Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Fryer 2008

le mercredi 16 avril 2008

Solutions

1. (a) (i) La somme des neuf entiers est égale à :

$$11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19 = 135$$

(ii) Les neuf nombres du carré magique ont une somme de 135.
Puisque la somme des nombres de chaque rangée est la même, elle est égale à $\frac{1}{3}$ de la somme des neuf nombres, soit $\frac{1}{3}(135)$, ou 45.
Donc, la constante magique est égale à 45.

(iii) La somme des nombres de chaque rangée, de chaque colonne et de chaque diagonale principale est égale à 45.
Puisqu'on connaît déjà deux nombres de la 1re rangée et deux nombres d'une diagonale, on peut compléter cette rangée et cette diagonale pour obtenir

18	11	16
	15	
		12

, puisque $45 - 18 - 11 = 16$ et $45 - 18 - 12 = 15$.

On peut maintenant compléter les 2e et 3e colonnes pour obtenir

18	11	16
	15	17
	19	12

.

On peut maintenant compléter les 2e et 3e rangées pour obtenir

18	11	16
13	15	17
14	19	12

.

(b) (i) La somme des seize entiers est égale à :

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 13 + 14 + 15 + 16 = 136$$

(On peut apparier 1 avec 16, 2 avec 15, ainsi de suite, pour obtenir 8 paires de nombres qui ont chacune une somme de 17.)

(ii) Les seize nombres du carré magique ont une somme de 136.
Puisque la somme des nombres de chaque rangée est la même, elle est égale à $\frac{1}{4}$ de la somme des seize nombres, soit $\frac{1}{4}(136)$, ou 34.
Donc, la constante magique est égale à 34.

(iii) La somme des nombres de chaque rangée, de chaque colonne et de chaque diagonale principale est égale à 45.
Puisqu'on connaît trois nombres des 1re et 4e rangées, des 1re, 3e et 4e colonnes et de chaque diagonale, on peut compléter ces rangées, ces colonnes et ces diagonales pour obtenir

16	3	2	13
5	10	11	8
9		7	12
4	15	14	1

, puisque $34 - 16 - 3 - 13 = 2$ et ainsi de suite.

On peut compléter le carré magique pour obtenir

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

.

2. (a) Après avoir joué 5 matchs de plus, le nombre de matchs joués est égal à $10 + 5$, ou 15, et le nombre de victoires est égal à $8 + 1$, ou 9.

Le pourcentage de victoires final des Requins est égal $\frac{9}{15} \times 100\,\%$, ou $60\,\%$.

(b) En tout, les Émeus ont joué $10 + x$ matchs et en ont gagné $4 + x$.

Puisque leur pourcentage de victoires final est égal à $70\,\%$, alors $\frac{4+x}{10+x} \times 100\,\% = 70\,\%$, ou $\frac{4+x}{10+x} = \frac{7}{10}$.

Donc $10(4 + x) = 7(10 + x)$, d'où $40 + 10x = 70 + 7x$, ou $3x = 30$, ou $x = 10$.

Donc, le nombre total de matchs qu'ils ont joués est égal à $10 + x$, soit $10 + 10$, ou 20.

(c) Supposons qu'à un moment, les Diables ont joué y matchs de plus que les 10 matchs initiaux, qu'ils les ont tous perdus et qu'à ce moment, ils ont gagné exactement $\frac{2}{7}$ des matchs joués. À ce moment, ils ont joué $10 + y$ matchs et en ont gagné 7.

Donc $\frac{7}{10+y} = \frac{2}{7}$, d'où $7(7) = 2(10 + y)$, ou $2y + 20 = 49$, ou $2y = 29$.

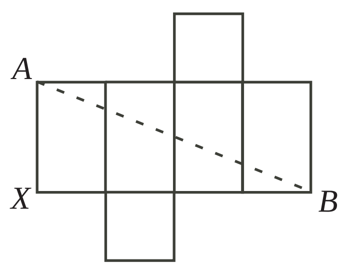
Puisque y n'est pas un entier, il n'y a pas eu un moment où les Diables ont gagné exactement $\frac{2}{7}$ des matchs joués.

3. (a) La boîte que l'on peut former à partir du développement de la figure 1 a des dimensions de 4 sur 4 sur 7. Elle a donc un volume de $4 \times 4 \times 7$, ou 112.

On peut obtenir l'aire totale de la boîte à partir du développement. D'après le développement, la boîte aura deux faces de dimensions 4 sur 4 et quatre faces de dimensions 4 sur 7.

L'aire totale est donc égale à $2(4 \times 4) + 4(4 \times 7)$, soit $32 + 112$, ou 144.

(b) Soit le point X indiqué dans la figure suivante.



Puisque AX correspond à la hauteur de la boîte, on a $AX = 6$.

On sait que $\angle AXB = 90°$, puisque la boîte est de forme rectangulaire.

On voit aussi que $XB = 2 + 2 + 2 + 2$, ou $XB = 8$, puisque XB est formé des quatre arêtes qui entourent la face inférieure de la boîte.

