Concours canadien de mathématiques
Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique
Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Fermat 2008

(11^{e} année – Secondaire V)

le mardi 19 février 2008

Solutions

1. On a : $\dfrac{1^2+2^2+3^2+4^2}{1\times 2\times 3} = \dfrac{1+4+9+16}{6} = \dfrac{30}{6} = 5$

Réponse : (D)

2. *Solution 1*
On a : $6\left(\frac{3}{2}+\frac{2}{3}\right) = 6\left(\frac{3}{2}\right) + 6\left(\frac{2}{3}\right) = 9+4 = 13$

Solution 2
On simplifie d'abord le contenu entre parenthèses : $6\left(\frac{3}{2}+\frac{2}{3}\right) = 6\left(\frac{9}{6}+\frac{4}{6}\right) = 6\left(\frac{13}{6}\right) = 13$

Réponse : (A)

3. Puisque $1+2+3+4+5+x = 21+22+23+24+25$, alors :

$$x = 21-1+22-2+23-3+24-4+25-5 = 5(20) = 100$$

Réponse : (C)

4. Puisque le camion vide pèse 9600 kg et que le camion chargé pèse 38 000 kg, le poids total des 40 caisses est de (38 000 − 9600) kg, ou 28 400 kg.
Puisque 40 caisses identiques pèsent 28 400 kg, chacune pèse 28 400 kg ÷ 40, ou 710 kg.

Réponse : (E)

5. Puisque $\dfrac{18}{\sqrt{x}} = 2$, alors $\sqrt{x} = 9$, car le nombre par lequel il faut diviser 18 pour obtenir 2 est 9.
Puisque $\sqrt{x} = 9$, alors $x = 9^2$, ou $x = 81$.

Réponse : (A)

6. Puisque $RQ = RS$, alors $\angle RSQ = \angle RQS$.
Dans le triangle QRS, $\angle RQS + \angle QRS + \angle RSQ = 180^\circ$, ou $2(\angle RQS) + 60^\circ = 180^\circ$.
Donc $\angle RQS = \frac{1}{2}(180^\circ - 60^\circ)$, ou $\angle RQS = 60^\circ$.
Puisque $PQ = PS$, alors $\angle PSQ = \angle PQS$.
Dans le triangle QPS, $\angle PQS + \angle QPS + \angle PSQ = 180^\circ$, ou $2(\angle PQS) + 30^\circ = 180^\circ$.
Donc $\angle PQS = \frac{1}{2}(180^\circ - 30^\circ)$, ou $\angle PQS = 75^\circ$.
Donc $\angle PQR = \angle PQS - \angle RQS$, d'où $\angle PQR = 75^\circ - 60^\circ$, ou $\angle PQR = 15^\circ$.

Réponse : (E)

7. *Solution 1*
Puisque p est impair et que q est pair, alors $3p$ est impair (il est le produit de deux nombres impairs) et $2q$ est pair (il est le produit de deux nombres pairs).
Donc $3p+2q$ est impair (il est la somme d'un nombre impair et d'un nombre pair).
(Puisqu'on a trouvé une réponse, il n'est pas nécessaire de vérifier les autres choix. On pourrait cependant vérifier que les autres choix sont pairs.)

Solution 2
On peut choisir des valeurs particulières de p et de q, puisque le problème implique que le résultat est vrai peu importe les valeurs choisies de p et de q.
On vérifie les cinq choix de réponse avec $p = 1$ et $q = 2$ (p est impair et q est pair).
On a $2p+3q = 8$, $3p+2q = 7$, $4p+q = 6$, $2(p+3q) = 14$ et $pq = 2$.
Le seul choix impair est $3p+2q$.

Réponse : (B)

8. *Solution 1*

L'énoncé du problème laisse entendre que la valeur de $a+b+c+d+e+f$ est la même, peu importe les nombres abc et def choisis qui vérifient les conditions données.
Voici un exemple qui vérifie les conditions données : $889+111=1000$
On a alors $a+b+c+d+e+f=8+8+9+1+1+1=28$, ce qui doit être la valeur constante.

