2}n$. (Pour enlever un

nombre supérieur à $\frac{1}{2}n$, il faudrait que Caroline ait enlevé un nombre supérieur à $2 \times \frac{1}{2}n$, c'est-à-dire supérieur à n, ce qui est impossible.)

Donc, si Caroline enlève 7 nombres, elle doit enlever les 7 nombres qui sont supérieurs à $\frac{1}{2}(14)$ (soit 8, 9, 10, 11, 12, 13 et 14).

Quel que soit le nombre que Caroline enlève en premier, Paul enlèvera le nombre 1 à son premier tour. (Il se peut qu'il puisse enlever d'autres nombres en plus.)

Avant que Caroline n'entreprenne son deuxième tour, au moins un des nombres 11 et 13 est encore dans la liste, car elle a peut-être enlevé l'un ou l'autre à son premier tour, mais pas les deux.

Supposons que le 11 est encore dans la liste. (On utilise le même argument si le 13 est encore dans la liste.)

Caroline ne pourra jamais enlever le 11 de la liste, puisque ce nombre est premier et que son seul diviseur propre est 1 qui n'est plus dans la liste. D'après la dernière règle, elle ne peut donc pas enlever le 11.

Donc, Caroline ne peut pas enlever les sept nombres de 8 à 14. Elle ne peut donc pas enlever 7 nombres de la liste.