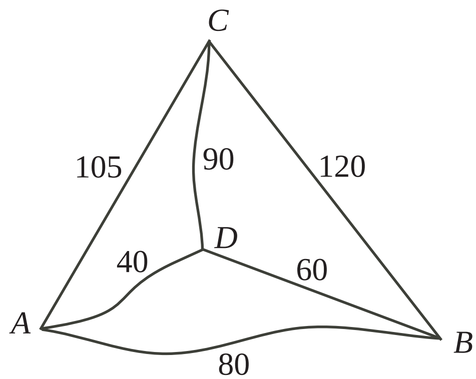
Concours Hypatie 2007 (11^e année – Sec. V)
le mercredi 18 avril 2007

1. La figure représente quatre villes, A, B, C et D, ainsi que les distances entre elles, en kilomètres.



   (a) Paola doit partir de A, se rendre à chaque autre ville exactement une fois, puis revenir à A. Voici un exemple d'un trajet possible : $A \to B \to D \to C \to A$
   Écrire tous les trajets que Paola pourrait parcourir.

   (b) Indiquer un trajet dont la longueur est un minimum et un trajet dont la longueur est un maximum. Expliquer comment la réponse a été obtenue.

   (c) Juste avant son départ de A, Paola apprend que :
   – elle doit visiter une cinquième ville E.
   – E est reliée directement à chacune des villes A, B, C et D, et
   – E doit être la troisième ville qu'elle visite dans son trajet.
   Donc, son trajet aura la forme $A \to$ ___ $\to$ ___ $\to E \to$ ___ $\to A$.
   Combien y a-t-il de tels trajets possibles ? Expliquer comment la réponse a été obtenue.

   (d) Le trajet $A \to D \to C \to E \to B \to A$ a une longueur de 600 km.
   Le trajet $A \to C \to D \to E \to B \to A$ a une longueur de 700 km.
   Il y a une distance de 225 km de D à E.
   Quelle est la distance de C à E ? Expliquer comment la réponse a été obtenue.

2. Osvaldo a quatre seaux, soit P, Q, R et S, contenant chacun des billes. Un *coup permis* consiste à prendre une bille de chacun de trois seaux et de les déposer dans le quatrième seau.

   (a) Au départ, les seaux contiennent respectivement 9, 9, 1 et 5 billes. Décrire une série de coups permis qui feront en sorte qu'il y aura 6 billes dans chaque seau.

   (b) Supposons qu'au départ, les seaux contiennent respectivement 31, 27, 27 et 7 billes. Après un certain nombre de coups permis, tous les seaux contiennent le même nombre de billes.

      i. Décrire une série de coups permis qui feront en sorte que tous les seaux auront le même nombre de billes.

      ii. Expliquer pourquoi il faut au moins 8 coups permis pour qu'il y ait le même nombre de billes dans tous les seaux.

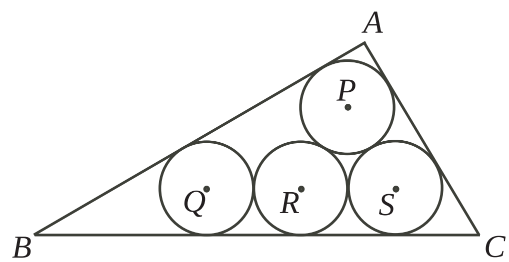
   (c) On recommence avec des seaux qui contiennent respectivement 10, 8, 11 et 7 billes au départ. Expliquer pourquoi il n'existe aucune série de coups permis qui font en sorte qu'il y ait un même nombre de billes dans tous les seaux.

3. On considère une fonction polynôme du second degré, $f(x) = x^2 - 4x - 21$.
   (a) Déterminer toutes les valeurs de x pour lesquelles $f(x) = 0$ (c'est-à-dire $x^2 - 4x - 21 = 0$).
   (b) Sachant que s et t sont des nombres réels différents tels que $s^2 - 4s - 21 = t^2 - 4t - 21$ (c'est-à-dire $f(s) = f(t)$), déterminer les valeurs possibles de $s + t$. Expliquer comment la réponse a été obtenue.
   (c) Sachant que a et b sont des entiers strictement positifs différents tels que

$$(a^2 - 4a - 21) - (b^2 - 4b - 21) = 4$$

   déterminer toutes les valeurs possibles de a et de b. Expliquer comment la réponse a été obtenue.

4. Dans la figure suivante, quatre cercles de rayon 1 et de centres P, Q, R et S sont tangents à l'un ou à l'autre cercle et à des côtés du triangle ABC.



   (a) Déterminer la mesure des angles du triangle PQS. Expliquer comment la réponse a été obtenue.
   (b) Déterminer la longueur de chaque côté du triangle ABC. Expliquer comment la réponse a été obtenue.
   (c) On diminue le rayon du cercle de centre R de manière que
   – le cercle de centre R demeure tangent au côté BC,
   – le cercle de centre R demeure tangent aux trois autres cercles, et
   – le cercle de centre P devienne tangent aux trois autres cercles.
   Ceci a pour effet de changer la grandeur et la forme du triangle ABC. Déterminer le nouveau rayon r du cercle de centre R.