Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique
Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Les solutions de 8ième année suit les solutions de 7ième année

Concours Gauss 2007

(7$^{\text{e}}$ et 8$^{\text{e}}$ années – Secondaire I et II)

le mercredi 16 mai 2007

Solutions

Personnel du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique

Ed Anderson
Lloyd Auckland
Steve Brown
Jennifer Couture
Fiona Dunbar
Jeff Dunnett
Barry Ferguson
Judy Fox
Sandy Graham
Judith Koeller
Joanne Kursikowski
Angie Lapointe
Dean Murray
Matthew Oliver
Larry Rice
Linda Schmidt
Kim Schnarr
Jim Schurter
Carolyn Sedore
Ian VanderBurgh
Troy Vasiga

Comité du concours Gauss

Mark Bredin (président), St. John's Ravenscourt School, Winnipeg, MB
Sandy Emms Jones (présidente adjointe), Forest Heights C.I., Kitchener, ON
Ed Barbeau, Toronto, ON
Kevin Grady, Cobden District P.S., Cobden, ON
John Grant McLoughlin, University of New Brunswick, Fredericton, NB
JoAnne Halpern, Thornhill, ON
David Matthews, University of Waterloo, Waterloo, ON
Allison McGee, All Saints C.H.S., Kanata, ON
David Switzer, Sixteenth Ave. P.S., Richmond Hill, ON
Tanya Thompson, Collingwood C.I., Collingwood, ON
Chris Wu, Elia M.S., Toronto, ON

Les solutions de 8ième année suit les solutions de 7ième année

7e année

1. On a : $(4-3)\times 2 = 1\times 2 = 2$

Réponse : (B)

2. Puisque mille est égal à 1000, alors dix mille est égal à 10 000.

Réponse : (C)

3. Lorsqu'on soustrait 5 du nombre manquant, on obtient 2. Pour obtenir le nombre manquant, on ajoute donc 5 à 2 pour obtenir 7. (Vérification : $7-5=2$.)

Réponse : (A)

4. *Solution 1*
80 % correspond à la fraction $\frac{80}{100}$, ou $\frac{4}{5}$.
Donc, Madih a obtenu $\frac{4}{5}$ des 50 points, soit $\frac{4}{5}\times 50$ points, ou 40 points.

Solution 2
Madih a obtenu 80 % des 50 points, soit $\frac{80}{100}\times 50$ points, ce qui donne $\frac{80}{2}$ points, ou 40 points.

Réponse : (A)

5. *Solution 1*

$$\begin{aligned}
\frac{7}{10}+\frac{3}{100}+\frac{9}{1000} &= \frac{700}{1000}+\frac{30}{1000}+\frac{9}{1000} && \text{(on a utilisé un dénominateur commun)}\\
&= \frac{739}{1000}\\
&= 0{,}739
\end{aligned}$$

Solution 2

$$\begin{aligned}
\frac{7}{10}+\frac{3}{100}+\frac{9}{1000} &= 0{,}7+0{,}03+0{,}009 && \text{(on a écrit chaque fraction sous forme décimale)}\\
&= 0{,}739
\end{aligned}$$

Réponse : (D)

6. *Solution 1*
Marc a $\frac{3}{4}$ d'un dollar, soit 75 cents.
Caroline a $\frac{3}{10}$ d'un dollar, soit 30 cents.
Ensemble ils ont 105 cents $(75+30)$, c'est-à-dire 1,05 $.

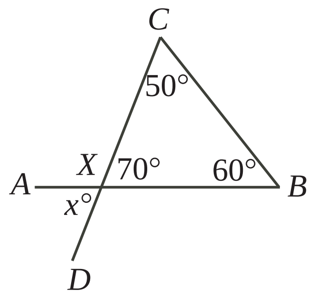
Solution 2
Puisque Marc a $\frac{3}{4}$ d'un dollar et que Caroline a $\frac{3}{10}$ d'un dollar, ils ont un total de $\frac{3}{4}+\frac{3}{10}$ d'un dollar, c'est-à-dire $\frac{15}{20}+\frac{6}{20}$ d'un dollar, ou $\frac{21}{20}$ d'un dollar.
Puisque $\frac{21}{20}$ est équivalent à $\frac{105}{100}$, ils ont 1,05 $ en tout.

Réponse : (E)

7. D'après le diagramme, l'élève qui a mangé le plus de pommes en a mangé 6. Donc, Lorenzo a mangé 6 pommes. L'élève qui a mangé le moins de pommes en a mangé 1. Donc, Joanne a mangé 1 pomme. Donc, Lorenzo a mangé 5 pommes de plus que Joanne $(6-1=5)$.

Réponse : (B)

8. Puisque la somme de la mesure des angles d'un triangle est égale à 180°, alors l'angle manquant du triangle mesure $180° - 50° - 60°$, c'est-à-dire 70°.
On a donc :



Puisque $\angle BXC = 70°$, alors $\angle AXC = 180° - \angle BXC$, c'est-à-dire que $\angle AXC = 110°$.
Puisque $\angle AXC = 110°$, alors $\angle DXA = 180° - \angle AXC$, c'est-à-dire que $\angle DXA = 70°$.
Donc $x = 70$.
(On aurait pu utiliser le fait que deux angles opposés par le sommet sont congrus.
Donc $\angle DXA = \angle BXC = 70°$.)

