Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Euclide 2008

le mardi 15 avril 2008

Solutions

1. (a) *Solution 1*

D'après le théorème de Pythagore dans le triangle ADB :

$$AB^2 = BD^2 + DA^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225$$

Donc $AB = \sqrt{225} = 15$, puisque $AB > 0$.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle ADC :

$$DC^2 = CA^2 - AD^2 = 20^2 - 12^2 = 400 - 144 = 256$$

Donc $DC = \sqrt{256} = 16$, puisque $AD > 0$.
Le périmètre du triangle ABC est égal à :

$$AB + BC + CA = AB + (BD + DC) + CA = 15 + (9 + 16) + 20 = 60$$

Solution 2

Puisque $BD : DA = 9 : 12 = 3 : 4$ et que le triangle BDA est rectangle en B, alors le triangle ADB est semblable à un triangle 3-4-5. Donc $AB = \frac{5}{3}BD$, ou $AB = 15$.
Puisque $CA : DA = 20 : 12 = 5 : 3$ et que le triangle ADC est rectangle en D, alors le triangle ADC est semblable à un triangle 3-4-5. Donc $DC = \frac{4}{5}CA$, ou $DC = 16$.
Donc, le périmètre du triangle ABC est égal à :

$$AB + BC + CA = AB + (BD + DC) + CA = 15 + (9 + 16) + 20 = 60$$

(b) *Solution 1*

Puisque $P(5, 4)$ est le milieu du segment qui joint les points $A(a, 0)$ et $B(8, b)$, alors 5 est égal à la moyenne des abscisses de A et de B et 4 est égal à la moyenne des ordonnées de A et de B.
Donc $5 = \frac{1}{2}(a + 8)$, d'où $10 = a + 8$, ou $a = 2$.
De plus, $4 = \frac{1}{2}(0 + b)$, d'où $8 = 0 + b$, ou $b = 8$.
Donc $a = 2$ et $b = 8$.

Solution 2

$P(5, 4)$ est le milieu du segment qui joint les points $A(a, 0)$ et $B(8, b)$.
Pour se rendre de A à P, il faut se déplacer de 4 unités vers le haut (et d'une certaine distance vers la droite). Il faut donc faire de même pour se déplacer de P à B. L'ordonnée de B est donc égale à $4 + 4$, ou 8. Donc $b = 8$.
Pour se rendre de P à B, il faut se déplacer de 3 unités vers la droite (et de 4 unités vers le haut). Il faut donc faire de même pour se déplacer de A à P. L'abscisse de A est donc égale à $5 - 3$, ou 2. Donc $a = 2$.
Donc $a = 2$ et $b = 8$.

(c) Puisque la droite d'équation $ax + y = 30$ passe au point $(6, 12)$, alors $6a + 12 = 30$, d'où $6a = 18$, ou $a = 3$.
La deuxième droite a donc pour équation $x + 3y = k$. Puisqu'elle passe au point $(6, 12)$, alors $6 + 3(12) = k$, ou $k = 42$.

2. (a) *Solution 1*
Puisque le point $(c, 7)$ est situé sur la parabole, alors $7 = (c - 2)(c - 8) + 7$, d'où $(c - 2)(c - 8) = 0$.
Donc $c = 2$ ou $c = 8$. Puisque $c \neq 2$, alors $c = 8$.

Solution 2
La parabole a pour équation $y = (x - 2)(x - 8) + 7$, c'est-à-dire $y = x^2 - 10x + 16 + 7$, ou $y = x^2 - 10x + 23$.
On complète le carré :

$$y = x^2 - 10x + 25 - 25 + 23 = (x - 5)^2 - 2$$

Donc, l'axe de symétrie de la parabole a pour équation $x = 5$.
Puisque le point $(2, 7)$ est situé sur la parabole et qu'il se trouve à 3 unités à la gauche de l'axe de symétrie, alors le point $(5 + 3, 7)$, ou $(8, 7)$, est lui aussi situé sur la parabole.
Donc $c = 8$.

(b) *Solution 1*
Puisque les points $(2, 7)$ et $(8, 7)$ sont situés sur la parabole, l'axe de symétrie est situé à mi-chemin entre ces deux points. Il a donc pour équation $x = 5$.
Puisque le sommet de la parabole est situé sur l'axe de symétrie, il a pour abscisse 5.
Son ordonnée est égale à $y = (5 - 2)(5 - 8) + 7$, soit $y = -9 + 7$, ou $y = -2$.
Le sommet a donc pour coordonnées $(5, -2)$.

Solution 2
La parabole a pour équation $y = (x - 2)(x - 8) + 7$, c'est-à-dire $y = x^2 - 10x + 16 + 7$, ou $y = x^2 - 10x + 23$.
On complète le carré :

$$y = x^2 - 10x + 25 - 25 + 23 = (x - 5)^2 - 2$$

Le sommet a donc pour coordonnées $(5, -2)$.

(c) Puisque la droite passe par les points $A(5, 0)$ et $B(4, -1)$, sa pente est égale à $\dfrac{0 - (-1)}{5 - 4}$, soit $\frac{1}{1}$, ou 1.
L'équation de la droite est donc de la forme $y = x + b$.
Puisque le point $A(5, 0)$ est situé sur la droite, alors $0 = 5 + b$, ou $b = -5$. La droite a

donc pour équation $y = x - 5$.
Aux points où la droite coupe la parabole, on a :

$$\begin{aligned}
(x-2)(x-8)+7 &= x-5 \\
x^2-10x+16+7 &= x-5 \\
x^2-11x+28 &= 0 \\
(x-4)(x-7) &= 0
\end{aligned}$$

Donc $x = 4$ ou $x = 7$.
Or, on connaît déjà le point dont $x = 4$. On considère donc $x = 7$.
Pour déterminer l'ordonnée de ce point, il est plus facile d'utiliser l'équation de la droite que celle de la parabole. On a donc $y = 7 - 5$, ou $y = 2$.
Les coordonnées du deuxième point sont donc $(7, 2)$.

