Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Hypatie 2007

le mercredi 18 avril 2007

Solutions

1. (a) Voici les trajets possibles :
$A \to B \to C \to D \to A$ $\quad$ $A \to B \to D \to C \to A$
$A \to C \to B \to D \to A$ $\quad$ $A \to C \to D \to B \to A$
$A \to D \to B \to C \to A$ $\quad$ $A \to D \to C \to B \to A$

(b) Voici les trajets possibles et leur longueur :

$A \to B \to C \to D \to A$; Long. : $AB + BC + CD + DA = 80 + 120 + 90 + 40 = 330$ km
$A \to B \to D \to C \to A$; Long. : $AB + BD + DC + CA = 80 + 60 + 90 + 105 = 335$ km
$A \to C \to B \to D \to A$; Long. : $AC + CB + BD + DA = 105 + 120 + 60 + 40 = 325$ km
$A \to C \to D \to B \to A$; Long. : $AC + CD + DB + BA = 105 + 90 + 60 + 80 = 335$ km
$A \to D \to B \to C \to A$; Long. : $AD + DB + BC + CA = 40 + 60 + 120 + 105 = 325$ km
$A \to D \to C \to B \to A$; Long. : $AD + DC + CB + BA = 40 + 90 + 120 + 80 = 330$ km

Il y a deux trajets de longueur minimale, soit $A \to C \to B \to D \to A$ et $A \to D \to B \to C \to A$. Leur longueur est de 325 km.
Il y a deux trajets de longueur maximale, soit $A \to B \to D \to C \to A$ et $A \to C \to D \to B \to A$. Leur longueur est de 335 km.

(c) *Solution 1*
On peut écrire tous les trajets possibles :
$A \to B \to C \to E \to D \to A$ $\quad$ $A \to B \to D \to E \to C \to A$
$A \to C \to B \to E \to D \to A$ $\quad$ $A \to C \to D \to E \to B \to A$
$A \to D \to B \to E \to C \to A$ $\quad$ $A \to D \to C \to E \to B \to A$
Il y a donc 6 trajets possibles.
(On remarque que chaque trajet de la partie (a) donne un trajet dans cette partie (c). Il suffit d'ajouter E entre les troisième et quatrième arrêts du trajet.)

Solution 2
On considère un trajet $A \to x \to y \to E \to z \to A$.
Il y a 3 choix possibles pour x, soit B, C ou D.
Pour chacun de ces choix, il y a 2 choix possibles pour y.
Une fois que x et y sont fixés, il n'y a qu'un choix possible pour z.
Le nombre de trajets possibles est donc égal à 3×2, ou 6.

(d) D'après le premier renseignement, $AD + DC + CE + EB + BA = 600$ km.
Donc $40 + 90 + CE + EB + 80 = 600$ km, d'où $CE + EB = 390$ km.
D'après le deuxième renseignement, $AC + CD + DE + EB + BA = 700$ km.
Donc $105 + 90 + 225 + EB + 80 = 700$ km, d'où $EB = 200$ km.
Puisque $EB = 200$ km et $CE + EB = 390$ km, alors $CE = 190$ km. La distance de C à E est de 190 km.

2. (a) Voici une série de coups qui fonctionne :

Numéro du coup	P	Q	R	S	Remarque
	9	9	1	5	
1	8	8	4	4	3 billes ajoutées à R
2	7	7	7	3	3 billes ajoutées à R
3	6	6	6	6	3 billes ajoutées à S

D'autres séries de coups sont possibles.

(b) i. Le nombre total de billes est égal à $31 + 27 + 27 + 7$, ou 92. À la fin, il doit donc y avoir 23 billes dans chaque seau.
Voici une série de coups qui fonctionne :

Numéro du coup	P	Q	R	S	Remarque
	31	27	27	7	
1	30	26	26	10	3 billes ajoutées à S
2	29	25	25	13	3 billes ajoutées à S
3	28	24	24	16	3 billes ajoutées à S
4	27	23	23	19	3 billes ajoutées à S
5	26	22	22	22	3 billes ajoutées à S
6	25	21	21	25	3 billes ajoutées à S
7	24	24	20	24	3 billes ajoutées à Q
8	23	23	23	23	3 billes ajoutées à R

D'autres séries de coups sont possibles.