Réponse : (E)

9. Lorsqu'on regarde le mot GARE de l'intérieur de l'édifice, l'ordre des lettres est inversé et chaque lettre paraît en sens inverse. Le mot paraît sous la forme ƎЯAӘ.

Réponse : (D)

10. Puisqu'une grande boîte coûte 3 \$ de plus qu'une petite boîte et que les deux boîtes coûtent 15 \$ en tout, on épargnerait 3 \$ si on remplaçait la grande boîte par une petite. Ainsi deux petites boîtes coûteraient 12 \$.
Donc, une petite boîte coûte 6 \$.

Réponse : (D)

11. Puisque chaque nombre de la suite de Fibonacci, à partir du 2, est égal à la somme des deux nombres précédents, la suite continue comme suit : $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21$.
Donc, le nombre 21 paraît dans la suite.

Réponse : (B)

12. La probabilité pour que Marie gagne est égale au nombre de billets qu'elle a achetés divisé par le nombre total de billets de la loterie.
Or, on sait que la probabilité pour qu'elle gagne est égale à $\frac{1}{15}$.
Puisqu'il y a 120 billets en tout, on veut exprimer $\frac{1}{15}$ comme une fraction ayant 120 au dénominateur. Puisque $120 \div 15 = 8$, on doit multiplier le numérateur et le dénominateur de $\frac{1}{15}$ par 8 pour obtenir un dénominateur de 120.
Donc, la probabilité pour que Marie gagne est égale à $\dfrac{1 \times 8}{15 \times 8}$, c'est-à-dire à $\dfrac{8}{120}$.
Donc, Marie a acheté 8 billets.

Réponse : (D)

13. *Solution 1*

On regarde chacun des cinq choix et on essaie de les former avec des timbres de 3 cents et de 5 cents :

(A) : Le 7 ne peut être formé, car on ne pourrait utiliser plus d'un timbre de 5 cents et deux timbres de 3 cents. (On peut essayer les diverses possibilités !)
(B) : $13 = 5 + 5 + 3$
(C) : Le 4 ne peut être la réponse, car il existe un plus grand affranchissement, soit 7 ¢, qui ne peut être obtenu.
(D) : $8 = 5 + 3$
(E) : $9 = 3 + 3 + 3$

Donc, la réponse doit être 7.
(On n'a pas justifié que l'affranchissement de 7 ¢ est le plus grand qu'il est impossible d'obtenir. On a tout simplement déterminé que parmi les choix, la réponse doit être 7 ¢ ! Dans la Solution 2, on démontre que le plus grand affranchissement est celui de 7 ¢.)

Solution 2

On utilise un tableau pour déterminer les entiers qui peuvent être exprimés à l'aide de 3 et de 5 :

Entier	Combinaison
1	Ne peut être obtenu
2	Ne peut être obtenu
3	3
4	Ne peut être obtenu
5	5
6	$3 + 3$
7	Ne peut être obtenu
8	$5 + 3$
9	$3 + 3 + 3$
10	$5 + 5$
11	$5 + 3 + 3$

À partir de 11, tous les nombres peuvent être obtenus, car les trois derniers nombres du tableau peuvent être obtenus. On peut ainsi ajouter 3 à chacun des nombres 9, 10 et 11 pour obtenir des combinaisons pour 12, 13 et 14 et ainsi de suite.
D'après le tableau, le plus grand nombre qu'il est impossible d'obtenir est le 7.

Réponse : (A)

14. On écrit tous les ordres possibles en utilisant les lettres H, R et N pour Harry, Ron et Neville.
On obtient HNR, HRN, NHR, NRH, RHN, RNH.
(Il est plus facile de les écrire en ordre alphabétique pour bien les suivre et éviter des répétitions ou des oublis.)
Il y a 6 ordres possibles.

Réponse : (B)

15. *Solution 1*

Les diviseurs de 40 sont 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20 et 40.
Les diviseurs de 72 sont 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36 et 72.
Les nombres qui paraissent dans les deux listes sont 1, 2, 4 et 8. Il y en a quatre.

Solution 2
Le plus grand commun diviseur de 40 et de 72 est 8.
Tout diviseur commun de 40 et de 72 est aussi un diviseur du plus grand commun diviseur, soit de 8, et vice versa.
Or, les diviseurs de 8 sont 1, 2, 4 et 8. Il y en a quatre.

Réponse : (C)

16. Selon la première balance, le carré et le cercle ont une masse totale de 8.
Selon la deuxième balance, le carré et deux cercles ont une masse totale de 11.
Puisque la deuxième balance soutient un cercle de plus que la première et qu'elle soutient une masse supplémentaire de 3, le cercle ajouté a une masse de $11 - 8$, c'est-à-dire de 3.
Selon la troisième balance, un cercle et deux triangles ont une masse totale de 15. Puisque le cercle a une masse de 3, les deux triangles ont une masse totale de $15 - 3$, c'est-à-dire de 12.
Donc, un triangle a une masse de $12 \div 2$, c'est-à-dire de 6.

