Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Euclide

le mardi 15 avril 2008

Avec la contribution de:

University of Waterloo

La Great-West compagnie d'assurance-vie

London Life

Canada-Vie

LA PARFAITE ALLIANCE COMMUNAUTAIRE[MC]

Sybase iAnywhere

Samson Bélair Deloitte & Touche Comptables agréés

Maplesoft command the brilliance™

Avec la participation de:

Canadian Institute of Actuaries / Institut canadien des actuaires

---

Durée : 2 heures et demie

L'utilisation de la calculatrice est permise, pourvu que celle-ci ne soit ni programmable, ni munie d'affichage graphique.

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal. Le concours est composé de 10 questions de 10 points chacune. Chaque question peut avoir des parties à réponse courte et des parties à développement. Une partie à **RÉPONSE COURTE** vaut 3 points. Les parties **À DÉVELOPPEMENT** valent le reste des 10 points attribués à la question.

Directives pour les questions à RÉPONSES COURTES

1. Les parties à **RÉPONSES COURTES** sont indiquées comme ceci : .
2. **Écrire la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse.** Le maximum des points est attribué pour une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. Une partie des points sera attribuée **pour du travail pertinent** inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse.

Directives pour les questions À DÉVELOPPEMENT

1. Les questions **À DÉVELOPPEMENT** sont indiquées comme ceci : .
2. **Les solutions complètes doivent être écrites aux endroits appropriés du cahier-réponse.** Le brouillon doit être fait ailleurs. Si le cahier est rempli, le surveillant ou la surveillante distribuera des feuilles lignées. Insérer ces feuilles dans le cahier-réponse. Soyez prudent en inscrivant votre nom sur chaque feuille insérée.
3. Des points sont attribués pour les solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

Remarque : À la fin du concours, insérer la feuille de renseignements à l'intérieur du cahier-réponse.

Le nom de quelques-uns des candidats ayant obtenu les meilleurs résultats sera publié dans les Résultats du concours Euclide sur notre site web à http://www.cemc.uwaterloo.ca.

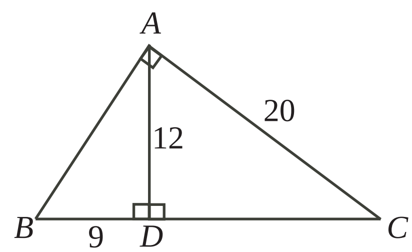
REMARQUES

1. Bien lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Écrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de « », le maximum des points est accordé à une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. **Si une réponse est incorrecte, une partie des points peut être accordée pour du travail pertinent** inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse. On encourage fortement les candidates et les candidats à montrer leur travail.
4. Sauf indication contraire, les réponses et les calculs devraient être exprimés au moyen de valeurs exactes, telles que 4π, $2+\sqrt{7}$, plutôt que 12,566 . . . ou 4,646 . . .

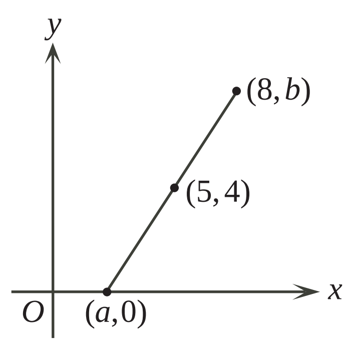
Remarque au sujet de la rédaction des solutions

Lorsqu'un problème est accompagné de « », une solution complète est exigée. Une solution devrait être bien organisée et contenir une dose appropriée d'énoncés mathématiques et de mots d'explications et de justification. Avant de rédiger une solution finale, il est bon de rédiger les grandes lignes et certains détails au brouillon. La solution finale devrait permettre à la correctrice ou au correcteur de comprendre l'approche choisie ainsi que toutes les étapes mathématiques suivies.

1. (a) Quel est le périmètre du triangle ABC ci-contre ?



(b) Dans la figure ci-contre, un segment de droite a pour extrémités les points $(a, 0)$ et $(8, b)$. Il a pour milieu le point $(5, 4)$. Quelle est la valeur de a et de b ?



(c) Les droites d'équations $ax + y = 30$ et $x + ay = k$ se coupent au point $P(6, 12)$. Déterminer la valeur de k.

2. Chaque partie du problème se rapporte à la parabole d'équation $y = (x-2)(x-8)+7$.

(a) Les points $(2, 7)$ et $(c, 7)$ $(c \neq 2)$ sont situés sur la parabole. Quelle est la valeur de c ?

(b) Quelles sont les coordonnées du sommet de la parabole ?

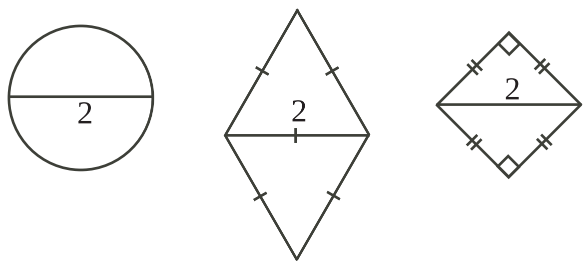
(c) Une droite qui passe par le point $A(5, 0)$ coupe la parabole au point $B(4, -1)$. Déterminer les coordonnées du deuxième point d'intersection de cette droite et de la parabole.

