Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Pascal 2007

(9^{e} année ou Secondaire III)

le mardi 20 février 2007

Solutions

1. On a : $3 \times (7-5) - 5 = 3 \times 2 - 5 = 6 - 5 = 1$

RÉPONSE : (B)

2. Puisque x est inférieur à -1 et supérieur à -2, alors parmi les choix, $-1{,}3$ représente le mieux la valeur de x.

RÉPONSE : (B)

3. Le carré ombré a des côtés de longueur 1. Son aire est donc égale à 1^2, soit 1.
Le grand rectangle mesure 3 sur 5. Son aire est donc égale à 3×5, soit 15.
L'aire du carré ombré est donc $\frac{1}{15}$ de l'aire du grand rectangle.

RÉPONSE : (A)

4. On a : $2^5 - 5^2 = 32 - 25 = 7$

RÉPONSE : (E)

5. En 3 heures, Léone gagne 24,75 \$. En une heure, elle gagne donc 24,75 \$ $\div$ 3, soit 8,25 \$.
Pendant un quart de 5 heures, Léone gagne donc $5 \times 8{,}25$ \$, soit 41,25 \$.

RÉPONSE : (E)

6. On a : $\dfrac{\sqrt{64}+\sqrt{36}}{\sqrt{64+36}} = \dfrac{8+6}{\sqrt{100}} = \dfrac{14}{10} = \dfrac{7}{5}$

RÉPONSE : (A)

7. *Solution 1*
En tout, Mégane et Daniel ont reçu 1 010 000 \$.
Puisque chacun donne 10 %, alors en tout, ils ont donné 10 % de 1 010 000 \$, soit 101 000 \$.

Solution 2
Mégane donne 10 % de 1 000 000 \$, soit 100 000 \$.
Daniel donne 10 % de 10 000 \$, soit 1000 \$.
En tout, ils ont donné 100 000 \$ + 1000 \$, soit 101 000 \$.

RÉPONSE : (A)

8. On considère la base BC du triangle ABC. Elle a une longueur de 12.
Puisque le point A a une ordonnée de 9, la hauteur correspondante du triangle est égale à 9.
L'aire du triangle ABC est donc égale à $\frac{1}{2}(12)(9)$, soit 54.

RÉPONSE : (B)

9. On soustrait au moyen d'un dénominateur commun pour obtenir $\frac{5}{8} - \frac{1}{16} = \frac{9}{16}$.
Puisque $\frac{9}{16}$ est supérieur à $\frac{7}{16}$ et à $\frac{1}{2}$, qui est égal à $\frac{8}{16}$, alors (E) et (D) sont faux.
Puisque $\frac{9}{16}$ est inférieur à $\frac{3}{4}$, qui est égal à $\frac{12}{16}$, alors (A) est faux.
Or $\frac{9}{16} = 0{,}5625$.
Puisque $\frac{3}{5} = 0{,}6$, alors (B) est faux. Puisque $\frac{5}{9} = 0{,}\overline{5}$, alors $\frac{9}{16} > \frac{5}{9}$. Donc, le bon choix est (C).

RÉPONSE : (C)

10. Puisque $M = 2007 \div 3$, alors $M = 669$.
Puisque $N = M \div 3$, alors $N = 669 \div 3$, ou $N = 223$.
Puisque $X = M - N$, alors $X = 669 - 223$, ou $X = 446$.

Réponse : (E)

11. La moyenne de 6, de 9 et de 18 est égale à $\frac{6+9+18}{3}$, soit $\frac{33}{3}$, ou 11.
Donc, la moyenne de 12 et de y est égale à 11. La somme de 12 et de y est donc égale à 2(11), soit 22. Donc $y = 10$.

Réponse : (C)

12. Dans le triangle PQR, on a $\angle RPQ = \angle PQR = 48^\circ$, puisque $PR = RQ$.
Puisque les angles MPN et RPQ sont opposés par le sommet, alors $\angle MPN = \angle RPQ = 48^\circ$.
Dans le triangle PMN, $PM = PN$. Donc $\angle PMN = \angle PNM$.
Donc $\angle PMN = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle MPN)$, d'où $\angle MPN = \frac{1}{2}(180^\circ - 48^\circ)$, ou $\angle MPN = 66^\circ$.