3. (a) *Solution 1*

Soit x le nombre au milieu du cadre.
Les deux autres nombres de la rangée du milieu sont donc $x - 1$ et $x + 1$.
Les deux autres nombres de la colonne de gauche sont $(x-1)-7$ et $(x-1)+7$, soit $x-8$ et $x + 6$, puisque les nombres d'une colonne augmentent de 7 à chaque ligne. Les deux autres nombres de la première rangée sont donc $x - 7$ et $x - 6$, tandis que les deux autres nombres de la troisième rangée sont $x + 7$ et $x + 8$.
Donc, la somme des nombres à l'intérieur du cadre est égale à
$x+x-1+x+1+x-8+x-7+x-6+x+6+x+7+x+8$, ou $9x$.
Donc, la somme des nombres à l'intérieur du cadre est 9 fois le nombre du milieu.
(On peut le vérifier en examinant l'exemple donné. On aurait pu voir, au départ, que la moyenne des nombres dans cadre est égale au nombre du milieu.)
Si la somme des nombres à l'intérieur du cadre est égale à 279, le nombre du milieu doit être égal à $\frac{1}{9}(279)$, ou 31. (On peut le vérifier en plaçant le cadre à cet endroit et en additionnant les nombres à l'intérieur du cadre.)

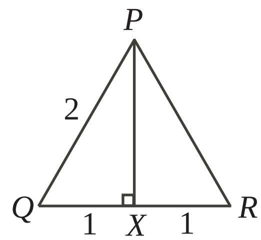
Solution 2

Si on place le cadre dans la position indiquée au départ et qu'on fait glisser le cadre d'une position vers la gauche, la somme des nombres dans le cadre est diminuée de 9, car chaque nombre est diminué de 1. De même, si on fait glisser le cadre d'une position vers la droite, la somme est augmentée de 9.
Si on fait glisser le cadre d'une position vers le bas, chaque nombre est augmenté de 7 et la somme est donc augmentée de 63. De même, si on fait glisser le cadre d'une position vers le haut, la somme est diminuée de 63.
Au départ, la somme des nombres dans le cadre est égale à 108. Pour obtenir une somme de 279, il faut l'augmenter de $279 - 108$, ou 171.

Or, $171 = 3(63) - 2(9)$. Donc, si on fait glisser le cadre de 3 positions vers le bas, puis de 2 positions vers la gauche, la somme sera augmentée de 171 et deviendra égale à 279.
Le nouveau nombre au milieu du cadre sera égal à $12 + 3(7) - 2$, ou 31.

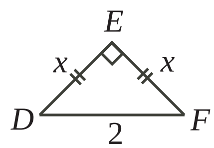
(b) Dans la Figure A, le cercle a un rayon de 1, puisqu'il a un diamètre de 2. Son aire est donc égale à $\pi(1)^2$, ou π, soit environ 3,14.

Dans la Figure B, le losange a une aire qui est égale à deux fois l'aire d'un triangle équilatéral dont les côtés ont une longueur de 2.
On considère un triangle équilatéral PQR dont les côtés ont une longueur de 2.
On trace une hauteur PX.
Puisque le triangle PQR est équilatéral, alors $QX = XR = \frac{1}{2}QR = 1$.



Puisque $\angle PQR = 60°$, le triangle PQX est un triangle remarquable 30°-60°-90°. Donc $PX = \sqrt{3}QX$, d'où $PX = \sqrt{3}(1)$, ou $PX = \sqrt{3}$.
L'aire du triangle PQR est donc égale à $\frac{1}{2}(2)(\sqrt{3})$, ou $\sqrt{3}$.
L'aire de la Figure B est donc égale à $2\sqrt{3}$, soit environ 3,46.

Dans la Figure C, le carré a une aire qui est égale à deux fois l'aire d'un triangle rectangle isocèle ayant une hypoténuse de longueur 2. Soit $DE = EF = x$.



Puisque le triangle est un triangle remarquable 45°-45°-90°, alors $x = \frac{1}{\sqrt{2}}(2)$, ou $x = \sqrt{2}$.
L'aire de ce triangle est égale à $\frac{1}{2}(\sqrt{2})(\sqrt{2})$, c'est-à-dire $\frac{1}{2}(2)$, ou 1.
Donc, la Figure C a une aire de 2.

Puisque $2 < \pi < 2\sqrt{3}$ (car $2 < 3{,}14 < 3{,}46$), la Figure C a la plus petite aire et la Figure B a la plus grande aire.

4. (a) Puisque $PF = 20$ m et $\angle PAF = 40°$, alors $\dfrac{PF}{AF} = \tan(40°)$, d'où $AF = \dfrac{20 \text{ m}}{\tan(40°)}$.

Puisque le point B est situé à mi-chemin entre A et F, alors $BF = \frac{1}{2}AF = \dfrac{10 \text{ m}}{\tan(40°)}$ et on a donc :

$$\tan(\angle FBP) = \frac{PF}{BF} = \frac{20 \text{ m}}{\left(\frac{10 \text{ m}}{\tan(40°)}\right)} = 2\tan(40°) \approx 1{,}678$$

Donc $\angle FBP \approx 59{,}21°$. Au degré près, l'angle FBP mesure 59°.

(b) D'après la loi du cosinus dans le triangle CBA :

$$\begin{aligned}
CA^2 &= CB^2 + BA^2 - 2(CB)(BA)\cos(\angle CBA) \\
CA^2 &= 16^2 + 21^2 - 2(16)(21)\cos(60^\circ) \\
CA^2 &= 256 + 441 - 2(16)(21)(\tfrac{1}{2}) \\
CA^2 &= 256 + 441 - (16)(21) \\
CA^2 &= 361 \\
CA &= \sqrt{361} = 19 \qquad \text{(puisque } CA > 0\text{)}
\end{aligned}$$

Dans le triangle CAD, $\angle CDA = 180^\circ - \angle DCA - \angle DAC$, d'où $\angle CDA = 180^\circ - 45^\circ - 30^\circ$, ou $\angle CDA = 105^\circ$.