Réponse : (D)

17. La location du kayak pour 3 heures coûte 3×5 \$, ou 15 \$. Puisqu'une location de 3 heures coûte 30 \$ en tout, le prix fixe pour la pagaie est de 30 \$ − 15 \$, ou 15 \$.
Le coût total d'une location de 6 heures est de 15 \$ + (6 × 5 \$), soit 15 \$ + 30 \$, ou 45 \$.

Réponse : (C)

18. *Solution 1*
L'anniversaire de Julie arrive 104 jours $(37 + 67)$ avant celui de Frédéric.
Lorsqu'on divise 104 par 7, soit le nombre de jours dans une semaine, on obtient un quotient de 14 et un reste de 6.
À partir de l'anniversaire de Frédéric, un lundi, on recule de 14 semaines (ou 98 jours) et on est un lundi. Pour arriver à l'anniversaire de Julie, on doit reculer de 6 jours de plus. Le 6^{e} jour avant un lundi est un mardi.
Donc, l'anniversaire de Julie tombait un mardi.

Solution 2
Un intervalle de 37 jours correspond à 5 semaines et 2 jours. Puisque l'anniversaire de Frédéric est un lundi et que l'anniversaire de Pat arrive 37 jours avant celui de Frédéric, l'anniversaire de Pat arrive un samedi.
Un intervalle de 67 jours correspond à 9 semaines et 4 jours. Puisque l'anniversaire de Pat est un samedi et que l'anniversaire de Julie arrive 67 jours avant celui de Pat, l'anniversaire de Julie tombait un mardi.

Réponse : (D)

19. Les entiers positifs inférieurs à 1000 qui se terminent par 77 sont 77, 177, 277, 377, 477, 577, 677, 777, 877, 977.
Les entiers positifs inférieurs à 1000 qui commencent par 77 sont 77, 770, 771, 772, 773, 774, 775, 776, 777, 778, 779.
Il n'y a aucune autre façon d'obtenir des nombres inférieurs à 1000 qui contiennent au moins deux chiffres 7 écrits côte-à-côte.
Il y a 10 nombres dans la première liste et 11 nombres dans la deuxième. Puisque 2 nombres paraissent dans les deux listes, le nombre total de nombres dans ces listes est égal à $10 + 11 - 2$, soit 19.

Réponse : (E)

20. Puisque le carré a un périmètre de 48, ses côtés mesurent $48 \div 4$, ou 12.
L'aire du carré est donc égale à 12×12, ou 144.
L'aire du triangle est égale à $\frac{1}{2} \times 48 \times x$, ou $24x$.
Puisque le carré et le triangle ont la même aire, alors $24x = 144$, d'où $x = 6$.

Réponse : (C)

21. *Solution 1*
En partant de la lettre K, on peut choisir deux chemins. À chaque lettre A, on peut choisir deux chemins. À chaque lettre R, on peut choisir deux chemins.
Donc, le nombre total de chemins est égal à $2 \times 2 \times 2$, ou 8.
(On peut le vérifier en traçant chaque chemin.)

Solution 2
Chaque chemin doit épeler le mot KARL.
Il y a 1 chemin qui se termine au premier L. Ce chemin passe par le 1^er^ A et le 1^er^ R.
Il y a 3 chemins qui se terminent au deuxième L. Le premier chemin passe par le 1^er^ A et le 1^er^ R. Le deuxième chemin passe par le 1^er^ A et le 2^e^ R. Le troisième chemin passe par le 2^e^ A et le 2^e^ R.
Il y a 3 chemins qui se terminent au troisième L. Le premier chemin passe par le 1^er^ A et le 2^e^ R. Le deuxième chemin passe par le 2^e^ A et le 2^e^ R. Le troisième chemin passe par le 2^e^ A et le 3^e^ R.
Il y a 1 chemin qui se termine au quatrième L. Le chemin passe par le dernier A et le dernier R.
Le nombre total de chemins qui se terminent par un L est égal à $1 + 3 + 3 + 1$, soit 8. Il s'agit du nombre de chemins qui épèlent le mot KARL.

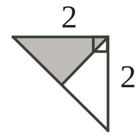
Réponse : (D)

22. Puisque les quatre nombres ont une moyenne de 4, ils ont une somme de 4×4, ou 16.
Pour que la différence entre le plus grand et le plus petit de ces nombres soit aussi grande que possible, on aimerait que le plus petit nombre soit aussi petit que possible, soit 1, et que le plus grand nombre, qu'on appellera G, soit aussi grand que possible.
Puisqu'un des nombres est 1, la somme des autres est égale à $16 - 1$, ou 15.
Pour que G soit aussi grand que possible, il faut que les deux autres nombres soient aussi petits que possible. Or, tous les nombres sont diffŕents. Donc, ces deux autres nombres doivent être 2 et 3. Donc, G est égal à $15 - 2 - 3$, ou 10.
La moyenne des deux autres nombres est donc égale à $\dfrac{2+3}{2}$, c'est-à-dire à $\dfrac{5}{2}$, ou $2\frac{1}{2}$.