Réponse : (D)

13. Les nombres premiers inférieurs à 10 sont 2, 3, 5 et 7.
Parmi eux, les deux nombres différents qui ont une somme de 10 sont 3 et 7.
Le produit de 3 et de 7 est égal à 21.

Réponse : (B)

14. Puisque 21 garçons participent et que le rapport du nombre de garçons qui participent au nombre de filles qui participent est de 3 : 7, alors le nombre de filles qui participent est égal à $\frac{7}{3} \times 21$, soit 49. (On peut aussi penser que le rapport indique que 3 groupes de 7 garçons ont participé. Donc, 7 groupes de 7 filles ont participé.)
Le nombre total d'élèves qui ont participé est égal à $49 + 21$, soit 70.

Réponse : (D)

15. *Solution 1*
Le nombre de blocs dans la 1^{re} structure est égal à $1 + 2 + 3 + 4 + 5$, soit 15.
Le nombre de blocs dans la 2^{e} structure est égal à $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$, soit 21.
Clara a donc 36 blocs en tout.
On commence à construire la nouvelle structure à partir du haut.
Puisqu'il y a plus de 21 blocs, la structure aura au moins 6 étages.
Pour 7 étages, il faut $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$ blocs, soit 28 blocs.
Pour 8 étages, il faut $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8$ blocs, soit 36 blocs.
Clara peut donc construire une structure de 8 étages et il ne lui restera aucun bloc inutilisé.

Solution 2
Puisque la nouvelle structure sera plus grande que la 2^{e} structure, on considère ajouter des étages au bas de celle-ci en prenant les blocs de la 1^{re} structure.
Le nombre de blocs dans la 1^{re} structure est égal à $1 + 2 + 3 + 4 + 5$, soit 15.
Or, les deux premièrs étages qu'on ajouterait au bas de la 2^{e} structure contiendraient 7 et 8 blocs, respectivement, pour un total de 15 blocs.
On a donc une structure semblable, mais plus grande, et il ne reste aucun bloc non utilisé.

Réponse : (A)

16. *Solution 1*

Dans la 2^e ligne, on a $10 + 16 + 22 = 48$. Donc, la somme des nombres de chaque ligne, chaque colonne et chaque diagonale est égale à 48.
Dans la 1^{re} ligne, on a $P + 4 + Q = 48$, d'où $P + Q = 44$.
Dans la 3^{re} ligne, on a $R + 28 + S = 48$, d'où $R + S = 20$.
Donc $P + Q + R + S = 44 + 20$, c'est-à-dire que $P + Q + R + S = 64$.

Solution 2

Dans la 2^e ligne, on a $10 + 16 + 22 = 48$. Donc, la somme des nombres de chaque ligne, chaque colonne et chaque diagonale est égale à 48.
Dans la 1^{re} ligne, on a $P + 4 + Q = 48$, d'où $P + Q = 44$.
Dans la 1^{re} colonne, on a $P + 10 + R = 48$, d'où $P + R = 38$.
On soustrait ces deux équations, membre par membre, pour obtenir $(P+Q)-(P+R) = 44-38$, d'où $Q - R = 6$.
Dans une des diagonales, on a $R + 16 + Q = 48$, d'où $Q + R = 32$.
On additionne ces deux dernières équations, membre par membre, pour onbtenir $2Q = 38$, ou $Q = 19$. Puisque $R = 32 - Q$, alors $R = 13$.
Puisque $P = 44 - Q$, alors $P = 25$.
Dans la 3^e ligne, on a $13 + 28 + S = 48$, d'où $S = 7$.
Donc $P + Q + R + S = 25 + 19 + 13 + 7$, ou $P + Q + R + S = 64$.

Solution 3

La somme de tous les nombres du tableau est égale à $P + Q + R + S + 10 + 16 + 22 + 28 + 4$, c'est-à-dire à $P + Q + R + S + 80$. Or, dans la 2^e colonne, on a $4 + 16 + 28 = 48$. Donc, la somme des nombres de chaque colonne est égale à 48.
Donc, la somme des neuf nombres du tableau est égale à 3(48), ou 144.
Donc $P + Q + R + S + 80 = 144$, d'où $P + Q + R + S = 64$.