D'après la loi des sinus dans le triangle CDA :

$$\begin{aligned}
\frac{CD}{\sin(\angle DAC)} &= \frac{CA}{\sin(\angle CDA)} \\
CD &= \frac{19\sin(30^\circ)}{\sin(105^\circ)} \\
CD &= \frac{19(\frac{1}{2})}{\sin(105^\circ)} \\
CD &= \frac{19}{2\sin(105^\circ)} \\
CD &\approx 9{,}835
\end{aligned}$$

Au dixième près, CD a une longueur de 9,8.

(On aurait pu utiliser

$$\begin{aligned}
\sin(105^\circ) &= \sin(60^\circ + 45^\circ) = \sin(60^\circ)\cos(45^\circ) + \cos(60^\circ)\sin(45^\circ) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

pour obtenir $CD = \dfrac{19}{2\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\right)} = \dfrac{19\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}$, puis calculer une valeur approximative de cette valeur exacte.)

5. (a) Au point C, on abaisse une perpendiculaire PC à AB. On a donc $CP = 12$.
Puisque le cercle de centre A est tangent au cercle de centre C, alors AC est égal à la somme des rayons de ces cercles. Donc $AC = 4 + 9$, ou $AC = 13$. De même, $BC = 13$.
Les triangles APC et BPC sont congruents (ce sont deux triangles rectangles avec un côté commun et dont les hypoténuses ont la même longueur). Donc $BP = AP$.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle APC :

$$AP^2 = AC^2 - PC^2 = 13^2 - 12^2 = 169 - 144 = 25$$

Donc $AP = 5$ (puisque $AP > 0$).
Donc $BP = AP = 5$ et $AB = 10$.
Puisque la puce met 5 secondes pour franchir une distance de 10, alors en 1 seconde, elle parcourt une distance de 2.

(b) Le sommet de la parabole est situé sur l'axe des abscisses si l'équation

$$kx^2 + (5k+3)x + (6k+5) = 0$$

admet deux racines réelles égales. Son discriminant doit donc être égal à 0. Donc :

$$\begin{aligned}(5k+3)^2 - 4k(6k+5) &= 0\\ 25k^2 + 30k + 9 - 24k^2 - 20k &= 0\\ k^2 + 10k + 9 &= 0\\ (k+1)(k+9) &= 0\end{aligned}$$

Donc $k = -1$ ou $k = -9$.

6. (a) Puisque $f(x) = f(x-1) + f(x+1)$, alors $f(x+1) = f(x) - f(x-1)$. On a donc :

$$\begin{aligned}f(1) &= 1\\ f(2) &= 3\\ f(3) &= f(2) - f(1) = 3 - 1 = 2\\ f(4) &= f(3) - f(2) = 2 - 3 = -1\\ f(5) &= f(4) - f(3) = -1 - 2 = -3\\ f(6) &= f(5) - f(4) = -3 - (-1) = -2\\ f(7) &= f(6) - f(5) = -2 - (-3) = 1 = f(1)\\ f(8) &= f(7) - f(6) = 1 - (-2) = 3 = f(2)\end{aligned}$$

Pour chaque entier n, la valeur de $f(n)$ dépend uniquement de la valeur de la fonction pour les deux entiers précédents, soit $f(n-1)$ et $f(n-2)$. Puisque $f(7) = f(1)$ et $f(8) = f(2)$, les valeurs de f sont cycliques et se répéteront en un cycle de longueur 6.
Puisque 2008 est 4 de plus qu'un multiple de 6 ($2008 = 4 + 2004 = 4 + 6(334)$), alors $f(2008) = f(2008 - 6(334))$, d'où $f(2008) = f(4)$, ou $f(2008) = -1$.

(b) Puisque a, b et c forment une suite arithmétique, alors $b - a = c - b$. Soit $d = b - a = c - b$.
Donc $a = b - d$ et $c = b + d$.
Puisque $a + b + c = 60$, alors $(b - d) + b + (b + d) = 60$, d'où $3b = 60$, ou $b = 20$.
Les nombres a, b, c deviennent donc $20 - d$, 20, $20 + d$.
(On aurait pu écrire les nombres a, b, c sous la forme a, $a + d$, $a + 2d$ et obtenir le même résultat.)

On a donc $a-2=20-d-2$ et $c+3=20+d+3$, c'est-à-dire $a-2=18-d$ et $c+3=23+d$. On peut donc écrire les nombres $a-2$, b, $c+3$ sous la forme $18-d$, 20, $23+d$.

Puisque ces trois nombres forment une suite géométrique, alors :

$$\begin{aligned}
\frac{20}{18-d} &= \frac{23+d}{20} \\
20^2 &= (23+d)(18-d) \\
400 &= -d^2-5d+414 \\
d^2+5d-14 &= 0 \\
(d+7)(d-2) &= 0
\end{aligned}$$

Donc $d=-7$ ou $d=2$.

Si $d=-7$, alors $a=27$, $b=20$ et $c=13$.

Si $d=2$, alors $a=18$, $b=20$ et $c=22$.

(On peut vérifier que dans chaque cas, les nombres $a-2, b, c+3$ forment une suite géométrique.)

7. (a) Puisque les trois multiples consécutifs de 3 ont une moyenne de a, alors le nombre du milieu est égal à a. Les trois multiples, dans l'ordre, sont $a-3, a, a+3$.