3. (a) Dans la figure ci-contre, on a placé un cadre 3×3 sur un tableau de nombres. Dans cet exemple, la somme des nombres à l'intérieur du cadre est égale à 108 et le nombre au milieu du cadre est égal à 12. On place ensuite le cadre dans une nouvelle position, de manière que la somme des nombres à l'intérieur du cadre soit égale à 279. Dans cette position, quel est le nombre au milieu du cadre ?

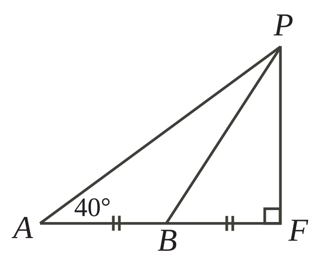
1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49

(b) Laquelle des trois figures suivantes a la plus petite aire et laquelle a la plus grande aire ? Expliquer comment la réponse a été obtenue. (Dans la Figure A, le cercle a un diamètre de longueur 2.)

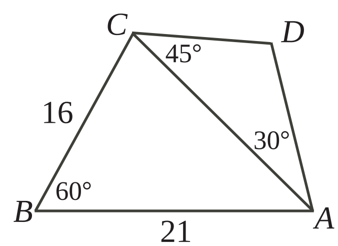
Figure A　　Figure B　　Figure C



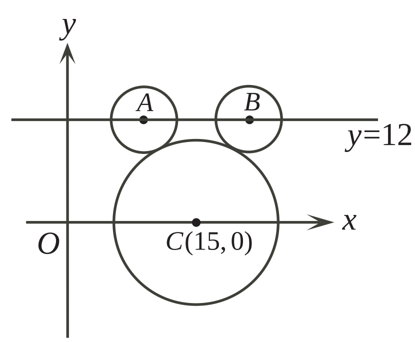
4. (a) Un mât FP a une hauteur de 20 mètres. Au point A, au sol, on peut mesurer un angle d'élévation de 40° jusqu'au haut du mât. Le point B est situé à mi-chemin entre A et F. Quelle est la mesure de l'angle FBP, au degré près ?



(b) Dans la figure ci-contre, on a $AB = 21$, $BC = 16$, $\angle ABC = 60°$, $\angle CAD = 30°$ et $\angle ACD = 45°$. Déterminer la longueur CD au dixième près.



5. (a) Dans la figure ci-contre, le grand cercle, de centre $C(15, 0)$ a un rayon de 9. Les deux petits cercles, de centres A et B, ont chacun un rayon de 4. Les points A et B sont situés sur la droite horizontale d'équation $y = 12$. Chaque petit cercle est tangent au grand cercle. Une puce met 5 secondes pour marcher à une vitesse constante de A à B le long de la droite d'équation $y = 12$. Quelle distance la puce parcourt-elle en 1 seconde ?



(b) Déterminer toutes les valeurs de k ($k \neq 0$) pour lesquelles le sommet de la parabole d'équation

$$y = kx^2 + (5k+3)x + (6k+5)$$

est situé sur l'axe des abscisses.

6. (a) Une fonction f vérifie l'égalité $f(x) = f(x-1) + f(x+1)$ pour toutes les valeurs de x. Sachant que $f(1) = 1$ et $f(2) = 3$, quelle est la valeur de $f(2008)$?

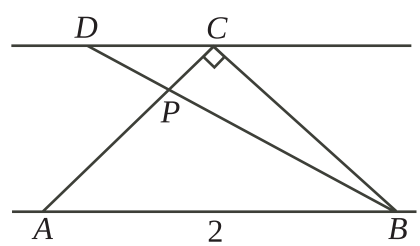
(b) Les nombres a, b, c, dans l'ordre, forment une suite arithmétique de trois termes (voir ci-dessous) et $a + b + c = 60$.
Les nombres $a - 2$, b, $c + 3$, dans l'ordre, forment une suite géométrique de trois termes.
Déterminer toutes les valeurs possibles de a, b et c.

(Une *suite arithmétique* est une suite dans laquelle chaque terme, à partir du 2$^{\text{e}}$, est formé en ajoutant une constante au terme précédent. Par exemple, 3, 5, 7 est une suite arithmétique de trois termes.
Une *suite géométrique* est une suite dans laquelle chaque terme, à partir du 2$^{\text{e}}$, est formé en multipliant le terme précédent par une constante. Par exemple, 3, 6, 12 est une suite géométrique de trois termes.)