Réponse : (C)

17. À l'heure actuelle, la somme de l'âge de Norma et du nombre d'années qu'elle a travaillé est égale à $50 + 19$, soit 69.
Cette somme doit augmenter de $85 - 69$, ou 16, avant qu'elle puisse prendre sa retraite.
Chaque année, cette somme augmente de 2. En effet, son âge augmente de 1 et le nombre d'années qu'elle a travaillé augmente de 1.
Donc, dans 8 ans la somme passera de 69 à 85. Elle aura 58 ans $(50 + 8)$ lorsqu'elle pourra prendre sa retraite.

Réponse : (C)

18. D'après le théorème de Pythagore dans le triangle PQR, $PQ^2 = PR^2 - QR^2$, d'où $PQ^2 = 13^2 - 5^2$, ou $PQ^2 = 144$. Donc $PQ = 12$.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle PQS, $QS^2 = PS^2 - PQ^2$, d'où $QS^2 = 37^2 - 12^2$, ou $QS^2 = 1225$. Donc $QS = 35$.
Le triangle PQS a donc un périmètre de $12 + 35 + 37$, soit 84.

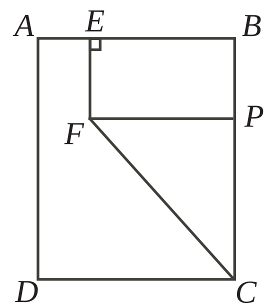
Réponse : (D)

19. Puisque l'inverse de $\frac{3}{10}$ est égal à $\left(\frac{1}{x}+1\right)$, alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{x}+1 &= \frac{10}{3} \\ \frac{1}{x} &= \frac{7}{3} \\ x &= \frac{3}{7} \end{aligned}$$

Réponse : (C)

20. Au point F, on abaisse une perpendiculaire FP au côté BC.



Puisque EB est parallèle à FP et que $\angle FEB = 90°$, alors $EBPF$ est un rectangle.
Puisque $EB = 40$, alors $FP = 40$; puisque $EF = 30$, alors $BP = 30$.
Puisque $AD = 80$, alors $BC = 80$. Donc $PC = 80 - 30$, d'où $PC = 50$.
L'aire du quadrilatère $EBCF$ est égale à la somme de l'aire du rectangle $EBPF$ (qui est égale à 30×40, soit 1200) et de l'aire du triangle FPC (qui est égale à $\frac{1}{2}(40)(50)$, soit 1000). L'aire du quadrilatère $EBCF$ est donc égale à 2200.
Puisque les régions $AEFCD$ et $EBCF$ ont la même aire, chacune a une aire de 2200. Le rectangle $ABCD$ a donc une aire de 4400.
Puisque $AD = 80$, alors $AB = 4400 \div 80$, ou $AB = 55$.
Donc $AE = AB - EB$, d'où $AE = 55 - 40$, ou $AE = 15$.

Réponse : (D)

21. On considère d'abord les possibilités pour chaque entier :
- Les nombres premiers de deux chiffres sont 11, 13, 17 et 19. Le seul dont la somme des chiffres est un nombre premier est 11. Donc $P = 11$.
- Puisque Q est un multiple de 5, de 2 à 19, les valeurs possibles de Q sont 5, 10 et 15.
- Les nombres impairs, de 2 à 19, qui ne sont pas des nombres premiers sont 9 et 15. Donc, les valeurs possibles de R sont 9 et 15.
- Les carrés de 2 à 19 sont 4, 9 et 16. Or, seuls 4 et 9 sont des carrés de nombres premiers. Donc, les valeurs possibles de S sont 4 et 9.
- Puisque $P = 11$, que les valeurs possibles de Q sont 5, 10 et 15, et que T est égal à la moyenne de P et de Q, alors T peut être égal à 8, à 10,5 ou à 13. Puisque T est un nombre premier, alors T doit être égal à 13. Donc $Q = 15$.