D'après le théorème de Pythagore, $AB^2 = AX^2 + XB^2$, d'où $AB^2 = 6^2 + 8^2$, ou $AB^2 = 100$. Donc $AB = 10$, puisque $AB > 0$.

(c) On cherche la distance la plus courte du point A au point G le long de la surface du bloc. Quelques remarques s'imposent :

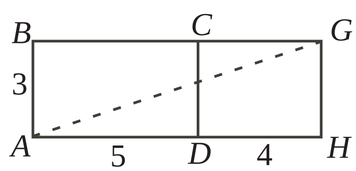
– On peut tracer n'importe quel trajet de A à G sur un développement du bloc, comme dans les parties (a) ou (b).

– Étant donné un développement particulier du bloc, le trajet le plus court de A à G sera un segment de droite. La longueur de ce segment peut être obtenue à partir du théorème de Pythagore, en utilisant les déplacements horizontal et vertical de A à G.

– Aucune face du bloc ne contient les deux points A et G. Il est donc impossible pour la chenille de se rendre de A à G en se promenant sur une face seulement. Elle doit emprunter au moins deux faces.
– N'importe quel segment AG qui emprunte plus de 2 faces sera plus long que les segments possibles AG qui empruntent exactement 2 faces. En effet, le déplacement horizontal et le déplacement vertical seront chacun au moins aussi long que si le segment emprunte 2 faces.
– Il n'est pas nécessaire de considérer les chemins qui empruntent des arêtes du bloc, puisqu'un tel chemin ne formerait pas un segment de droite sur le développement.

Il suffit donc de considérer tous les chemins possibles de A à G, en ligne droite, qui empruntent exactement deux faces. Voici les combinaisons possibles de 2 faces adjacentes :
– $ABCD$ suivie de $DCGH$
– $ABCD$ suivie de $BCGF$
– $ADHE$ suivie de $DCGH$
– $ADHE$ suivie de $EHGF$
– $ABFE$ suivie de $BCGF$
– $ABFE$ suivie de $EHGF$

On considère le segment AG qui emprunte les faces $ABCD$ et $DCGH$.



Ce segment est l'hypoténuse d'un triangle rectangle ayant des cathètes de longueurs 3 et 9. Il a donc pour longueur $\sqrt{3^2+9^2}$, ou $\sqrt{90}$.
De la même manière, on obtient les longueurs de AG qui empruntent chacune des autres combinaisons possibles :
– $ABCD$ suivie de $DCGH$: $\sqrt{90}$
– $ABCD$ suivie de $BCGF$: $\sqrt{74}$
– $ADHE$ suivie de $DCGH$: $\sqrt{80}$
– $ADHE$ suivie de $EHGF$: $\sqrt{74}$
– $ABFE$ suivie de $BCGF$: $\sqrt{80}$
– $ABFE$ suivie de $EHGF$: $\sqrt{90}$

(On remarque que ces longueurs surviennent en trois paires de longueurs égales. On aurait donc pu déterminer trois longueurs et faire appel à la symétrie pour les trois autres.)
Le plus court segment AG a donc une longueur de $\sqrt{74}$. La distance la plus courte du point A au point G le long de la surface du bloc est donc égale à $\sqrt{74}$.

4. (a) On considère d'abord les chiffres d'un palindrome quelconque.
Si un palindrome P est formé d'un nombre pair de chiffres (p. ex., 1221), alors chacun des chiffres qui paraissent dans P paraît un nombre pair de fois, car chaque chiffre qui paraît dans la première moitié du nombre est apparié au même chiffre dans la deuxième moitié.
Si un palindrome P est formé d'un nombre impair de chiffres (p. ex., 12321), alors un des chiffres qui paraissent dans P paraît un nombre impair de fois et chacun des autres chiffres qui paraîssent dans P paraît un nombre pair de fois. En effet, P admet alors un chiffre du milieu. Si on enlevait ce chiffre du milieu, P serait alors formé d'un nombre pair de chiffres et chacun des chiffres qui paraissent maintenant dans P paraîtrait un nombre pair de fois. En rajoutant le nombre du milieu, il y aurait maintenant un chiffre qui paraît un

nombre impair de fois.
Étant donné n'importe quel groupe de chiffres dans lequel les chiffres paraissent un nombre pair de fois, il est possible de placer ces chiffres de manière à former un palindrome. Il suffit de le former en plaçant deux chiffres identiques l'un à côté de l'autre et en ajoutant progressivement un chiffre au début et un chiffre identique à la fin.
De même, étant donné n'importe quel groupe de chiffres dans lequel tous les chiffres sauf un paraissent un nombre pair de fois, il est possible de placer ces chiffres de manijère à former un palindrome. Il suffit de placer le chiffre qui paraît un nombre impair de fois, puis d'ajouter progressivement un chiffre au début et un chiffre identique à la fin.
(Aucun autre groupe de chiffres ne peuvent être déplacés pour former un palindrome.)