ii. Au départ, le seau P contient 31 billes.
On veut que ce seau contienne 23 billes à la fin. Il faut donc diminuer le nombre de billes de 8. Or, dans un coup permis, le nombre de billes peut seulement diminuer de 1 (il doit diminuer de 1 ou augmenter de 3).
Il faut donc un minimum de 8 coups pour diminuer le nombre de billes dans le seau P de 31 à 23 (il se peut que l'on doive aussi en ajouter en chemin, ce qui ajoutera des coups).
Il faut donc au moins 8 coups permis pour qu'il y ait le même nombre de billes dans tous les seaux.
(Dans la partie (i), on a montré qu'il était possible de réussir en 8 coups. Donc, le minimum de coups est bien 8.)

(c) *Solution 1*
Au départ, les seaux contiennent respectivement 10, 8, 11 et 7 billes, pour un total de 36 billes. Pour que chaque seau contienne le même nombre de billes, il faudrait que chacun en contienne $36 \div 4$, ou 9.
Lors d'un coup permis, le nombre de billes dans un seau peut diminuer de 1 ou augmenter de 3.
Si un seau contient un nombre pair n de billes à un moment donné, il en contiendra $n - 1$ ou $n + 3$ après un coup permis, c'est-à-dire un nombre impair.
De même, si un seau contient un nombre impair de billes à un moment donné, il en contiendra un nombre pair après un coup permis.
Or au départ, deux seaux contiennent un nombre pair de billes et deux seaux en contiennent un nombre impair.
Après le premier coup permis, les deux seaux qui contenaient un nombre pair de billes en contiendront un nombre impair, tandis que les deux seaux qui contenaient un nombre impair de billes en contiendront un nombre pair.
Cela nous ramène à la situation initiale, soit deux seaux qui contiennent un nombre pair de billes et deux seaux qui contiennent un nombre impair de billes.
Après n'importe quel coup permis, on revient donc toujours à cette même situation.
Il est donc impossible d'en arriver à une situation dans laquelle les quatre seaux contiennent exactement 9 billes, car deux seaux contiendront toujours un nombre pair de billes.

Solution 2
Au départ, les seaux contiennent respectivement 10, 8, 11 et 7 billes, pour un total de 36 billes. Pour que chaque seau contienne le même nombre de billes, il faudrait que chacun en contienne $36 \div 4$, ou 9.
Lors d'un coup permis, le nombre de billes dans un seau peut diminuer de 1 ou augmenter de 3.

On montrera qu'il est impossible d'en arriver à une situation où chaque seau contient 9 billes en démontrant la propriété suivante :

> Si, à un moment donné, la différence entre le nombre de billes dans n'importe quels deux seaux est un multiple de 4, alors avant le dernier coup permis, cette situation existait aussi.

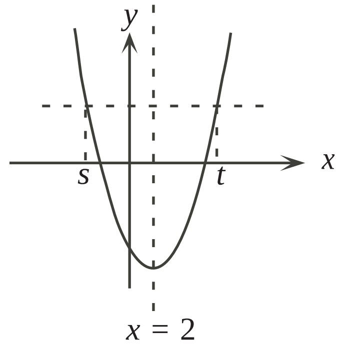
Supposons qu'à un moment donné la différence entre le nombre de billes dans n'importe quels deux seaux est un multiple de 4. (On sait que cette situation se produirait à la fin, car il y aurait alors une différence de 0 entre les nombres de billes dans les sacs et 0 est multiple de 4.)
Soit a, b, c et d les nombres respectifs de billes dans les seaux P, Q, R et S.
On choisit n'importe quels deux seaux, par exemple, A et B. Avant le dernier coup, ces deux seaux contenaient chacun 1 bille de plus (soit $a + 1$ et $b + 1$, ce qui conserve la différence) ou un seau en contenait 1 de plus et l'autre en contenait 3 de moins (soit $a+1$ et $b - 3$ ou bien $a - 3$ et $b + 1$, ce qui change la différence de 4).
Donc, avant ce coup, les différences entre les nombres de billes dans les seaux étaient des multiples de 4.
Pour en arriver à 9 billes dans chaque seau, il faudrait donc que les différences, entre les nombres de billes dans n'importe quels deux seaux, soient toujours des multiples de 4.
Or, au départ, cette situation n'est pas vraie. En effet, les seaux contiennent 10, 8, 11 et 7 billes et $11 - 10$ n'est pas un multiple de 4).
Il est donc impossible d'arriver à 9 billes dans chaque seau.