Réponse : (B)

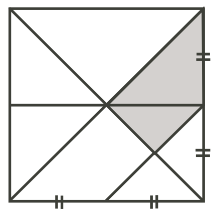
23. *Solution 1*
Puisqu'on traite de fractions de l'aire totale, on peut choisir une valeur commode pour la longueur des côtés du carré.
On suppose donc que les côtés ont une longueur de 4 qui se divise facilement en demis et en quarts.
Le carré a donc une aire de 4×4, soit 16.
Les deux diagonales du carré le divisent en quatre triangles de même aire. Chaque triangle a donc une aire de $16 \div 4$, soit 4).
La surface ombrée correspond à un de ces triangles dont on a enlevé un petit triangle blanc. Son aire est donc égale à 4 moins l'aire de ce petit triangle blanc.

Le petit triangle blanc est la moitié d'un autre triangle.



La base et la hauteur de cet autre triangle ont une longueur qui est la moitié de la longueur de côté du carré. Le triangle a donc une base de 2 et une hauteur de 2. Il a donc une aire de $\frac{1}{2} \times 2 \times 2$, soit 2.
Le petit triangle blanc a donc une aire de $\frac{1}{2} \times 2$, soit 1. La partie ombrée a donc une aire $4 - 1$, soit 3.
L'aire de la partie ombrée est donc $\frac{3}{16}$ de l'aire du carré.

Solution 2
Au centre du carré, on trace une ligne horizontale à travers du carré.



Les deux diagonales du carré le divisent en quatre triangles de même aire. La ligne horizontale coupe un de ces triangles en deux parties de même aire. Donc, la partie ombrée qui est au-dessus de la ligne horizontale a une aire égale à $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$ de l'aire du carré, c'est-à-dire à $\frac{1}{8}$ de l'aire du carré.
L'aire de la partie ombrée qui est en dessous de la ligne horizontale est la moitié de l'aire de l'autre partie ombrée. (On voit que le petit triangle ombré et le petit triangle blanc ont la même forme et ensemble, ils forment un triangle égal au grand triangle ombré.) L'aire du petit triangle ombré est donc égale à $\frac{1}{2} \times \frac{1}{8}$ de l'aire du carré, c'est-à-dire à $\frac{1}{16}$ de l'aire du carré.
L'aire totale de la partie ombrée est donc égale à $(\frac{1}{8} + \frac{1}{16})$ de l'aire du carré, c'est-à-dire à $\frac{3}{16}$ de l'aire du carré.

Réponse : (C)

24. On commence par déterminer la valeur de Q.
Si on porte attention aux chiffres des unités, on voit que le produit de $Q \times Q$ a un chiffre des unités égal à Q. Donc, Q doit être égal à 0, 1, 5 ou 6, car seuls ces chiffres ont cette propriété.
Or, Q ne peut être égal à 0, sinon le produit de PPQ et de Q serait égal à 0. Q ne peut être égal à 1, sinon le produit de PPQ et de Q serait égal à PPQ, qui est un nombre de 3 chiffres. Or, le produit $RQ5Q$ comporte 4 chiffres, Donc, Q doit être égal à 5 ou à 6.
Si Q était égal à 5, alors le multiplicateur Q et le multiplicande PPQ seraient des multiples de 5 et leur produit serait un multiple de 25. Or, le produit $RQ5Q$ aurait la forme $R555$ et un tel nombre, qui se termine par 55, n'est pas un multiple de 25. Donc, Q ne peut être égal à 5.
Donc $Q = 6$.
La multiplication ressemble donc à ce qui suit :

$$\begin{array}{r} PP6 \\ \times \quad 6 \\ \hline R6\,5\,6 \end{array}$$

On commence la multiplication : 6×6 est égal à 36 ; on écrit le chiffre 6 dans la réponse et on a une retenue de 3.

Lorsqu'on multiplie $6 \times P$ et qu'on ajoute la retenue de 3, on obtient un chiffre des unités (qui est placé dans la colonne des dizaines) égal à 5. Donc, le chiffre des unités de $6 \times P$ doit être un 2.
On a donc $P = 2$ ou $P = 7$.
On vérifie chacune de ces possibilités : $6 \times 226 = 1356$ et $6 \times 776 = 4656$. Seul la deuxième réponse se termine par les chiffres 656 comme le produit $R656$.
Donc $P = 7$ et $R = 4$. $P + Q + R$ est égal à $7 + 6 + 4$, soit 17.

Réponse : (E)

25. Pour tenir compte des lettres, il est probablement plus facile d'utiliser un tableau qui indique les lettres qui sont déposées, celles qui sont enlevées et celles qui restent dans la pile, à toutes les 5 minutes.