On considère maintenant le nombre x.
Le tableau suivant indique le nombre de fois que les chiffres paraissent dans x :

Chiffre	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nombre de fois	3	13	13	4	3	3	3	3	3	3

Si on voulait créer un palindrome P formé d'un nombre pair des chiffres de x, il faudrait réduire le nombre de fois que certains des chiffres de x paraissent de manière que chacun paraisse un nombre pair de fois. Pour le faire en enlevant le plus petit nombre de chiffres possible, il faudrait enlever un chiffre 0, un chiffre 1, un chiffre 2, un chiffre 4, un chiffre 5, un chiffre 6, un chiffre 7, un chiffre 8 et un chiffre 9. (Étant donné un nombre impair, le plus petit nombre qu'on peut soustraire pour qu'il devienne pair est 1.) Chaque chiffre de 0 à 9 paraîtrait alors un nombre pair de fois. En tout, on aurait enlevé 9 chiffres du nombre x.
Si on voulait créer un palindrome P formé d'un nombre impair des chiffres de x, il faudrait réduire le nombre de fois que certains des chiffres de x paraissent de manière que chacun des chiffres, sauf un, paraisse un nombre pair de fois. Pour le faire en enlevant le plus petit nombre de chiffres possible, il faudrait enlever un de chacun des chiffres 0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8 et 9, sauf un. (Par exemple, supposons qu'on n'enlève pas un 9.) Chacun des autres chiffres paraîtrait un nombre pair de fois et le 9 paraîtrait un nombre impair de fois (soit 3 fois). En tout, on aurait enlevé 8 chiffres du nombre x.
Donc, le plus petit nombre de chiffres qu'il faudrait enlever du nombre x de manière que les chiffres qui restent puissent être déplacés pour former un palindrome est 8.

(b) D'après le tableau précédent, la somme des chiffres de x est égale à :

$$3(0) + 13(1) + 13(2) + 4(3) + 3(5) + 3(6) + 3(7) + 3(8) + 3(9) = 168$$

Pour obtenir une somme de 130, il faut enlever des chiffres dont la somme est égale à $168 - 130$, ou 38.
Or, on veut enlever le plus petit nombre de chiffres qui ont une somme de 38.
Pour réussir, il faut enlever les plus grands chiffres en premier.
En enlevant les trois 9, on enlève une somme de 27.
En enlevant aussi un 8, on enlève une somme de 35.
On peut enlever une somme de 38 en enlevant ensuite un 3.
On a donc enlevé 5 chiffres.
Il est impossible d'enlever 4 chiffres ou moins qui ont une somme de 38, puisque la somme maximale de 4 chiffres est égale à 4(9), ou 36.
Donc, le plus petit nombre de chiffres qu'il faudrait enlever est 5.

(c) Le tableau suivant indique le nombre de fois que les chiffres paraissent dans y :

Chiffre	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nombre de fois	5	15	15	15	15	6	5	5	5	5

On peut déterminer la somme des chiffres en procédant comme dans la partie (a) ou en remarquant que la plupart des chiffres paraissent un nombre de fois qui est un multiple de 5 et en procédant comme suit :

$$5(0+1+2+3+4+5+6+7+8+9)+10(1+2+3+4)+5=330$$

On veut enlever du nombre y des chiffres qui ont une somme de $330-210$, ou 120, de manière que les chiffres qui restent, sauf un, paraissent un nombre pair de fois.
On commence par enlever chacun des chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8 et 9 une fois de manière que chaque chiffre paraisse un nombre pair de fois. À la toute fin, on ajoutera un chiffre de manière que ce chiffre paraisse un nombre impair de fois. Voici les chiffres qui restent :

Chiffre	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nombre de fois	4	14	14	14	14	6	4	4	4	4

Ces chiffres ont une somme de 290.
On enlève maintenant des chiffres deux par deux, de manière à enlever le plus petit *nombre* de chiffres pour que la somme des chiffres qui restent soit inférieure ou égale à 210.
On enlève donc les grands chiffres en premier. Si on enlève les quatre 8 et les quatre 9, il reste :

Chiffre	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nombre de fois	4	14	14	14	14	6	4	4	0	0

Les chiffres qui restent ont une somme de 222.
Il faut enlever au moins deux autres chiffres pour que la somme des chiffres qui restent soit inférieure ou égale à 210. (Il faut enlever une somme d'au moins 12, ce qui correspond à enlever plus d'un chiffre.)
On peut le faire, par exemple, en enlevant deux 6. Il reste :

Chiffre	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nombre de fois	4	14	14	14	14	6	2	4	0	0

On peut ensuite remettre un chiffre 0, tout en maintenant une somme de 210.
Le nombre de chiffres enlevés est donc égal à $9+4+4+2-1$, ou 18.
Il s'agit bien du plus petit nombre de chiffres qu'il faut enlever, puisqu'on a enlevé le plus petit nombre de chiffres de manière à pouvoir former un palindrome ayant un nombre pair de chiffres, puis on a rajouté un chiffre.