Puisque quatre multiples consécutifs de 4 ont une moyenne de $a+27$, alors le nombre $a+27$ est à mi-chemin entre les deuxième et troisième des quatre nombres. Puisqu'il y a une différence de 4 entre deux multiples consécutifs, alors le deuxième multiple est égal à $(a+27)-2$, ou $a+25$, et le troisième est égal à $(a+27)+2$, ou $a+29$. Les quatre multiples sont, dans l'ordre, $a+21$, $a+25$, $a+29$, $a+33$.

(Dans ces deux raisonnements, on a utilisé le fait que si une liste contient un nombre impair d'entiers, alors il y a un entier au milieu et si une liste contient un nombre pair d'entiers, alors le « milieu » de la liste se trouve entre deux des entiers de la liste.)

Le plus petit de ces sept entiers est $a-3$ et le plus grand est $a+33$.

La moyenne de ces deux entiers est égale à $\frac{1}{2}(a-3+a+33)$, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}(2a+30)$, ou $a+15$.

Puisque $a+15=42$, alors $a=27$.

(b) Supposons que Bruno enlève la boule numéro x de son sac et que Crystel enlève la boule numéro y de son sac.

Alors $b=1+2+3+4+5+6+7+8+9-x$, ou $b=45-x$.

De plus, $c=1+2+3+4+5+6+7+8+9-y$, ou $c=45-y$.

Donc $b-c=(45-x)-(45-y)$, d'où $b-c=y-x$.

Puisque $1\leq x\leq 9$ et $1\leq y\leq 9$, alors $-8\leq y-x\leq 8$.

(En effet, $y-x$ admet une valeur maximale lorsque y est à son maximum, soit $y=9$, et x est à son minimum, soit $x=1$, et on a alors $y-x\leq 9-1=8$. De même, $y-x\geq -8$.)

Puisque $b-c$, qui est égal à $y-x$, peut prendre des valeurs de -8 à 8, alors pour être un multiple de 4, il doit être égal à -8, -4, 0, 4 ou 8.

Bruno et Crystel enlèvent chacun une boule parmi les 9 boules de leur sac et la chaque boule a la même chance d'être choisie. La probabilité de choisir n'importe quelle boule en particulier est donc égale à $\frac{1}{9}$. La probabilité de choisir deux boules en particulier (une boule de chaque sac) est donc égale à $\frac{1}{9} \times \frac{1}{9}$, c'est-à-dire $\frac{1}{81}$.

Pour calculer la probabilité demandée, il faut compter le nombre de couples (x, y) tels que $y-x$ est égal à -8, -4, 0, 4 ou 8, et multiplier ce nombre par $\frac{1}{81}$.

<u>1^{re} méthode</u>

Si $y-x=-8$, alors (x, y) doit être égal à $(9,1)$.

Si $y-x=8$, alors (x, y) doit être égal à $(1,9)$.

Si $y-x=-4$, alors (x, y) peut être égal à $(5,1),(6,2),(7,3),(8,4),(9,5)$.

Si $y-x=4$, alors (x, y) peut être égal à $(1,5),(2,6),(3,7),(4,8),(5,9)$.

Si $y-x=0$, alors (x, y) peut être égal à $(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(7,7),(8,8)$, ou $(9,9)$.

Il y a donc 21 couples (x, y). La probabilité demandée est donc égale à $\frac{21}{81}$, ou $\frac{7}{27}$.

<u>2^e méthode</u>

Si $x=9$, alors $y-x$ est un multiple de 4 si y est égal à 9, 5 ou 1.

Si $x=8$, alors $y-x$ est un multiple de 4 si y est égal à 8 ou 4.

Si $x=7$, alors $y-x$ est un multiple de 4 si y est égal à 7 ou 3.

Si $x=6$, alors $y-x$ est un multiple de 4 si y est égal à 6 ou 2.

Si $x=5$, alors $y-x$ est un multiple de 4 si y est égal à 9, 5 ou 1.

Si $x=4$, alors $y-x$ est un multiple de 4 si y est égal à 8 ou 4.

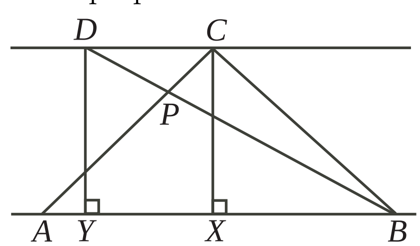
Si $x=3$, alors $y-x$ est un multiple de 4 si y est égal à 7 ou 3.

Si $x=2$, alors $y-x$ est un multiple de 4 si y est égal à 6 ou 2.

Si $x=1$, alors $y-x$ est un multiple de 4 si y est égal à 9, 5 ou 1.

Il y a donc 21 couples (x, y). La probabilité demandée est donc égale à $\frac{21}{81}$, ou $\frac{7}{27}$.

8. (a) Puisque $AC=CB$, le triangle ACB est isocèle et rectangle. Donc $\angle CAB=\angle CBA=45^{\circ}$. Aux points C et D, on abaisse des perpendiculaires CX et DY à AB.



Puisque le triangle ACB est isocèle, alors $AX=XB=\frac{1}{2}AB$, d'où $AX=XB=1$.

Puisque $\angle CAX=45^{\circ}$, alors le triangle AXC est isocèle et rectangle. Donc $CX=AX=1$.

Puisque AB est parallèle à DC, alors $DY=CX=1$.

On considère le triangle BDY. On sait que $\angle DYB=90^{\circ}$, $DB=2$ et $DY=1$.

Le triangle BDY est un triangle remarquable 30°-60°-90°, puisque la longueur d'une cathète et celle de l'hypoténuse ont un rapport de 1 : 2.
Donc $\angle DBY = 30°$, et $\angle DBC = \angle CBA - \angle DBY$, d'où $\angle DBC = 45° - 30°$, ou $\angle DBC = 15°$.