On sait donc que $P = 11$, $Q = 15$ et $T = 13$.
Puisque les cinq entiers sont différents, R ne peut être égal à 15. Donc $R = 9$.
Puisque $R = 9$, S ne peut être égal à 9. Donc $S = 4$.
Donc, le plus grand des nombres est Q, qui est égal à 15.

Réponse : (B)

22. Selon le théorème de Pythagore, $PR = \sqrt{QR^2 + PQ^2}$, d'où $PR = \sqrt{15^2 + 8^2}$, ou $PR = 17$ km.
Artus a couru une distance totale de $(8 + 15 + 7)$ km, soit 30 km, à une vitesse de 21 km/h. En même temps, Florence a couru une distance totale de $(17 + 7)$ km, soit 24 km.
Puisque $\frac{30}{24} = \frac{5}{4}$, la vitesse d'Artus est égale à $\frac{5}{4}$ de la vitesse de Florence. La vitesse de Florence est donc égale à $\frac{4}{5} \times 21$ km/h, soit $\frac{84}{5}$ km/h.

Artus parcourt les derniers 7 km en $\frac{7}{21}$ heure, soit $\frac{1}{3}$ heure, ou 20 minutes.
Florence parcourt les derniers 7 km en $\dfrac{7}{\frac{84}{5}}$ heure, c'est-à-dire en $\frac{35}{84}$ heure, soit $\frac{5}{12}$ heure, ou 25 minutes.
Puisque Artus et Florence sont arrivés au point S en même temps, alors Florence est arrivée au point R 5 minutes avant Artus.

Réponse : (E)

23. Le grand cercle a une aire de $\pi(2)^2$, soit 4π.
Donc, l'aire totale des régions ombrées est égale à $\frac{5}{12}(4\pi)$, soit $\frac{5}{3}\pi$.

Soit $\angle ADC = x°$.
L'aire de la partie non ombrée du petit cercle est donc égale à $\dfrac{x}{360}$ de l'aire de ce cercle, soit $\dfrac{x}{360}(\pi(1)^2)$, ou $\dfrac{x}{360}\pi$ (puisque $\angle ADC$ est égal à $\dfrac{x}{360}$ de l'angle plein mesuré au centre du cercle).
L'aire de la partie ombrée du petit cercle est égale à $\pi - \dfrac{x}{360}\pi$, soit $\dfrac{360 - x}{360}\pi$.

L'aire de l'anneau entre les cercles est égale à la différence de l'aire des cercles, soit $\pi(2)^2 - \pi(1)^2$, ou 3π.
L'aire de la partie ombrée de l'anneau est égale à $\dfrac{x}{360}$ de cette aire, puisque $\angle ADC$ est égal à $\dfrac{x}{360}$ de l'angle plein mesuré au centre du cercle.
L'aire de la partie ombrée de l'anneau est donc égale à $\dfrac{x}{360}(3\pi)$, soit $\dfrac{3x}{360}\pi$.

L'aire totale des régions ombrées est donc égale à $\dfrac{3x}{360}\pi + \dfrac{360 - x}{360}\pi$, ou $\dfrac{360 + 2x}{360}\pi$.
Puisqu'elle est égale à $\dfrac{5}{3}\pi$, alors $\dfrac{360 + 2x}{360} = \dfrac{5}{3}$, ou $\dfrac{360 + 2x}{360} = \dfrac{600}{360}$, d'où $360 + 2x = 600$, ou $x = 120$.
Donc $\angle ADC = 120°$.

Réponse : (B)

24. On remplit d'abord plusieurs cases pour mieux saisir la régularité :

17	16	15	14	13	
18	5	4	3	12	
19	6	1	2	11	
20	7	8	9	10	
21	22	23	24	25	26

On remarque que les carrés parfaits impairs sont placés en diagonale, à partir du 1, en descendant vers la droite. En effet, on voit que lorsqu'on place les nombres 1, 9, 25, ..., on remplit la dernière

