Concours Galois 2008 (10^e^ année – Sec. IV)

le mercredi 16 avril 2008

1. Trois entiers positifs a, b et x forment un *triplet O'Hara* (a, b, x) si $\sqrt{a} + \sqrt{b} = x$.
   Par exemple, $(1, 4, 3)$ est un triplet O'Hara, puisque $\sqrt{1} + \sqrt{4} = 3$.
   (a) Sachant que $(36, 25, x)$ est un triplet O'Hara, déterminer la valeur de x.
   (b) Sachant que $(a, 9, 5)$ est un triplet O'Hara, déterminer la valeur de a.
   (c) Déterminer les cinq triplets O'Hara pour lesquels $x = 6$. Expliquer sa démarche.

2. (a) Déterminer l'équation de la droite qui passe aux points $P(0, 5)$ et $Q(6, 9)$.
   (b) Une droite perpendiculaire à PQ passe au point Q. Déterminer l'équation de cette droite.
   (c) La droite de la partie (b) coupe l'axe des abscisses au point R. Déterminer les coordonnées de R.
   (d) Déterminer l'aire du triangle rectangle PQR.

3. (a) On a posé deux questions à 20 élèves pour les évaluer. Voici les résultats :

Numéro de la question	Nombre d'élèves qui ont répondu correctement
1	18
2	14

   Déterminer le plus petit nombre possible et le plus grand nombre possible d'élèves qui auraient pu répondre correctement aux deux questions. Justifier pourquoi il s'agit bien du plus petit nombre possible et du plus grand nombre possible.

   (b) On a posé trois questions à 20 élèves pour les évaluer. Voici les résultats :

Numéro de la question	Nombre d'élèves qui ont répondu correctement
1	18
2	14
3	12

   Déterminer le plus petit nombre possible et le plus grand nombre possible d'élèves qui auraient pu répondre correctement aux trois questions. Justifier pourquoi il s'agit bien du plus petit nombre possible et du plus grand nombre possible.

   (c) On a posé trois questions à 20 élèves pour les évaluer. Voici les résultats :

Numéro de la question	Nombre d'élèves qui ont répondu correctement
1	x
2	y
3	z

   On sait que $x \geq y \geq z$ et $x + y + z \geq 40$.
   Déterminer, en fonction de x, y et z, le plus petit nombre d'élèves possible qui auraient pu répondre correctement aux trois questions.

4. Caroline et Paul prennent part à un jeu dans lequel on utilise une liste d'entiers de 1 à n. Voici les règles du jeu :

   – Caroline joue toujours en premier.

   – Caroline et Paul jouent à tour de rôle.

   – À chacun de ses tours, Caroline doit enlever un nombre de la liste de manière que dans la liste, ce nombre ait un diviseur autre que lui-même.

   – À chacun de ses tours, Paul doit enlever de la liste tous les nombres qui sont des diviseurs du nombre que Caroline vient d'enlever.

   – Si Caroline ne peut plus enlever un nombre de la liste, Paul enlève tous les nombres qui restent.

   Par exemple, si $n = 6$, voici une séquence possible de choix des deux joueurs :

Joueur	Nombres enlevés	Nombres qui restent	Remarques
Caroline	4	1, 2, 3, 5, 6	
Paul	1, 2	3, 5, 6	
Caroline	6	3, 5	Elle ne peut enlever le 3 ou le 5.
Paul	3	5	
Caroline	Aucun	5	Caroline ne peut rien enlever.
Paul	5	Aucun	

   Dans cet exemple, la somme des nombres que Caroline a enlevés est égale à $4 + 6$, ou 10, et la somme des nombres que Paul a enlevés est égale à $1 + 2 + 3 + 5$, ou 11.

   (a) Supposons que $n = 6$ et que Caroline enlève le nombre 2 à son premier tour. Déterminer la somme des nombres que Caroline enlèvera et la somme des nombres que Paul enlèvera.

   (b) Si $n = 10$, déterminer la somme maximale possible des nombres que Caroline peut enlever. Prouver que cette somme est bien la somme maximale possible qu'elle peut obtenir.

   (c) Si $n = 14$, prouver que Caroline ne peut enlever 7 nombres.