(b) *Solution 1*

Soit $AP = x$ et $QP = h$.
Puisque QP est parallèle à CB, alors QP est perpendiculaire à BA.
On considère le trapèze $CBPQ$. Il a des bases de longueurs 4 et h et une hauteur de 5. Son aire est donc égale à $\frac{1}{2}(4+h)(5)$. On peut aussi calculer l'aire du trapèze en additionnant l'aire du triangle CBR (qui est égale à $\frac{1}{2}(4)(3)$), celle du triangle CRQ (qui est égale à 5) et celle du triangle RPQ (qui est égale à $\frac{1}{2}(2)(h)$). Donc :

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}(4+h)(5) &= \tfrac{1}{2}(4)(3)+5+\tfrac{1}{2}(2)(h)\\ 20+5h &= 12+10+2h\\ 3h &= 2\\ h &= \tfrac{2}{3}\end{aligned}$$

Les triangles APQ et ABC sont semblables, puisqu'ils sont rectangles et qu'ils ont un angle commun en A. Donc :

$$\begin{aligned}\frac{AP}{PQ} &= \frac{AB}{BC}\\ (AP)(BC) &= (PQ)(AB)\\ 4x &= \tfrac{2}{3}(x+5)\\ 4x &= \tfrac{2}{3}x+\tfrac{10}{3}\\ \tfrac{10}{3}x &= \tfrac{10}{3}\\ x &= 1\end{aligned}$$

Donc $AP = x = 1$.

Solution 2

Soit $AP = x$ et $QP = h$.
Puisque QP est parallèle à CB, alors QP est perpendiculaire à BA.
Puisque le triangle ABC est rectangle en B, son aire est égale à $\frac{1}{2}(4)(5+x)$, ou $10+2x$.
Or, l'aire du triangle ABC est aussi égale à la somme de l'aire des quatre triangles qui le forment : le triangle CBR (qui a une aire de $\frac{1}{2}(4)(3)$), le triangle CRQ (qui a une aire de 5), le triangle QPR (qui a une aire de $\frac{1}{2}h(2)$) et le triangle QPA (qui a une aire de $\frac{1}{2}xh$).
Donc $10+2x = 6+5+h+\frac{1}{2}xh$, d'où $xh - 4x + 2h + 2 = 0$.

Les triangles APQ et ABC sont semblables, puisqu'ils sont rectangles et qu'ils ont un angle commun en A. Donc :

$$\begin{aligned}
\frac{AP}{PQ} &= \frac{AB}{BC} \\
(AP)(BC) &= (PQ)(AB) \\
x(4) &= h(x+5) \\
4x &= hx+5h \\
-5h &= hx-4x
\end{aligned}$$

On reporte $hx-4x=-5h$ dans l'équation $xh-4x+2h+2=0$ pour obtenir $-5h+2h+2=0$, d'où $3h=2$, ou $h=\frac{2}{3}$.
On reporte $h=\frac{2}{3}$ dans l'équation $-5h=hx-4x$: $-5(\frac{2}{3})=\frac{2}{3}x-4x$, d'où $-\frac{10}{3}=-\frac{10}{3}x$, ou $x=1$.
Donc $AP=x=1$.

9. (a) Le logarithme base 10 du membre de gauche de l'équation est égal au logarithme base 10 du membre de droite :

$$\begin{aligned}
\log_{10}(2^{x+2}5^{6-x}) &= \log_{10}(10^{x^2}) \\
\log_{10}(2^{x+2})+\log_{10}(5^{6-x}) &= x^2 \\
(x+2)\log_{10}2+(6-x)\log_{10}5 &= x^2 \\
x(\log_{10}2-\log_{10}5)+(2\log_{10}2+6\log_{10}5) &= x^2 \\
x^2-x(\log_{10}2-\log_{10}5)-(2\log_{10}2+6\log_{10}5) &= 0
\end{aligned}$$

Or $\log_{10}2+\log_{10}5=\log_{10}10=1$. Donc $\log_{10}5=1-\log_{10}2$. L'équation devient donc :

$$x^2-x(2\log_{10}2-1)-(6-4\log_{10}2)=0$$

Il s'agit d'une équation du second degré en x. Elle admet donc un maximum de deux racines rélles.
D'après la formule :

$$\begin{aligned}
x &= \frac{(2\log_{10}2-1)\pm\sqrt{(2\log_{10}2-1)^2-4(1)(-(6-4\log_{10}2))}}{2(1)} \\
&= \frac{(2\log_{10}2-1)\pm\sqrt{4(\log_{10}2)^2-4\log_{10}2+1+24-16\log_{10}2}}{2} \\
&= \frac{(2\log_{10}2-1)\pm\sqrt{4(\log_{10}2)^2-20\log_{10}2+25}}{2} \\
&= \frac{(2\log_{10}2-1)\pm\sqrt{(2\log_{10}2-5)^2}}{2} \\
&= \frac{(2\log_{10}2-1)\pm(5-2\log_{10}2)}{2} \qquad (\text{puisque } 5-2\log_{10}2>0)
\end{aligned}$$

Donc
$$x = \frac{(2\log_{10}2 - 1) + (5 - 2\log_{10}2)}{2} = \frac{4}{2} = 2$$
ou
$$x = \frac{(2\log_{10}2 - 1) - (5 - 2\log_{10}2)}{2} = \frac{4\log_{10}2 - 6}{2} = 2\log_{10}2 - 3$$
(À n'importe quel moment, on aurait pu calculer une approximation des racines à l'aide d'une calculatrice.)