3. (a) Si $f(x) = 0$, alors $x^2 - 4x - 21 = 0$.
On factorise le membre de gauche pour obtenir $(x - 7)(x + 3) = 0$, d'où $x = 7$ ou $x = -3$.
Les valeurs de x sont donc 7 et -3. (On aurait pu résoudre en employant la formule pour une équation du second degré.)

(b) *Solution 1*
On complète le carré dans l'équation initiale :

$$f(x) = x^2 - 4x - 21 = x^2 - 4x + 4 - 4 - 21 = (x - 2)^2 - 25$$

La parabole d'équation $y = f(x)$ a donc pour axe de symétrie la droite verticale définie par $x = 2$. (On aurait pu obtenir ce résultat par symétrie, à partir des résultats de la partie (a).)
Si $f(s) = f(t)$, alors s et t sont situés de part et d'autre de l'axe de symétrie, à la même distance de $x = 2$.



Donc, la moyenne de s et de t est égale à 2. On a donc $\frac{1}{2}(s+t) = 2$, ou $s + t = 4$.

Solution 2
On procède de façon algébrique :

$$\begin{aligned} s^2 - 4s - 21 &= t^2 - 4t - 21 \\ s^2 - t^2 - 4s + 4t &= 0 \\ (s+t)(s-t) - 4(s-t) &= 0 \\ (s+t-4)(s-t) &= 0 \end{aligned}$$

Donc $s + t - 4 = 0$ ou $s - t = 0$.
Puisque s et t sont des nombres différents, alors $s - t \neq 0$.
Donc $s + t - 4 = 0$, ou $s + t = 4$.

(c) *Solution 1*
On procède de façon algébrique, comme dans la solution précédente :

$$\begin{aligned} (a^2 - 4a - 21) - (b^2 - 4b - 21) &= 4 \\ a^2 - b^2 - 4a + 4b &= 4 \\ (a+b-4)(a-b) &= 4 \end{aligned}$$

Puisque a et b sont des entiers, alors $a+b-4$ et $a-b$ le sont aussi. Pour résoudre l'équation, on cherche des entiers dont le produit est égal à 4.
On examine les possibilités à l'aide d'un tableau. L'expression $2a-4$, dans la 3e colonne, est obtenue en additionnant les expressions $a+b-4$ et $a-b$. Elle nous permet de déterminer la valeur de a et de là, celle de b.

$a+b-4$	$a-b$	$2a-4$	a	b
4	1	5	$\frac{9}{2}$	$\frac{7}{2}$
2	2	4	4	2
1	4	5	$\frac{9}{2}$	$\frac{1}{2}$
-4	-1	-5	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
-2	-2	-4	0	2
-1	-4	-5	$-\frac{1}{2}$	$\frac{7}{2}$

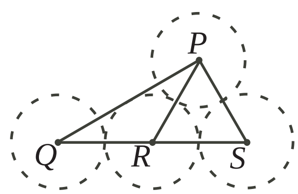
La solution à valeurs entières strictement positives est $(a, b) = (4, 2)$.
(On aurait pu réduire le travail dans le tableau en remarquant que si $a + b - 4 = x$ et $a - b = y$, alors $2a = x + y$, ce qui indique que la valeur de $x + y$ (soit la somme des valeurs de $a + b - 4$ et de $a - b$) doit être paire, ce qui élimine toutes les lignes du tableau à l'exception de deux.)

Solution 2
D'après la partie (b), la parabole d'équation $y = f(x)$ a pour sommet $(2, -25)$.
Puisque l'équation de la parabole a un premier coefficient égal à 1, la parabole est congruente à la parabole d'équation $y = x^2$ et elle est orientée vers le haut.
Sur la parabole d'équation $y = x^2$, les points de treillis, vers la droite à partir du sommet, sont $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 4)$, $(3, 9)$, $(4, 16)$, et ainsi de suite. Les différences verticales successives sont 1, 3, 5, 7, etc.
Il existe une régularité semblable si on arrive de la gauche vers le sommet.
Les différences verticales successives sont :