Heure	Lettres déposées	Lettres enlevées	Lettres qui restent dans la pile (de bas en haut)
12 h 00	1, 2, 3	3, 2	1
12 h 05	4, 5, 6	6, 5	1, 4
12 h 10	7, 8, 9	9, 8	1, 4, 7
12 h 15	10, 11, 12	12, 11	1, 4, 7, 10
12 h 20	13, 14, 15	15, 14	1, 4, 7, 10, 13
12 h 25	16, 17, 18	18, 17	1, 4, 7, 10, 13, 16
12 h 30	19, 20, 21	21, 20	1, 4, 7, 10, 13, 16, 19
12 h 35	22, 23, 24	24, 23	1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22
12 h 40	25, 26, 27	27, 26	1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25
12 h 45	28, 29, 30	30, 29	1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28
12 h 50	31, 32, 33	33, 32	1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31
12 h 55	34, 35, 36	36, 35	1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34
13 h 00	Aucune	34, 31	1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28
13 h 05	Aucune	28, 25	1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22
13 h 10	Aucune	22, 19	1, 4, 7, 10, 13, 16
13 h 15	Aucune	16, 13	1, 4, 7, 10

(À 12 h 55, toutes les 36 lettres ont été déposées. Donc, à partir de 13 h 00, les lettres sont enlevées, mais aucune n'est déposée.)
La 13^{e} lettre est enlevée à 13 h 15.

Réponse : (A)

8^e^ année

1. On a : $(4 \times 12) - (4 + 12) = 48 - 16 = 32$

Réponse : (E)

2. On convertit en forme décimale : $\frac{3}{10} + \frac{3}{1000} = 0{,}3 + 0{,}003 = 0{,}303$.

Réponse : (B)

3. On utilise le diagramme pour déterminer la différence entre le maximum et le minimum à chaque jour.

Jour	Maximum	Minimum	Différence
Lundi	20°	10°	10°
Mardi	20°	15°	5°
Mercredi	25°	25°	0°
Jeudi	30°	10°	20°
Vendredi	25°	20°	5°

La différence entre le maximum et le minimum était la plus grande le jeudi.

Réponse : (D)

4. Lorsqu'on lance le cube, il y a 6 résultats possibles et 2 résultats favorables.
La probabilité d'obtenir un 5 ou un 6 est donc égale à $\frac{2}{6}$, ou $\frac{1}{3}$.

Réponse : (C)

5. Puisque les côtés du cube ont une longueur de x cm, le cube a un volume de x^3 cm^3.
Or, on sait qu'il a un volume de 8 cm^3. Donc $x^3 = 8$, d'où $x = 2$ (la racine cubique de 8).

Réponse : (A)

6. Puisqu'un appel de 3 minutes coûte 0,18 \$, le taux est de $0{,}18 \div 3$ dollars par minute, ou 0,06 \$ par minute.
Un appel de 10 minutes coûte $10 \times 0{,}06$ \$, soit 0,60 \$.

Réponse : (B)

7. Puisque 1000 mètres correspondent à 1 kilomètre, alors 200 mètres correspondent à $\dfrac{200}{1000}$ km, ou 0,2 km.

Réponse : (A)

8. Voici l'âge des enfants : 7, 7, 7, 14, 15.
L'âge moyen des enfants est égal à $\dfrac{7+7+7+14+15}{5}$ ans, c'est-à-dire à $\dfrac{50}{5}$ ans, ou 10 ans.

Réponse : (E)

9. Puisque $x = 5$ et $y = x + 3$, alors $y = 5 + 3$, c'est-à-dire que $y = 8$.
Puisque $y = 8$ et $z = 3y + 1$, alors $z = 3(8) + 1$, d'où $z = 24 + 1$, ou $z = 25$.

Réponse : (B)

10. Voici tous les nombres possibles que l'on peut former avec les chiffres 5, 1 et 9 : 519, 591, 951, 915, 195 et 159.
Le plus grand est 951 et le plus petit est 159.
La différence de ces deux nombres est égale à $951 - 159$, c'est-à-dire à 792.

Réponse : (C)

11. *Solution 1*
Puisque Lili a une taille de 90 cm, que la taille d'Anika est $\frac{4}{3}$ de celle de Lili et que la taille de Sadaf est $\frac{5}{4}$ de celle d'Anika, alors la taille de Sadaf est de $\frac{5}{4} \times \frac{4}{3} \times 90$ cm, c'est-à-dire $\frac{5}{3} \times 90$ cm, soit $\frac{450}{3}$ cm, ou 150 cm.

Solution 2
Puisque Lili a une taille de 90 cm et que la taille d'Anika est $\frac{4}{3}$ de celle de Lili, alors la taille d'Anika est de $\frac{4}{3} \times 90$ cm, c'est-à-dire $\frac{360}{3}$ cm, ou 120 cm.
Puisque Anika a une taille de 120 cm et que la taille de Sadaf est de $\frac{5}{4}$ de la taille d'Anika, alors la taille de Sadaf est de $\frac{5}{4} \times 120$ cm, c'est-à-dire $\frac{600}{4}$ cm, ou 150 cm.