Solution 2

On considère l'addition, colonne par colonne, en commençant par la colonne des unités.
Puisque $c+f$ se termine par un 0, alors $c+f=0$ ou $c+f=10$. (L'expression $c+f$ ne peut avoir une valeur supérieure ou égale à 20, puisque c et f prennent des valeurs de 1 à 9.)
Puisqu'aucun chiffre n'est égal à 0, on ne peut avoir $c+f=0+0$. Donc $c+f=10$. (Il y a donc une retenue de 1 dans la 2^e^ colonne.)
Puisque le chiffre des dizaines de la somme est égal à 0 et qu'il y a une retenue de 1, alors $b+e$ se termine par un 9. On a donc $b+e=9$. (Puisque b et e sont des chiffres, $b+e$ ne peut prendre une valeur de 19 ou plus.)
Dans la colonne des dizaines, on a $b+e=9$ plus la retenue de 1, ce qui donne le chiffre 0 dans la somme, ainsi qu'une retenue de 1 dans la colonne des centaines.
On utilise un argument semblable pour conclure que $a+d=9$.
Donc, $a+b+c+d+e+f=(a+d)+(b+e)+(c+f)=9+9+10=28$.

Réponse : (D)

9. *Solution 1*

Puisque $\frac{1}{5}$ équivaut à 20 %, alors Beshmi un total de 20 % + 42 %, ou 62 % de ses économies dans les compagnies X et Y. Elle place donc 100 % − 62 %, ou 38 % de ses économies dans la compagnie Z.
Puisque 42 % de ses économies correspond à 10 500 \$, alors 38 % devrait correspondre à un peu moins, soit 9500 \$.

Solution 2

Puisque $\frac{1}{5}$ équivaut à 20 %, alors Beshmi un total de 20 % + 42 %, ou 62 % de ses économies dans les compagnies X et Y. Elle place donc 100 % − 62 %, ou 38 % de ses économies dans la compagnie Z.
Puisque 42 % de ses économies correspond à 10 500 \$, alors 1 % correspond à 10 500 \$ ÷ 42, soit 250 \$. Donc, 38 % correspond à 38 × 1 %, soit 38 × 250 \$, ou 9500 \$. Elle place donc 9500 \$ dans la compagnie Z.

Réponse : (D)

10. Le sommet inférieur gauche du triangle a pour coordonnées $(0,0)$, puisque la droite d'équation $y=x$ (celle qui a une pente positive) passe par l'origine.
Le sommet inférieur droit du triangle est le point où la droite d'équation $y=-2x+3$ coupe l'axe des abscisses. On pose $y=0$ pour obtenir $-2x+3=0$, ou $x=\frac{3}{2}$. Ce sommet a donc pour coordonnées $\left(\frac{3}{2},0\right)$.
Le sommet supérieur du triangle est le point d'intersection des deux droites. On l'obtient en comparant les y des deux équations. On obtient $x=-2x+3$, d'où $3x=3$, ou $x=1$.
Ce sommet a donc pour coordonnées $(1,1)$.
Le triangle a donc une base horizontale de $\frac{3}{2}$ et une hauteur correspondante de 1 (l'ordonnée du sommet supérieur).
L'aire du triangle est donc égale à $\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)(1)$, ou $\frac{3}{4}$.

Réponse : (A)

11. Puisque $\dfrac{1}{x} = 2$, on a $x = \frac{1}{2}$ et l'équation $\dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{y} = 3$ devient $2 + \dfrac{3}{y} = 3$, ou $\dfrac{3}{y} = 1$. Donc $y = 3$.
Donc $x + y = \frac{1}{2} + 3$, ou $x + y = \frac{7}{2}$.

Réponse : (D)

12. Puisque Siobhan a une moyenne de 66 sur ses sept épreuves, la somme des sept notes est égale à 7×66, ou 462.
On a donc $69 + 53 + 69 + 71 + 78 + x + y = 462$, d'où $340 + x + y = 462$, ou $x + y = 122$.
Puisque la valeur de $x + y$ est constante, la valeur de x est un minimum lorsque celle de y est un maximum. Donc $y = 100$.
La plus petite valeur possible de x est donc $122 - 100$, ou 22.