(b) Premièrement, on récrit le système d'équations sous la forme suivante :

$$\begin{array}{ccccc} x & + & \log_{10}x & = & y-1 \\ (y-1) & + & \log_{10}(y-1) & = & z-2 \\ (z-2) & + & \log_{10}(z-2) & = & x \end{array}$$

Deuxièmement, on définit $a = x$, $b = y - 1$ et $c = z - 2$, ce qui nous permet d'écrire le système sous la forme :

$$a + \log_{10}a = b \quad (1)$$
$$b + \log_{10}b = c \quad (2)$$
$$c + \log_{10}c = a \quad (3)$$

Troisièmement, on remarque que $(a, b, c) = (1, 1, 1)$ est une solution, puisque
$1 + \log_{10}1 = 1 + 0 = 1$.
Si $a > 1$, alors $\log_{10}a > 0$. D'après l'équation (1), on a :
$$b = a + \log_{10}a > a + 0 = a > 1$$
Donc $\log_{10}b > 0$. D'après l'équation (2), on a :
$$c = b + \log_{10}b > b + 0 = b > a > 1$$
Donc $\log_{10}c > 0$. D'après l'équation (3), on a :
$$a = c + \log_{10}c > c + 0 = c > b > a > 1$$
On a donc $a > c > b > a$, qui est une contradiction.
Donc, a ne peut être supérieur à 1.
Si $0 < a < 1$ (a ne peut être négatif), alors $\log_{10}a < 0$. D'après l'équation (1), on a :
$$b = a + \log_{10}a < a + 0 = a < 1$$
Donc $\log_{10}b < 0$. D'après l'équation (2), on a :
$$c = b + \log_{10}b < b + 0 = b < a < 1$$

Donc $\log_{10} c < 0$. D'après l'équation (3), on a :

$$a = c + \log_{10} c > c + 0 = c < b < a < 1$$

On a donc $a < c < b < a$, qui est une contradiction.

Donc, a ne peut être inférieur à 1 non plus.

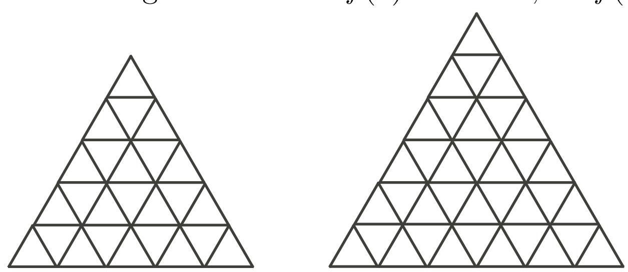
Donc, a doit être égal à 1.

Puisque $a = 1$, alors d'après l'équation (1), $b = a + \log_{10} a$, d'où $b = 1 + \log_{10} 1$, ou $b = 1 + 0$, ou $b = 1$. De la même manière, d'après l'équation (2), on obtient $c = 1$.

Donc, la seule solution du système est $(a, b, c) = (1, 1, 1)$.

Puisque $(a, b, c) = (x, y - 1, z - 2)$, alors $(x, y, z) = (1, 2, 3)$.

10. (a) Pour $n = 5$, il y a 10 triangles renversés ayant des côtés de longueur 1 et 3 triangles renversés ayant des côtés de longueur 2. Donc $f(5) = 10 + 3$, ou $f(5) = 13$.



Pour $n = 6$, il y a 15 triangles renversés ayant des côtés de longueur 1, 6 triangles renversés ayant des côtés de longueur 2 et 1 triangle renversé ayant des côtés de longueur 3. Donc $f(6) = 15 + 6 + 1$, ou $f(6) = 22$.

(b) *Solution 1*

On détermine une expression pour $f(2k)$ et une autre pour $f(2k - 1)$, en fonction de k, puis on utilise ces expressions pour montrer que $f(2k) - f(2k - 1) = k^2$.

On considère un grand triangle ayant des côtés de longueur n. (Plus tard, on considérera deux cas, selon que n est pair ou impair.)

La $i^{\text{ième}}$ ligne horizontale, à partir du haut, sera appelé « rangée i ». On remarque que la rangée i a une longueur i. Dans cette rangée, les points où les lignes obliques coupent la rangée i seront appelés, de gauche à droite, « point 0 », « point 1 », et ainsi de suite jusqu'au « point i ». (On utilisera la variable j pour décrire un point général dans cette rangée.)

On considère d'abord les triangles renversés ayant des côtés de longueur $m = 1$. On les compte en comptant les endroits où leur sommet inférieur peut être situé.

Il n'y a aucun sommet inférieur possible dans la rangée 1.

Il y a un sommet inférieur possible dans la rangée 2, soit au point $j = 1$.

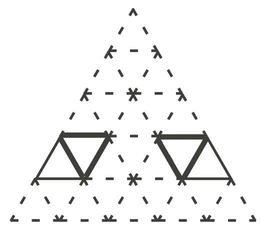
Il y a deux sommets inférieurs possibles dans la rangée 3, soit aux points $j = 1$ et $j = 2$.

On continue de cette manière, jusqu'à la rangée n qui contient $n - 1$ sommets inférieurs possibles, soit aux points $j = 1$ jusqu'à $j = n - 1$.

De façon générale, il y a $i - 1$ sommets inférieurs possibles dans la rangée i :

Pour le voir, on montre que le sommet inférieur le plus à gauche est au point $j = 1$ et que le sommet inférieur le plus à droite est au point $j = i - 1$. On obtient les autres sommets en faisant subir des translations vers la droite au premier triangle renversé.

Le sommet inférieur le plus à gauche est au point $j = 1$, car on obtient le premier triangle renversé en traçant un segment de longueur 1, du point 0 au point 1, de manière à former un parallélogramme qui contient un triangle debout et un triangle renversé.



Le parallélogramme est le premier qui puisse être tracé dans cette rangée, à l'intérieur du grand triangle. Le triangle renversé qu'il contient est donc le premier qui puisse être tracé dans cette rangée. Son sommet inférieur est au point $j = 1$. (En d'autres mots, on ne peut pas tracer un triangle renversé plus à gauche.)

De même, le sommet inférieur le plus à droite est au point $j = i - 1$. On peut le voir en traçant un parallélogramme à droite.