RÉPONSE : (E)

12. *Solution 1*
Puisque $\angle BCA = 40°$ et que le triangle ADC est isocèle, avec $AD = DC$, alors $\angle DAC = \angle ACD = 40°$.
Puisque la somme de la mesure des angles d'un triangle est égale à 180°, alors
$\angle ADC = 180° - \angle DAC - \angle ACD$, c'est-à-dire que $\angle ADC = 180° - 40° - 40°$, ou $\angle ADC = 100°$.
Puisque les angles ADB et ADC sont supplémentaires, alors $\angle ADB = 180° - \angle ADC$, c'est-à-dire que $\angle ADB = 180° - 100°$, ou $\angle ADB = 80°$.
Puisque le triangle ADB est isocèle, avec $AD = DB$, alors $\angle BAD = \angle ABD$.
Donc $\angle BAD = \frac{1}{2}(180° - \angle ADB)$, c'est-à-dire que $\angle BAD = \frac{1}{2}(180° - 80°)$, soit $\angle BAD = \frac{1}{2}(100°)$, ou $\angle BAD = 50°$.
Donc $\angle BAC = \angle BAD + \angle DAC$, c'est-à-dire que $\angle BAC = 50° + 40°$, ou $\angle BAC = 90°$.

Solution 2
Puisque les triangles ABD et ACD sont isocèles, $\angle BAD = \angle ABD$ et $\angle DAC = \angle ACD$.
Puisque ces quatre angles forment les trois angles du triangle ABC, la somme de leur mesure est égale à 180°.
Puisque la mesure de l'angle BAC est égale à la moitié de la somme de la mesure de ces angles (cet angle est formé d'un élément de chaque paire), $\angle BAC = \frac{1}{2}(180°)$, d'où $\angle BAC = 90°$.

RÉPONSE : (D)

13. Pour chaque choix parmi les 2 activités dans les arts, Cathia peut choisir parmi 3 activités dans les sports. Cela fait 2×3 choix, ou 6 choix. Pour chacun de ces 6 choix, elle peut choisir parmi 4 activités en musique. En tout, cela fait 6×4 choix, ou 24 choix.

RÉPONSE : (B)

14. Aux Olympiques de mathématiques de 2007, l'équipe canadienne a remporté 17 médailles sur 100 médailles possibles, ce qui représente 0,17 des médailles possibles.
On écrit les choix de réponse sous forme décimale pour trouver celui qui est le plus près de 0,17 :

(A) $\frac{1}{4} = 0{,}25$ (B) $\frac{1}{5} = 0{,}2$ (C) $\frac{1}{6} = 0{,}166666...$ (D) $\frac{1}{7} = 0{,}142857...$ (E) $\frac{1}{8} = 0{,}125$

Le choix le plus près de 0,17 est $\frac{1}{6}$, c'est-à-dire (C).

RÉPONSE : (C)

15. Voyons ce qui arrive si les entiers sont 5, 6, 7 et 8.
Lorsqu'on divise 5 par 4, on obtient un quotient de 1 et un reste de 1.
Lorsqu'on divise 6 par 4, on obtient un quotient de 1 et un reste de 2.

Lorsqu'on divise 7 par 4, on obtient un quotient de 1 et un reste de 3.
Lorsqu'on divise 8 par 4, on obtient un quotient de 2 et un reste de 0.
La somme des restes est égale à $1 + 2 + 3 + 0$, c'est-à-dire à 6.
(Peu importe le choix des quatre nombres consécutifs, lorsqu'on les divise par 4, l'un aura un reste de 0, l'un aura un reste de 1, l'un aura un reste de 2 et l'un aura un reste de 3.)

Réponse : (A)

16. Supposons que le cercle a un rayon initial de 1. Il a donc une aire initiale de $\pi(1)^2$, c'est-à-dire de π, et une circonférence initiale de $2\pi(1)$, c'est-à-dire de 2π.
Lorsque le rayon est triplé, il prend une valeur de 3.
La nouvelle aire est égale à $\pi(3)^2$, c'est-à-dire à 9π, et la nouvelle circonférence est égale à $2\pi(3)$, c'est-à-dire à 6π. Donc, l'aire est multipliée par 9 et la circonférence est multipliée par 3.

Réponse : (A)

17. Puisque tous les nombres du problème sont des multiples de 1000, on travaillera avec les nombres de milliers de votes, ce qui simplifiera les calculs.
Il y a eu un total de 5219 milliers de votes en tout.
Supposons que le gagnant a reçu x milliers de votes. Ses adversaires ont donc reçu $x-22$ milliers de votes, $x-30$ milliers de votes et $x-73$ milliers de votes, respectivement.
On obtient donc l'égalité suivante entre les nombres de milliers de votes :

$$\begin{aligned} x + (x-22) + (x-30) + (x-73) &= 5219 \\ 4x - 125 &= 5219 \\ 4x &= 5344 \\ x &= 1336 \end{aligned}$$

Donc, le gagnant a reçu 1 336 000 votes.

Réponse : (D)

18. Lorsque le nombre n est doublé, on obtient $2n$.
Lorsqu'on y ajoute y, on obtient $2n + y$.
Lorsqu'on divise ce résultat par 2, on obtient $\frac{1}{2}(2n+y)$, ce qui est équivalent à $n + \dfrac{y}{2}$.
Lorsqu'on soustrait le nombre n, on obtient $\dfrac{y}{2}$.

Réponse : (E)

19. Pour créer la plus grande fraction possible, on choisit le plus grand numérateur possible et le plus petit dénominateur possible.
D'après la figure, le plus grand nombre est z et le plus petit est w. Donc, la plus grande fraction possible est $\dfrac{z}{w}$.