Réponse : (A)

13. Puisque P et Q sont les centres de deux cercles tangents, le segment PQ passe par le point de contact de ces cercles. Donc, la longueur PQ est la somme des rayons de ces cercles. Donc $PQ = 3 + 2$, ou $PQ = 5$.
De même, $PR = 3 + 1$ et $QR = 2 + 1$, c'est-à-dire que $PR = 4$ et $QR = 3$.
Le triangle PQR a des côtés de longueurs 3, 4 et 5. Il est rectangle, puisque $3^2 + 4^2 = 5^2$.
Puisque les côtés de longueurs 3 et 4 sont perpendiculaires, l'aire du triangle PQR est égale à $\frac{1}{2}(3)(4)$, ou 6.

Réponse : (B)

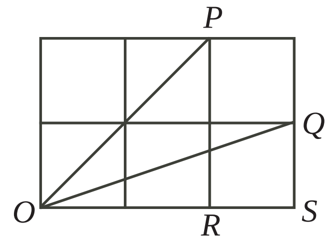
14. Le cercle de diamètre XZ a un rayon de 6, puisque $XZ = 12$. Son aire est égale à $\pi(6^2)$, ou 36π.
Le cercle de diamètre ZY a un rayon de 4, puisque $ZY = 8$. Son aire est égale à $\pi(4^2)$, ou 16π.
Donc, l'aire de la région non ombrée est égale à $36\pi + 16\pi$, ou 52π.
Puisque XZY est un segment de droite, alors $XY = XZ + ZY$, d'où $XY = 12 + 8$, ou $XY = 20$.
Le cercle de diamètre XY a donc un rayon de 10. Son aire est égale à $\pi(10^2)$, ou 100π.
L'aire de la région ombrée est égale à celle du cercle de diamètre XY moins l'aire de la région non ombrée, soit $100\pi - 52\pi$, ou 48π.
Donc, le rapport de l'aire de la région ombrée à l'aire de la région non ombrée est égal à $48\pi : 52\pi$, soit $48 : 52$, ou $12 : 13$.

Réponse : (B)

15. Puisque Brigitte parcourt le 2e tour de piste à $\frac{9}{10}$ de la vitesse d'Alice, elle met $\frac{10}{9}$ du temps de celle-ci pour faire le tour, soit $\frac{10}{9}(72)$ secondes, ou 80 secondes.
(Si la piste a une longueur de d et si la vitesse d'Alice est de v, le temps qu'Alice met pour faire un tour de piste est égal à $t = \dfrac{d}{v}$; pour faire le 2e tour de piste, le temps que Brigitte met est égal à $\dfrac{d}{\frac{9}{10}v}$, soit $\dfrac{10}{9}\dfrac{d}{v}$, ou $\dfrac{10}{9}t$.)
De même, pour faire le 3e tour, Cécile met $\frac{3}{4}(80)$ secondes, ou 60 secondes. Pour faire le 4e tour, Diane met $\frac{5}{6}(60)$ secondes, ou 50 secondes.
Pour la course au complet, elles ont mis $72 + 80 + 60 + 50$ secondes, soit 262 secondes, ou 4 minutes et 22 secondes.

Réponse : (B)

16. On nomme les points R et S comme dans la figure.



Puisque chaque petit carré a des côtés de longueur 2, alors $OR = RP = 2(2)$, ou $OR = RP = 4$.
De plus, $\angle ORP = 90°$.
Puisque le triangle ORP est isocèle et rectangle, $\angle ROP = 45°$.
Dans le triangle OSQ, on a $QS = 2$, $OS = 3(2)$, ou $OS = 6$, et $\angle OSQ = 90°$.
Donc $\tan(\angle QOS) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, d'où $\angle QOS \approx 18{,}43°$.
Donc $\angle POQ = \angle POR - \angle QOS$, d'où $\angle POQ \approx 45° - 18{,}43°$, ou $\angle POQ = 26{,}57°$. Au dixième de degré près, $\angle POQ = 26{,}6°$.