Puisqu'il y a $i-1$ triangles par rangée dans les rangées de $i = 2$ à $i = n$, le nombre total de triangles renversés ayant des côtés de longueur $m = 1$ est égal à $1+2+\cdots+(n-2)+(n-1)$, ou $\frac{1}{2}(n-1)(n)$.

On considère des triangles renversés ayant des côtés de longueur m. Dans la rangée i, le premier sommet inférieur sera au point $j = m$ et le dernier sera au point $j = i - m$.

Il faut que $m \leq i - m$ (ou $2m \leq i$) pour que le premier sommet inférieur soit à gauche du dernier.

Dans la rangée i, le nombre de sommets inférieurs possibles est égal à $(i - m) - m + 1$, ou $i + 1 - 2m$.

(Lorsque $i = 2m$ (c'est-à-dire la plus petite valeur possible de i), le nombre de sommets inférieurs possibles est égal à $2m + 1 - 2m$, ou 1.

Lorsque $i = n$ (c'est-à-dire la plus grande valeur possible de i), le nombre de sommets inférieurs possibles est égal à $n + 1 - 2m$.)

Étant donné une valeur particulière strictement positive de n, quelles sont les valeurs possibles de m ? Il est clair que $m \geq 1$.

Si $n = 2k$, k étant un entier strictement positif quelconque, alors $2m \leq n = 2k$, puisque le plus grand triangle renversé possible aura son sommet inférieur dans la rangée du bas, d'où $m \leq k$.

Si $n = 2k - 1$, k étant un entier strictement positif quelconque, alors $2m \leq n = 2k - 1$, d'où $m \leq k - 1$.

Donc, étant donné une valeur particulière de m, le nombre total de triangles renversés ayant des côtés de longueur m est égal à

$$1 + 2 + \cdots + (n + 1 - 2m) = \tfrac{1}{2}(n + 1 - 2m)(n + 2 - 2m) \qquad (*)$$

ce qui correspond à la somme des valeurs de l'expression $i + 1 - 2m$ de $i = 2m$ à $i = n$, car on considère toutes les positions possibles du sommet inférieur.

Si $n = 2k$, les valeurs possibles de m sont les entiers de $m = 1$ à $m = k$. On additionne donc les valeurs du membre de droite de $(*)$ pour les valeurs de m, de $m = 1$ à $m = k$:

$$\begin{aligned}
f(2k) &= \sum_{m=1}^{k} \tfrac{1}{2}(2k + 1 - 2m)(2k + 2 - 2m) \\
&= \sum_{l=1}^{k} \tfrac{1}{2}(2l - 1)(2l) \qquad \text{(en posant } l = k + 1 - m\text{)} \\
&= \sum_{l=1}^{k} (2l - 1)(l) \\
&= \sum_{l=1}^{k} (2l^2 - l) \\
&= 2\sum_{l=1}^{k} l^2 - \sum_{l=1}^{k} l \\
&= 2\left(\tfrac{1}{6}k(k + 1)(2k + 1)\right) - \tfrac{1}{2}k(k + 1) \\
&= k(k + 1)\left(\tfrac{1}{3}(2k + 1) - \tfrac{1}{2}\right) \\
&= k(k + 1)\left(\tfrac{2}{3}k - \tfrac{1}{6}\right) \\
&= \frac{k(k + 1)(4k - 1)}{6}
\end{aligned}$$

Si $n = 2k - 1$, les valeurs possibles de m sont les entiers de $m = 1$ à $m = k - 1$.
On additionne donc les valeurs du membre de droite de $(*)$ pour les valeurs de m, de $m = 1$ à $m = k - 1$:

$$\begin{aligned}
f(2k-1) &= \sum_{m=1}^{k-1} \tfrac{1}{2}(2k-2m)(2k+1-2m) \\
&= \sum_{l=1}^{k-1} \tfrac{1}{2}(2l)(2l+1) \qquad \text{(en posant } l = k-m) \\
&= \sum_{l=1}^{k-1} l(2l+1) \\
&= \sum_{l=1}^{k-1} (2l^2+l) \\
&= 2\sum_{l=1}^{k-1} l^2 + \sum_{l=1}^{k-1} l \\
&= 2\left(\tfrac{1}{6}(k-1)(k)(2k-1)\right) + \tfrac{1}{2}(k-1)(k) \\
&= k(k-1)\left(\tfrac{1}{3}(2k-1)+\tfrac{1}{2}\right) \\
&= k(k-1)\left(\tfrac{2}{3}k+\tfrac{1}{6}\right) \\
&= \frac{k(k-1)(4k+1)}{6}
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
f(2k)-f(2k-1) &= \frac{k(k+1)(4k-1)}{6} - \frac{k(k-1)(4k+1)}{6} \\
&= \tfrac{1}{6}k((k+1)(4k-1)-(k-1)(4k+1)) \\
&= \tfrac{1}{6}k((4k^2+3k-1)-(4k^2-3k-1)) \\
&= \tfrac{1}{6}k(6k) \\
&= k^2
\end{aligned}$$

Solution 2

Comme dans la Solution 1, on peut montrer que si $n = 2k$, on peut placer des triangles renversés ayant des côtés de longueur $m = 1$ à $m = k$ et si $n = 2k-1$, on peut placer des triangles renversés ayant des côtés de longueur $m = 1$ à $m = k-1$.

On considère $f(2k)-f(2k-1)$. Pour calculer cette valeur, on calculera combien de triangles renversés *de plus* on pourra placer dans un grand triangle de grandeur $n = 2k$ que dans un grand triangle de grandeur $n = 2k-1$.

Puisque le grand triangle de grandeur $2k-1$ peut être placé dans le grand triangle de grandeur $2k$ en faisant coïncider leur sommet supérieur, alors tous les nouveaux triangles renversés à l'intérieur du grand triangle de grandeur $n = 2k$ auront leur sommet inférieur dans la dernière rangée, soit la rangée $n = 2k$.

On compte ce nombre de triangles en considérant les valeurs possibles de m.