$$\ldots, -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, \ldots$$

Puisque les paraboles sont congruentes et orientées vers le haut, cette même régularité existe pour la parabole d'équation $y = f(x)$. Pour que $f(a) - f(b) = 4$, a et b étant des entiers, il faut trouver une séquence de différences consécutives dont la somme est égale à 4 ou à -4 (selon que a ou b est plus à gauche).
Les seules séquences possibles sont $(-3), (-1)$ et $1, 3$, qui donnent $(-3) + (-1) = (-4)$ et $1 + 3 = 4$. Dans le premier cas, on doit se déplacer de 2 vers la gauche de l'axe de symétrie d'équation $x = 2$. On a donc $a = 0$ et $b = 2$. (Dans ce cas, a n'est pas un entier strictement positif.) Dans le deuxième cas, on doit se déplacer de 2 vers la droite de l'axe de symétrie. On a donc $a = 4$ et $b = 2$.
Donc $a = 4$ et $b = 2$.

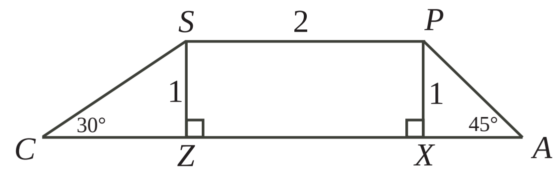
4. (a) On trace les segments PQ, PR, PS, RQ et RS.
Puisque les cercles de centres Q, R et S sont tangents à BC, alors QR et RS sont parallèles à BC (les centres Q, R et S sont situés à 1 unité au-dessus de BC).
Donc, le segment QS passe par le point R.
Lorsqu'on joint les centres de deux cercles tangents, le segment obtenu passe par le point de contact. La longueur de ce segment est donc égale à la somme des rayons.
Donc $QR = RS = PR = PS = 1 + 1 = 2$.



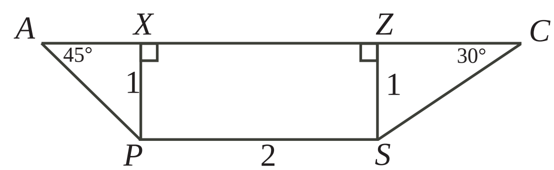
Puisque $PR = PS = RS$, le triangle PRS est équilatéral. Donc $\angle PSR = \angle PRS = 60°$.
Puisque $\angle PRS = 60°$ et que QRS est un segment de droite, alors $\angle QRP = 180° - 60°$, ou $\angle QRP = 120°$.
Puisque $QR = RP$, le triangle QRP est isocèle. Donc $\angle PQR = \frac{1}{2}(180° - 120°)$, ou $\angle PQR = 30°$.
Puisque $\angle PQS = 30°$ et $\angle PSQ = 60°$, alors $\angle QPS = 180° - 30° - 60°$, ou $\angle QPS = 90°$.
Le triangle PQS est donc un triangle remarquable 30°-60°-90°.

(b) D'après la partie (a), les segments QS et BC sont parallèles.
De même, puisque P et S sont situés à 1 unité du segment AC, alors PS est parallèle à AC.
Puisque P et Q sont situés à 1 unité du segment AB, alors PQ est parallèle à AB.
Donc, les côtés du triangle PQS sont parallèles aux côtés correspondants du triangle ABC.

Donc, les angles du triangle ABC sont respectivement égaux aux angles correspondants du triangle PQS. Le triangle ABC est donc un triangle remarquable 30°-60°-90°.
Si on réussit à déterminer la longueur d'un côté du triangle ABC, on peut déterminer la longueur de ses autres côtés en utilisant le rapport des longueurs de côtés d'un triangle remarquable 30°-60°-90°.
On considère le côté AC.
Puisque le cercle de centre P est tangent aux côtés AB et AC, la droite qui passe par les points A et P est la bissectrice de l'angle BAC. Donc $\angle PAC = 45°$.
De même, la droite qui passe par les points C et S est la bissectrice de l'angle ACB. Donc $\angle SCA = 30°$.
On considère le trapèze $APSC$, c'est-à-dire