Réponse : (C)

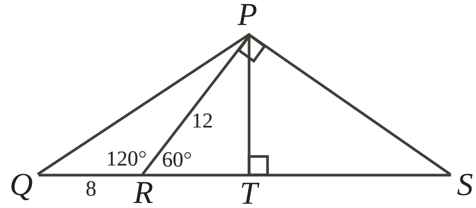
17. Soit x et $x + 1$ les deux entiers, puisqu'ils sont consécutifs.
Donc $(x+1)^2 - x^2 = 199$, c'est-à-dire $(x^2 + 2x + 1) - x^2 = 199$, d'où $2x + 1 = 199$, ou $x = 99$.
Donc, les deux entiers sont 99 et 100.
La somme des carrés de ces nombres est égale à $99^2 + 100^2$, ou $9801 + 10\,000$, ou $19\,801$.

Réponse : (A)

18. Puisque chaque terme, après le premier, est obtenu en ajoutant une même constante au terme précédent, la différence entre n'importe quels deux termes consécutifs est constante.
D'après les trois premiers termes, on a $2a - a = b - 2a$, ou $b = 3a$.
En fonction de a, les quatre premiers termes sont a, $2a$, $3a$ et $a-6-3a$, soit a, $2a$, $3a$ et $-6-2a$.
Puisque la différence constante (appelée *raison*) entre les trois premiers termes est égale à a (puisque $2a - a = a$ et $3a - 2a = a$), alors le 4e terme doit être égal à $4a$. Donc $4a = -6 - 2a$, d'où $6a = -6$, ou $a = -1$.
Les quatre premiers termes sont donc -1, -2, -3, -4.
Le 100e terme est donc égal à -100 (ce qui semble évident ; on peut aussi dire qu'on l'obtient en ajoutant 99 fois (-1) au premier terme pour obtenir $-1 + 99(-1)$, ou -100).

Réponse : (A)

19. Puisque $\angle QRP = 120°$ et que QRS est un segment de droite, alors $\angle PRS = 180° - 120°$, ou $\angle PRS = 60°$.
Puisque $\angle RPS = 90°$, alors le triangle SRP est un triangle remarquable 30°-60°-90°.
Donc $RS = 2PR$, d'où $RS = 2(12)$, ou $RS = 24$.
Au point P, on abaisse une perpendiculaire PT à RS.

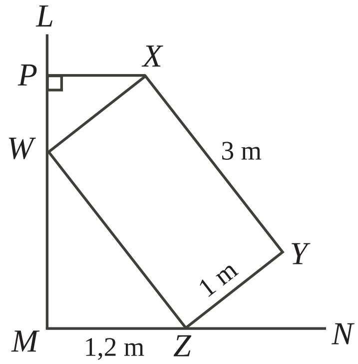


Puisque $\angle PRT = 60°$ et $\angle PTR = 90°$, alors le triangle PRT est aussi un triangle remarquable 30°-60°-90°. Donc $PT = \frac{\sqrt{3}}{2}PR$, ou $PT = 6\sqrt{3}$.

On considère le triangle QPS. QS est une base et PT est sa hauteur correspondante.
Son aire est donc égale à $\frac{1}{2}(6\sqrt{3})(8+24)$, ou $96\sqrt{3}$.

Réponse : (E)

20. Au point X, on abaisse une perpendiculaire XP à LM.



Puisque $\angle XPM = \angle PMN = 90°$, alors PX est parallèle à MN. La distance du point X au segment MN est égale à la longueur PM.
Puisque $WXYZ$ est un rectangle, alors $WZ = XY = 3$ m et $WX = ZY = 1$ m.
D'après le théorème de Pythagore, $WM = \sqrt{WZ^2 - MZ^2}$, d'où $WM = \sqrt{3^2 - 1{,}2^2}$, ou $WM = \sqrt{7{,}56}$ m.
PWM est un segment de droite et $\angle XWZ = 90°$. Donc $\angle PWX + \angle XWZ + \angle ZWM = 180°$, d'où $\angle PWX + \angle ZWM = 180° - 90° = 90°$.
Or, puisque le triangle XPW est rectangle, alors :

$$\angle PXW = 90° - \angle PWX = 90° - (90° - \angle ZWM) = \angle ZWM$$

Donc, les triangles XPW et WMZ sont semblables.
Donc $\dfrac{PW}{MZ} = \dfrac{XW}{WZ}$, d'où $PW = \dfrac{MZ(XW)}{WZ}$, ou $PW = \dfrac{1{,}2(1)}{3}$, ou $PW = 0{,}4$ m.
Donc $PM = PW + WM$, d'où $PM = 0{,}4 + \sqrt{7{,}56}$, ou $PM \approx 3{,}1495$ m. Au centième de mètre près, $PM \approx 3{,}15$ m.