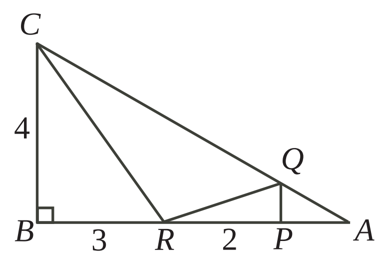
7. (a) Trois multiples consécutifs de 3 ont une moyenne de a.
Quatre multiples consécutifs de 4 ont une moyenne de $a + 27$.
Le plus grand et le plus petit de ces sept nombres ont une moyenne de 42.
Déterminer la valeur de a.

(b) Bruno et Crystel ont chacun un sac de 9 boules. Dans chaque sac, les boules sont numérotées de 1 à 9. Bruno et Crystel enlèvent chacun une boule de leur propre sac. Soit b la somme des numéros sur les boules qui restent dans le sac de Bruno. Soit c la somme des numéros sur les boules qui restent dans le sac de Crystel. Déterminer la probabilité pour que la différence entre b et c soit un multiple de 4.

8. (a) Les points A, B, C et D sont placés comme dans la figure ci-contre. AB est parallèle à DC et P est le point d'intersection de AC et de BD. De plus, on a $\angle ACB = 90°$, $AC = CB$ et $AB = BD = 2$. Déterminer la mesure de l'angle DBC.



(b) Dans la figure ci-contre, le triangle ABC est rectangle en B. Les points P et R sont situés sur le côté AB, tandis que le point Q est situé sur le côté AC de manière que PQ soit parallèle à BC. De plus, $RP = 2$, $BR = 3$, $BC = 4$ et l'aire du triangle QRC est égale à 5. Déterminer la longueur AP.



9\. (a) L'équation $2^{x+2}5^{6-x} = 10^{x^2}$ admet deux racines réelles. Déterminer ces deux racines.

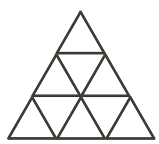
(b) Déterminer toutes les solutions réelles du système d'équations

$$\begin{array}{rcrcl} x & + & \log_{10} x & = & y-1 \\ y & + & \log_{10}(y-1) & = & z-1 \\ z & + & \log_{10}(z-2) & = & x+2 \end{array}$$

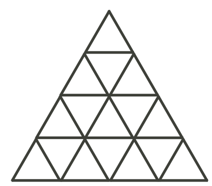
et démontrer que le système n'admet aucune autre solution.

10\. On considère un triangle équilatéral debout (qui pointe vers le haut) ayant des côtés de longueur n, n étant un entier strictement positif. On coupe le triangle en petits triangles-unités ayant des côtés de longueur 1, comme dans les exemples suivants.

$n = 3$

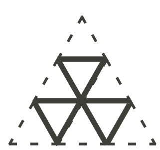


$n = 4$



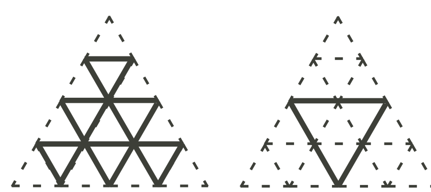
Pour chaque valeur de n, soit $f(n)$ le nombre total de triangles équilatéraux renversés (qui pointent vers le bas) de *toutes* grandeurs. Par exemple, on a $f(3) = 3$ et $f(4) = 6 + 1 = 7$, comme l'indiquent les figures ci-dessous.

$n = 3$



$f(3) = 3$

$n = 4$



$f(4) = 6 + 1 = 7$

(a) Déterminer $f(5)$ et $f(6)$.

(b) Démontrer que pour chaque valeur de k ($k \geq 1$), on a $f(2k) = f(2k-1) + k^2$.

(c) Déterminer toutes les valeurs de n (n étant un entier strictement positif) pour lesquelles $f(n)$ est divisible par n. Justifier son raisonnement.

Concours canadien de mathématiques

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Euclide de 2008!
En 2007, plus de 14 000 élèves à travers le monde se sont inscrits au concours Euclide.

Si vous terminez l'école secondaire, nous vous souhaitons bonne chance.
Si vous retournez à l'école secondaire l'an prochain, encouragez votre enseignant à vous inscrire au Défi ouvert canadien de mathématiques Financière Sun Life qui aura lieu fin novembre.

Visitez notre site Web au www.cemc.uwaterloo.ca pour
- **plus d'information à propos du Défi ouvert canadien de mathématiques Financière Sun Life**
- **des copies gratuites des concours précédents**
- **des ateliers pour vous aider à vous préparer pour les prochains concours**
- **de l'information au sujet de nos publications qui visent l'enrichissement en mathématiques et la préparation aux concours**
- **de l'information concernant les carrières en mathématiques**

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web au www.cemc.uwaterloo.ca pour
- **obtenir des renseignements concernant les concours de 2008/2009**
- **vous renseigner sur des ateliers et des ressources disponibles pour les enseignants**
- **trouver les résultats de votre école**