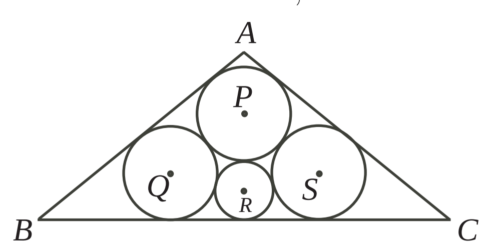


ou



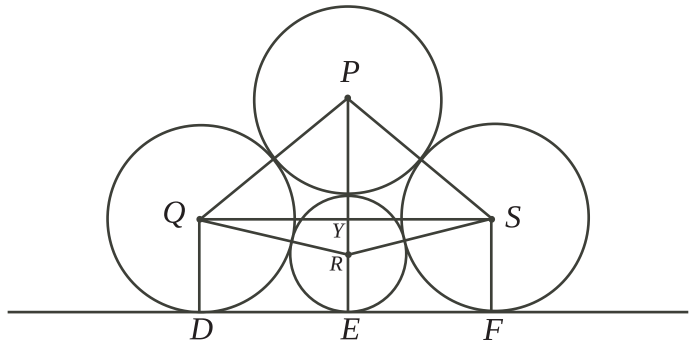
selon la perspective choisie. Aux points P et S, on abaisse des perpendiculaires PX et SZ au côté AC.
Puisque PS est parallèle à AC et que PX et SZ sont perpendiculaires à AC, alors $PXZS$ est un rectangle. Donc $XZ = PS = 2$.
Puisque le triangle AXP est rectangle en X, que $PX = 1$ (le rayon du cercle) et que $\angle PAX = 45°$, alors $AX = PX = 1$.
Puisque le triangle CZS est rectangle en Z, que $SZ = 1$ (le rayon du cercle) et que $\angle SCZ = 30°$, alors $CZ = \sqrt{3}SZ$, ou $CZ = \sqrt{3}$ (puisque le triangle SZC est un triangle remarquable 30°-60°-90°).
Donc $AC = 1 + 2 + \sqrt{3}$, ou $AC = 3 + \sqrt{3}$.
Puisque le triangle ABC est un triangle remarquable 30°-60°-90°, car $\angle ACB = 60°$ et $\angle CAB = 90°$, alors $BC = 2AC = 6 + 2\sqrt{3}$ et $AB = \sqrt{3}AC = \sqrt{3}(3 + \sqrt{3})$, ou $AB = 3\sqrt{3} + 3$.
Dans le triangle ABC, on a donc $AC = 3 + \sqrt{3}$, $AB = 3\sqrt{3} + 3$ et $BC = 6 + 2\sqrt{3}$.

(c) Après les transformations décrites dans l'énoncé, on obtient la figure suivante.



Aux points Q, R et S, on abaisse des perpendiculaires QD, PE et SF au côté BC. Puisque les cercles de centres Q, R et S sont tangents au côté BC, alors D, E et F sont les points de contact de ces cercles avec le côté BC.
Donc $QD = SF = 1$ et $RE = r$.
On trace les segments QR, RS, PS, PQ et PR.

Puisqu'on a joint des centres de cercles tangents, alors $PQ = PS = 2$
et $QR = RS = PR = 1 + r$.
On trace QS.
Par symétrie, PRE est un segment de droite (c.-à-d. que PE passe par le point R).
Puisque QS est parallèle à BC, comme dans les parties (a) et (b), alors QS est perpendiculaire à PR et ces segments se coupent en Y.



Puisque $QD = 1$, alors $YE = 1$. Puisque $RE = r$, alors $YR = 1 - r$.
Puisque $QR = 1 + r$, $YR = 1 - r$ et que le triangle QYR est rectangle en Y, alors d'après le théorème de Pythagore :

$$QY^2 = QR^2 - YR^2 = (1+r)^2 - (1-r)^2 = (1 + 2r + r^2) - (1 - 2r + r^2) = 4r$$

Puisque $PR = 1 + r$ et $YR = 1 - r$, alors $PY = PR - YR = 2r$.
Puisque le triangle PYQ est rectangle en Y, alors :

$$\begin{aligned} PY^2 + YQ^2 &= PQ^2 \\ (2r)^2 + 4r &= 2^2 \\ 4r^2 + 4r &= 4 \\ r^2 + r - 1 &= 0 \end{aligned}$$

On utilise la formule pour résoudre cette équation du second degré.
On obtient $r = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(-1)}}{2}$, ou $r = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.
Puisque $r > 0$, alors $r = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ (ce qui est l'inverse du célèbre nombre d'or).