Réponse : (C)

21. L'expression compte 52 termes, soit le nombre 1, le nombre 11 et les 50 nombres qui commencent et se terminent par un 1, avec de 1 à 50 zéros entre eux. Le dernier nombre a donc 52 chiffres (50 zéros et 2 uns).
La somme des chiffres des unités des 52 nombres est égale à 52. Le chiffre des unités de N est donc un 2 et il y a une retenue de 5 reportée à la colonne des dizaines.
Dans la colonne des dizaines, il y a un seul 1 (qui provient de 11), les autres chiffres étant 0. À cause de la retenue, le chiffre des dizaines de N est donc égal à $1+5$, ou 6.
Dans chacune des autres positions des nombres qu'il faut additionner, il n'y a qu'un chiffre 1, les autres étant 0. Donc, dans ces mêmes positions, le chiffre de N est aussi un 1. (Il n'y a aucune retenue.)
Donc $N = 11\cdots1162$, N contenant $(52-2)$ fois, ou 50 fois le chiffre 1.
La somme des chiffres de N est donc égale à $50(1) + 6 + 2$, ou 58.

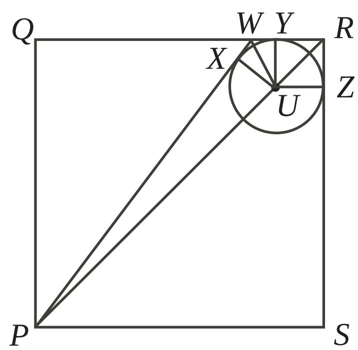
Réponse : (A)

22. Les paraboles d'équations $y = -\frac{1}{8}x^2 + 4$ et $y = x^2 - k$ se coupent aux endroits où x vérifie l'équation $-\frac{1}{8}x^2 + 4 = x^2 - k$, ou $\frac{9}{8}x^2 = 4 + k$.

Puisque $x^2 \geq 0$, alors $4 + k \geq 0$, d'où $k \geq -4$.
(Il s'agit de la condition pour que les courbes admettent au moins un point d'intersection.)
On veut aussi que les paraboles se coupent sur l'axe des abscisses ou au-dessus de cet axe.
Donc $y \geq 0$. Puisqu'on sait que $\frac{9}{8}x^2 = 4 + k$, alors $x^2 = \frac{8}{9}(4 + k)$.
Donc, aux points d'intersection, on a $y = x^2 - k$, d'où $y = \frac{8}{9}(4 + k) - k$, ou $y = \frac{32}{9} - \frac{1}{9}k$.
Or, on veut que $y \geq 0$. Donc $\frac{32}{9} - \frac{1}{9}k \geq 0$, d'où $k \leq 32$.
Donc, les paraboles se coupent sur l'axe des abscisses ou au-dessus de cet axe si $-4 \leq k \leq 32$.
Le nombre de valeurs entières de k, dans cet intervalle, est égal à $32 - (-4) + 1$, ou 37.

Réponse : (E)

23. Dans cette solution, les unités (soit les mètres) sont laissées de côté jusqu'à la fin.
Puisque le carré $PQRS$ a des côtés de longueur 4, sa diagonale PR a une longueur de $4\sqrt{2}$.
Puisque $PR = 4UR$, alors $PU = \frac{3}{4}PR$ et $UR = \frac{1}{4}PR$. Donc $PU = \frac{3}{4}(4\sqrt{2})$, ou $PU = 3\sqrt{2}$, et $UR = \sqrt{2}$.
Soit X, Y et Z les points de contact respectifs du cercle et des segments PW, WR et RS.