Si $m = 1$, la Solution 1 nous dit que le nombre de tels triangles est égal à $2k+1-2(1)$, ou $2k-1$.

Si $m = 2$, le nombre de tels triangles est égal à $2k + 1 - 2(2)$, ou $2k - 3$.

Pour une valeur particulière de m, le nombre de tels triangles est égal à $2k + 1 - 2m$.

La valeur de $f(2k) - f(2k-1)$ est égale à la somme des valeurs de $2k+1-2m$ pour toutes les valeurs possibles de m.

Donc :

$$\begin{aligned}
f(2k) - f(2k-1) &= \sum_{m=1}^{k}(2k+1-2m) \\
&= \sum_{m=1}^{k}(2k+1) - 2\sum_{m=1}^{k} m \\
&= k(2k+1) - 2\left(\tfrac{1}{2}k(k+1)\right) \\
&= 2k^2 + k - (k^2 + k) \\
&= k^2
\end{aligned}$$

(c) D'après la Solution 1 de (b), on sait que

$$f(2k) = \frac{k(k+1)(4k-1)}{6} \qquad \text{et} \qquad f(2k-1) = \frac{k(k-1)(4k+1)}{6}$$

On utilise chacune de ces expressions pour exprimer $f(n)$ en fonction de n.

Si n est pair, alors $n = 2k$, d'où $k = \frac{1}{2}n$. Donc :

$$f(n) = f(2k) = \frac{\frac{1}{2}n(\frac{1}{2}n+1)(4(\frac{1}{2}n)-1)}{6} = \frac{\frac{1}{2}n(\frac{1}{2}n+1)(2n-1)}{6} = \frac{n(n+2)(2n-1)}{24}$$

Si n est impair, alors $n = 2k - 1$, d'où $k = \frac{1}{2}(n+1)$. Donc :

$$\begin{aligned}
f(n) &= f(2k-1) = \frac{\frac{1}{2}(n+1)(\frac{1}{2}(n+1)-1)(4(\frac{1}{2}(n+1))+1)}{6} \\
&= \frac{\frac{1}{2}(n+1)(\frac{1}{2}(n+1)-1)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)(n-1)(2n+3)}{24}
\end{aligned}$$

<u>1^er^ cas : n est pair</u>

Si $f(n)$ est divisible par n, alors $f(n) = nq$, q étant un entier positif quelconque. Donc :

$$\begin{aligned}
nq &= \frac{n(n+2)(2n-1)}{24} \\
24nq &= n(n+2)(2n-1) \\
24q &= (n+2)(2n-1) \qquad \text{(puisque } n \neq 0\text{)}
\end{aligned}$$

Il faut donc que $(n+2)(2n-1)$ soit un multiple de 24.

Puisque $2n-1$ est impair, il faut que $n+2$ soit un multiple de 8, c'est-à-dire que $n+2 = 8a$, a étant un entier positif quelconque. Donc $n = 8a - 2$.

Donc $24q = 8a(2(8a-2)-1)$, ou $3q = a(16a-5)$.

Il faut aussi que $a(16a-5)$ soit un multiple de 3.

Puisque 3 est un nombre premier, alors a doit être divisible par 3 ou $16a-5$, que l'on peut exprimer sous la forme $3(5a-2)+(a+1)$, doit être divisible par 3.
Si a est divisible par 3, alors $a=3b$, b étant un entier positif quelconque.
Si $16a-5$ est divisible par 3, alors $a+1$ est divisible par 3, car d'après l'identité $16a-5=3(5a-2)+(a+1)$, on a $a+1=(16a-5)-3(5a-2)$ et $a+1$ est la différence de deux multiples de 3. Donc $a+1=3b$, b étant un entier positif quelconque. Donc $n=8(3b)-2=24b-2$ ou $n=8(3b-1)-2=24b-10$, b étant un entier positif quelconque.
On a démontré que si $f(n)$ est divisible par n, alors $n=24b-2$ ou $n=24b-10$, b étant un entier positif quelconque. On vérifie que $f(n)$ est divisible par n si $n=24b-2$ ou $n=24b-10$, b étant *n'importe quel* entier positif.
Si $n=24b-2$, alors

$$f(n)=f(24b-2)=\frac{(24b-2)(24b)(48b-5)}{24}=b(24b-2)(48b-5)$$

et $f(n)$ est divisible par $24b-2$ pour n'importe quelle valeur entière positive de b, ce qui veut dire que dans ce cas, $f(n)$ est divisible par n.
Si $n=24b-10$, alors

$$f(n)=f(24b-10)=\frac{(24b-10)(24b-8)(48b-21)}{24}=(24b-10)(3b-1)(16b-7)$$

et $f(n)$ est divisible par $24b-10$ pour n'importe quelle valeur entière positive de b, ce qui veut dire que dans ce cas, $f(n)$ est divisible par n.
Donc, si n est pair, $f(n)$ est divisible par n si $n=24b-2$ ou $n=24b-10$, b étant n'importe quel entier positif.

<u>2^e cas : n est impair</u>

Si $f(n)$ est divisible par n, alors $f(n)=nq$, q étant un entier positif quelconque. Donc :

$$\begin{aligned}
nq &= \frac{(n+1)(n-1)(2n+3)}{24}\\
24nq &= (n+1)(n-1)(2n+3)\\
24nq &= (n^2-1)(2n+3)\\
24nq &= 2n^3+3n^2-2n-3\\
3 &= 2n^3+3n^2-2n-24nq\\
3 &= n(2n^2+3n-2-24q)
\end{aligned}$$

Puisque le membre de droite est divisible par n, le membre de gauche doit l'être aussi. Donc, n est un diviseur de 3. Donc $n=1$ ou $n=3$.

Donc $f(n)$ est divisible par n si $n=1$, $n=3$, $n=24b-10$ ou $n=24b-2$, b étant n'importe quel entier positif.