Réponse : (E)

20. *Solution 1*
L'aller de 240 km, à une vitesse de 120 km/h, a pris $240 \div 120$ heures, c'est-à-dire 2 heures.
Le retour de 240 km, à une vitesse de 80 km/h, a pris $240 \div 80$ heures, c'est-à-dire 3 heures.
En tout, elle a parcouru 480 km en 5 heures. Sa vitesse moyenne était donc de $\dfrac{480}{5}$ km/h, c'est-à-dire de 96 km/h.

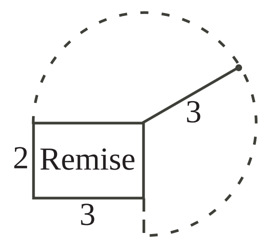
Solution 2
L'aller de 240 km, à une vitesse de 120 km/h, a pris $240 \div 120$ heures, c'est-à-dire 2 heures.
Le retour de 240 km, à une vitesse de 80 km/h, a pris $240 \div 80$ heures, c'est-à-dire 3 heures.
Pendant les 5 heures du trajet, ses vitesses étaient de 120 km/h, 120 km/h, 80 km/h, 80 km/h et 80 km/h. Donc, sa vitesse moyenne était de $\dfrac{120+120+80+80+80}{5}$ km/h, c'est-à-dire de $\dfrac{480}{5}$ km/h, ou 96 km/h.

Réponse : (B)

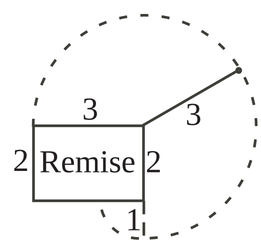
21. L'aire du rectangle $WXYZ$ est égale à 10×6, ou 60.
Puisque l'aire de la partie ombrée est égale à la moitié de celle de $WXYZ$, elle est égale à $\frac{1}{2} \times 60$, ou 30.
Puisque AD et WX sont perpendiculaires, la région ombrée comprend quatre angles droits. Il s'agit donc d'un rectangle.
Puisque le carré $ABCD$ a des côtés de longueur 6, alors $DC = 6$.
Puisque la région ombrée a une aire de 30, alors $PD \times DC = 30$, c'est-à-dire $PD \times 6 = 30$, d'où $PD = 5$.
Puisque $AD = 6$ et $PD = 5$, alors $AP = 1$.

Réponse : (A)

22. Lorsque la corde est étirée sur toute sa longueur, Léo et la corde peuvent balayer un angle de 270°. La région ainsi balayée est $\frac{3}{4}$ de l'intérieur d'un cercle dont le centre est le point d'attache de la corde.



L'aire de cette région est donc $\frac{3}{4}$ de l'aire à l'intérieur d'un cercle de rayon 3, c'est-à-dire $\frac{3}{4} \times \pi(3^2)$, ou $\frac{27}{4}\pi$.
Dans une direction, Léo vient rejoindre le coin supérieur gauche de la remise.
Dans l'autre direction, en bas de la figure, la corde s'étend sur 1 mètre au-delà de la remise.
Léo peut donc se déplacer plus loin, comme l'indique la figure suivante.



Dans cette région, la corde balaie un angle de 90°. L'aire de cette région est donc $\frac{1}{4}$ de l'aire de l'intérieur d'un cercle de rayon 1. Cette aire est égale à $\frac{1}{4} \times \pi(1^2)$, c'est-à-dire $\frac{1}{4}\pi$.
La surface de jeu dans laquelle Léo peut se déplacer a donc une aire totale de $\frac{27}{4}\pi + \frac{1}{4}\pi$, c'est-à-dire $\frac{28}{4}\pi$, ou 7π.

Réponse : (A)

23. *Solution 1*
En utilisant des billets de 5 \$, on peut former n'importe quelle somme qui est un multiple de

5 $, c'est-à-dire qui se termine par un 0 ou un 5.
Pour obtenir une somme de 207 $ à partir d'un multiple de 5 $, en n'ajoutant que des pièces de 2 $, il faut que le multiple de 5 $ se termine par un 5. (S'il se terminait par un 0, on obtiendrait toujours une somme paire en y ajoutant des pièces de 2 $. Cette somme ne pourrait donc pas égaler 207 $.)
Peu importe le multiple de 5 $ qui se termine par un 5, s'il est inférieur à 207 $, on peut toujours y ajouter suffisamment de pièces de 2 $ pour obtenir une somme de 207 $.
Les multiples de 5 qui se terminent par 5 et qui sont inférieurs à 207 sont 5, 15, 25, ..., 195, 205.
Pour compter facilement le nombres de multiples dans cette liste, on peut omettre le chiffre des unités (c'est-à-dire le 5), ce qui donne 0, 1, 2, ..., 19, 20 ; il y a 21 nombres dans cette liste.
Il y a donc 21 multiples de 5 $ auxquels on peut ajouter des pièces de 2 $ pour obtenir une somme de 207 $. Il y a donc 21 façons de former une somme de 207 $ en n'employant que des pièces de 2 $ et des billets de 5 $.