Puisque RS est tangent au cercle au point Z, alors $\angle UZR = 90°$.
Puisque $\angle PRS = 45°$ (puisque PR est la diagonale du carré), alors le triangle UZR est isocèle et rectangle.
Donc $UZ = \frac{1}{\sqrt{2}}UR$, d'où $UZ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2})$, ou $UZ = 1$. Le cercle a donc un rayon de 1.
Donc $UY = UX = UZ = 1$.
Puisque PW est tangent au cercle au point X, alors $\angle PXU = 90°$.
D'après le théorème de Pythagore, $PX = \sqrt{PU^2 - UX^2}$, d'où $PX = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 - 1^2}$, ou $PX = \sqrt{17}$.
De plus, $\sin(\angle UPX) = \dfrac{UX}{UP}$, d'où $\sin(\angle UPX) = \frac{1}{3\sqrt{2}}$. Donc $\angle UPX \approx 13{,}63°$.
On connaît la longueur de PX. Donc pour déterminer la longueur de PW, il faut déterminer celle de XW.
Puisque WX et WY sont des tangentes au cercle issues d'un même point W, alors $WX = WY$.
Donc, les triangles UWX et UWY sont congruents. Donc $\angle UWX = \angle UWY$.
Dans le triangle PWR, on a :

$$\begin{aligned}
\angle WPR + \angle PWR + \angle WRP &= 180° \\
2(\angle UWX) &\approx 180° - 45° - 13{,}63° \\
2(\angle UWX) &\approx 121{,}37° \\
\angle UWX &\approx 60{,}68°
\end{aligned}$$

Dans le triangle UWX, $\tan(\angle UWX) = \dfrac{UX}{XW}$, d'où $XW \approx \dfrac{1}{\tan(60{,}68°)}$, ou $XW \approx 0{,}5616$.

Donc $PW = PX + XW$, d'où $PW \approx \sqrt{17} + 0{,}562$, ou $PW \approx 4{,}6847$ m.
Au millième de mètre près, $PW \approx 4{,}685$ m.

Réponse : (C)

24. On suppose d'abord que $a \le b \le c$. On considérera les autres cas à la fin.
Puisque a, b et c sont des entiers positifs non nuls (ils paraissent au dénominateur), alors $a \ge 1$.
Est-ce que $a = 1$ est possible ? Si $a = 1$, alors $\frac{1}{a} = 1$, d'où $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = -\frac{1}{4}$, ce qui est impossible, puisque b et c sont positifs. Donc $a > 1$.
Puisque $a \le b \le c$, alors $\frac{1}{a} \ge \frac{1}{b} \ge \frac{1}{c}$. Donc $\frac{3}{a} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a} \ge \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{3}{4}$, d'où $a \le 4$.
Donc $a = 2$, 3 ou 4.

Si $a = 4$, alors $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}$, ou $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2}$.
Puisque $b \le c$, alors $\frac{1}{b} \ge \frac{1}{c}$. Donc $\frac{1}{b} \ge \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$, d'où $b \le 4$.
Or, puisque $a \le b$, alors $b \ge 4$. Donc $b = 4$.

Si $a = 3$, alors $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{3}{4} - \frac{1}{3}$, ou $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{5}{12}$.
Puisque $b \le c$, alors $\frac{1}{b} \ge \frac{1}{c}$. Donc $\frac{1}{b} \ge \frac{1}{2}\left(\frac{5}{12}\right) = \frac{5}{24}$, d'où $b \le \frac{24}{5}$.
Donc $b \le 4$, puisque b est un entier.
Puisque $a \le b$, alors $b \ge 3$, d'où $b = 3$ ou $b = 4$.

Si $a = 2$, alors $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}$, ou $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{4}$.
Puisque $b \le c$, alors $\frac{1}{b} \ge \frac{1}{c}$, d'où $\frac{1}{b} \ge \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}$. Donc $b \le 8$.
Or $\frac{1}{b} < \frac{1}{4}$ (puisque $c > 0$). Donc $b > 4$.
Donc $b = 5$, 6, 7 ou 8.