case d'un carré. (On peut mieux le voir si on cache les nombres plus grands.)
Le premier carré parfait impair supérieur à 2007 est 45^2, soit 2025.
Le nombre 2007 sera situé à 18 cases à la gauche du nombre 2025. (En effet, la ligne de la spirale qui contient 2025 est suffisamment longue pour permettre de reculer de 18 cases dans cette ligne.)
Le carré parfait impair qui précède 2025 est le nombre 43^2, soit 1849. Donc, le nombre 1850 sera placé directement au-dessus du nombre 2025, puisque la ligne qui contient le nombre 1949 continuera d'une case vers la droite avant que la spirale ne monte.
Puisque 1850 est directement au-dessus de 2025, alors 1832 est directement au-dessus de 2007.
Le carré parfait impair qui suit 2025 est 47^2, soit 2209. Donc, le nombre 2208 sera placé directement au-dessous de 2025, puisque 2209 est placé une position à la droite et une position au-dessous 2025.
Puisque 2208 est directement au-dessous de 2025, alors 2190 est directement au-dessous de 2007.
Donc, le nombre qui paraît directement au-dessus de 2007 et le nombre qui paraît directement au-dessous de 2007 ont une somme de $1832 + 2190$, soit 4022.

Réponse : (E)

25. Pour que les chiffres de x et de $3x$ soient pairs, x doit avoir une des formes suivantes. (Dans cette liste, a, b et c représentent des chiffres qui ne peuvent être que 0, 2 ou 8 ; n est un chiffre qui ne peut être que 2 ou 8.)
- $nabc$ ($2 \times 3 \times 3 \times 3 = 54$ possibilités)
- $na68$ ($2 \times 3 = 6$ possibilités)
- $n68a$ ($2 \times 3 = 6$ possibilités)
- $68ab$ ($3 \times 3 = 9$ possibilités)
- $n668$ (2 possibilités)
- $668a$ (3 possibilités)
- 6668 (1 possibilité)
- 6868 (1 possibilité)

En tout, il y a 82 valeurs possibles de x.

Ces formes sont les seules formes possibles, car lorsqu'on multiplie par 3 les chiffres 0, 2 et 8 de x, on obtient des chiffres pairs et des retenues paires. Il est possible d'utiliser un chiffre 6, pourvu qu'il soit suivi de 8, de 68 ou de 668 de manière à donner une retenue de 2.

Voici une explication plus précise.
On remarque que $3 \times 0 = 0$, $3 \times 2 = 6$, $3 \times 4 = 12$, $3 \times 6 = 18$ et $3 \times 8 = 24$.
Donc, chaque chiffre pair de x produit un chiffre pair dans la position correspondante de $3x$, mais il peut produire dans le nombre $3x$ un chiffre impair dans la position suivante, sur la gauche, à cause d'une retenue impaire.
On remarque qu'un chiffre 0 ou 2, dans x, ne produit aucune retenue, tandis qu'un chiffre 8, dans x, produit une retenue paire. Donc, aucun de ces chiffres, dans x, ne peut produire un chiffre impair dans $3x$. (On remarque qu'aucune retenue ne peut être supérieure à 2. Il est donc impossible pour un chiffre 0 ou 2 de x de produire une retenue de 1, ou pour un chiffre 8 de x de produire une retenue de 3, même lors de retenues consécutives.)
Donc, un chiffre 2 ou 8 peut paraître dans n'importe quelle position de x et un chiffre 0 peut paraître dans n'importe quelle position de x, sauf la première.

Le chiffre 4 ne peut jamais paraître dans x, puisqu'il produit une retenue de 1 et produira alors un chiffre impair dans $3x$.

Le chiffre 6 peut paraître dans x, à condition que la retenue de la multiplication du chiffre précédent ait produit une retenue de 2. (On a vu que la retenue ne peut être supérieure à 2.) On a alors $3 \times 6 + \text{Retenue} = 20$, ce qui produit une retenue de 2 et ce qui ne change pas la parité du chiffre suivant.
Il peut y avoir une retenue de 2 si le chiffre qui suit le 6 est un 8 ou si le chiffre qui précède le 6 est un 6 qui est précédé par 8 ou par 68.

Si on traite de toutes ces conditions sur les chiffres 0, 2, 6 et 8, on obtient la liste des formes possibles de x, ci-haut, ainsi que les 82 valeurs possibles de x.

Réponse : (A)