Solution 2
On nous dit que 1 pièce de 2 $ et 41 billets de 5 $ ont une valeur de 207 $. On ne peut utiliser moins de pièces de 2 $, car avec 0 pièce de 2 $, on ne peut obtenir une somme de 207 $. On peut seulement utiliser un plus grand nombre de pièces de 2 $.
Pour le faire, on « fera de la monnaie » en échangeant des billets de 5 $ pour des pièces de 2 $.
Puisque 5 est un nombre impair, on ne peut échanger 1 billet de 5 $ pour des pièces de 2 $. On peut cependant échanger 2 billets de 5 $ pour 5 pièces de 2 $.
Avec cet échange, on obtient 6 pièces de 2 $ et 39 billets de 5 $.
Si on fait l'échange de nouveau, on obtient 11 pièces de 2 $ et 37 billets de 5 $.
On recommence l'échange jusqu'à ce qu'il ne reste que 1 billet de 5 $. On a alors 202 $ en pièces de 2 $, ce qui représente 101 pièces.
Voici donc les nombres possibles de billets de 5 $: 41, 39, 37, ..., 3, 1. Il s'agit de tous les nombres impairs de 1 à 41. Il y en a 21. Il y a donc 21 façons de former une somme de 207 $.

RÉPONSE : (E)

24. Pour se rendre du point (2,1) au point (12,21), on avance de 10 unités vers la droite et on monte de 20 unités ; donc, chaque fois qu'on avance de 1 unité, on monte de 2 unités. Donc, chaque fois qu'on avance de 1 unité, on arrive à un point de treillis. Les points de treillis sur ce segment sont donc :

$$(2,1), (3,3), (4,5), (5,7), (6,9), (7,11), (8,13), (9,15), (10,17), (11,19), (12,21)$$

(Il ne peut pas y avoir d'autres points de treillis sur ce segment, puisque toutes les valeurs entières de x ont été utilisées.)
Pour se rendre du point (2,1) au point (17,6), on avance de 15 unités vers la droite et on monte de 5 unités ; donc, chaque fois qu'on monte de 1 unité, on avance de 3 unités. Donc, chaque fois qu'on monte de 1 unité, on arrive à un point de treillis. Les points de treillis sur ce segment sont donc :

$$(2,1), (5,2), (8,3), (11,4), (14,5), (17,6)$$

Pour se rendre du point (12,21) au point (17,6), on avance de 5 unités vers la droite et on descend de 15 unités ; donc, chaque fois qu'on avance de 1 unité, on descend de 3 unités. Donc, chaque fois qu'on avance de 1 unité, on arrive à un point de treillis. Les points de treillis sur ce segment sont donc :

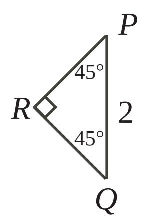
$$(12,21), (13,18), (14,15), (15,12), (16,9), (17,12)$$

Il y a 23 points $(11 + 6 + 6)$ dans ces trois listes. Or, trois points, soit les trois sommets, ont été comptés deux fois. Il y a donc 20 points différents $(23 - 3)$ dans ces listes.

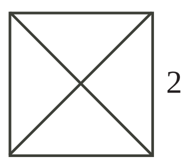
Il y a donc 20 points de treillis sur les côtés du triangle.

Réponse : (C)

25. Pour calculer l'aire du quadrilatère $DRQC$, on soustraira l'aire du triangle PRQ de l'aire du triangle PDC.
On calcule d'abord l'aire du triangle PDC.
On sait que $DC = AB = 5$ cm et que $\angle DCP = 90°$.
Lorsqu'on forme le premier pli, PC devient parallèle à AB et C est placé sur le côté AD. Donc $PC = AB = 5$ cm.
Donc, l'aire du triangle PDC est égale à $\frac{1}{2} \times 5 \times 5$ cm^2, c'est-à-dire à $\frac{25}{2}$ cm^2, ou 12,5 cm^2.
On calcule ensuite l'aire du triangle PRQ.
Dans le triangle PDC, on a $PC = 5$ cm, $\angle PCD = 90°$ et $PC = CD$.
Donc $\angle DPC = 45°$.
De même, dans le triangle ABQ, on a $AB = BQ = 5$ cm et $\angle BQA = 45°$.
Puisque $BC = 8$ cm et que $PB = BC - PC$, alors $PB = 3$ cm. De même, $QC = 3$ cm. Puisque $PQ = BC - BP - QC$, alors $PQ = 2$ cm
De plus, $\angle RPQ = \angle DPC = 45°$ et $\angle RQP = \angle BQA = 45°$.



Quatre de ces triangles peuvent former un carré ayant des côtés de 2 cm (et une aire de 4 cm^2).



L'aire d'un de ces triangles (par exemple, l'aire du triangle PRQ) est donc égale à $\frac{1}{4}$ de l'aire du carré, c'est-à-dire à 1 cm^2.
L'aire du quadrilatère $DRQC$ est donc égale à $(12{,}5 - 1)$ cm^2, c'est-à-dire à 11,5 cm^2.

Réponse : (D)