On place les valeurs possibles dans un tableau.

a	$\frac{1}{b} + \frac{1}{c}$	b	$\frac{1}{c}$	c
4	$\frac{1}{2}$	4	$\frac{1}{4}$	4
3	$\frac{5}{12}$	3	$\frac{1}{12}$	12
3	$\frac{5}{12}$	4	$\frac{1}{6}$	6
2	$\frac{1}{4}$	5	$\frac{1}{20}$	20
2	$\frac{1}{4}$	6	$\frac{1}{12}$	12
2	$\frac{1}{4}$	7	$\frac{3}{28}$	$\frac{28}{3}$
2	$\frac{1}{4}$	8	$\frac{1}{8}$	8

Les triplets qui vérifient $a \le b \le c$ sont $(4,4,4)$, $(3,3,12)$, $(3,4,6)$, $(2,5,20)$, $(2,6,12)$ et $(2,8,8)$.
Si on retire la condition $a \le b \le c$, on voit que n'importe quelle permutation des éléments de ces triplets vérifie aussi l'équation donnée.
Un triplet de la forme (x,x,x) admet une seule permutation.
Un triplet de la forme (x,x,y) $(x \ne y)$ admet 3 permutations (les deux autres étant (x,y,x) et (y,x,x)).

Un triplet de la forme (x, y, z) (trois nombres différents) admet 6 permutations. (On suggère de les écrire.)
Si on fait subir toutes les permutations possibles aux six solutions ci-dessus, le nombre de solutions est égal à $1 + 3 + 6 + 6 + 6 + 3$, ou 25.

Réponse : (B)

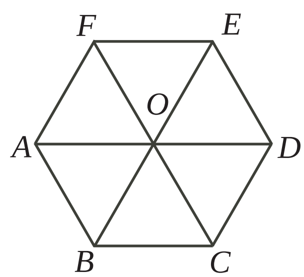
25. On considère d'abord quelques propriétés dont certaines sont connues de façon intuitive.
On considère la base $ABCDEF$ du deuxième solide. Il s'agit d'un hexagone régulier. Ses côtés sont congrus et ses angles intérieurs mesurent 120°. (La somme de la mesure des angles intérieurs d'un polygone de n côtés est égale à $(n-2)180°$. Lorsque $n = 6$, elle est égale à 720°, ou 6(120°).)
Soit O le centre de l'hexagone.
On joint chaque sommet à O.

Propriété 1 : Les 6 triangles formés sont équilatéraux.

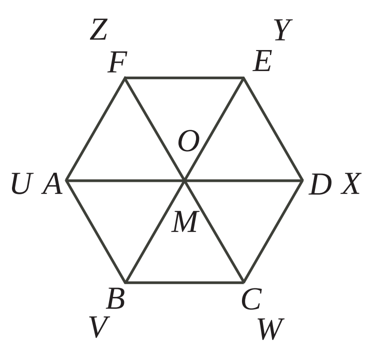
Par symétrie, chacun des segments AO, BO, ..., FO est la bissectrice de l'angle au sommet, ce qui crée deux angles de 60°. Chacun des triangles formés a deux angles de 60° ; le troisième angle doit donc mesurer 60° et le triangle est donc équilatéral. Les segments formés et les côtés de l'hexagone ont donc tous la même longueur.

Propriété 2 : AOD, BOE et COF sont des segments parallèles à des côtés de l'hexagone.

Chacun des six angles en O mesure 60°. Donc, trois de ces angles forment un angle de 180°. Donc AOD, BOE et COF sont des segments de droites. Ils sont respectivement parallèles aux côtés BC et EF, CD et FA, DE et AB. On peut le vérifier en considérant les angles alternes-internes entre les segments parallèles. Par exemple, puisque $\angle AOF = \angle OFE = 60°$, alors FE et AOD sont parallèles.



On considère la face supérieure $UVWXYZ$ du deuxième solide.
Soit M le point de cette face qui est situé directement au-dessus du point O.
Soit $s = AU + BV + CW + DX + EY + FZ$.
Soit $h(U)$ la hauteur de U au-dessus de A, $h(V)$ la hauteur de V au-dessus de B, et ainsi de suite. Donc $h(U) = AU$, $h(V) = BV$, et ainsi de suite.



Propriété 3 : $h(V) - h(U) = h(X) - h(Y)$

On remarque que les segments UV et YX sont situés directement au-dessus des segments AB et ED, et ainsi de suite.
Puisque AB et ED sont parallèles et congrus, alors $h(V) - h(U) = h(X) - h(Y)$. En effet, les faces $ABVU$ et $EDXY$ sont parallèles et de même largeur. Puisque les arêtes UV et YX ont été formées par la même tranche, elles sont parallèles et elles ont donc la même pente dans leur plan vertical. Puisque le changement horizontal est le même de U à V et de Y à X, le changement vertical doit aussi être le même.

Puisque AO et BC sont parallèles et congrus, alors $h(M) - h(U) = h(W) - h(V)$. D'autres telles égalités existent aussi.

Propriété 4 : $h(M) = \frac{1}{2}(h(U) + h(X))$

On sait que AO et OD sont parallèles et congrus.
Donc $h(M) - h(U) = h(X) - h(M)$, d'où $h(M) = \frac{1}{2}(h(U) + h(X))$.

De même, $h(M) = \frac{1}{2}(h(V) + h(Y)) = \frac{1}{2}(h(W) + h(Z))$.

Propriété 5 : $s = 6h(M)$

On additionne ces trois dernières équations, membre par membre :

$$3h(M) = \frac{1}{2}(h(U) + h(V) + h(W) + h(X) + h(Y) + h(Z))$$

Donc $s = 2(3h(M))$, ou $s = 6h(M)$.

Si on peut déterminer $h(M)$, on peut obtenir la somme des longueurs des arêtes verticales.

On peut maintenant résoudre le problème. On doit considérer un nombre de cas. Puisqu'on peut faire subir une rotation au solide, il suffit de considérer les positions relatives des longueurs connues.

1$^{\text{er}}$ cas : $h(U) = 7$, $h(V) = 4$, $h(W) = 10$

Puisque AB et OC sont parallèles et congrus, alors $h(M) - h(W) = h(U) - h(V) = 3$, d'où $h(M) = 10 + 3$, ou $h(M) = 13$. Donc $s = 6h(M)$, d'où $s = 6(13)$, ou $s = 78$.
On verra qu'il s'agit de la valeur maximale de s.

2$^{\text{e}}$ cas : Deux des nombres 4, 7 et 10 correspondent à des sommets opposés de $ABCDEF$.

Dans ce cas, $h(M)$ sera égal à la moyenne de deux des nombres 4, 7 et 10. Donc $h(M)$ est inférieur à 10, d'où $s = 6h(M) < 6(10) = 60$. On n'obtient donc pas une valeur maximale.

3$^{\text{e}}$ cas : Les hauteurs de 4, 7 et 10 correspondent à trois sommets consécutifs de $ABCDEF$.

Pour éviter une répétition du 1$^{\text{e}}$ cas, on a $h(U) = 4$, $h(V) = 7$ et $h(W) = 10$, ou $h(U) = 4$, $h(V) = 10$ et $h(W) = 7$.
D'après l'analyse du 1$^{\text{er}}$ cas, $h(M) = h(U) + h(W) - h(V)$.
On a donc $h(M) = 7$ ou $h(M) = 1$, d'où $s = 42$ ou $s = 6$. Aucune de ces valeurs n'est maximale.

4$^{\text{e}}$ cas : Les hauteurs de 4, 7 ou 10 correspondent à trois sommets alternatifs de $ABCDEF$.

Soit $h(U) = 4$, $h(W) = 7$ et $h(Y) = 10$. (Il n'y a aucune autre configuration à considérer.)
Soit $h(M) = x$.
Puisque $h(M)$ est égal à la moyenne des hauteurs au-dessus de sommets opposés, alors $h(V) = 2h(M) - h(Y)$, d'où $h(V) = 2x - 10$.

Puisque AB et OC sont parallèles et congrus, alors $h(V) - h(U) = h(W) - h(M)$, c'est-à-dire que $2x - 10 - 4 = 7 - x$, d'où $3x = 21$, ou $x = 7$.
Donc $s = 6h(M)$, d'où $s = 6x$, ou $s = 42$.

Puisqu'on a pris tous les cas en considération, on peut conclure que la valeur maximale de s est égale à 78.

Réponse : (D)