Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Galois 2007

le mercredi 18 avril 2007

Solutions

©2007 La Fondation de mathématiques de Waterloo

1. (a) Soit a le coût d'un avocat en cents, b le coût d'une banane en cents et c le coût d'une cerise en cents.
D'après les renseignements donnés, $a + c = 62$ et $b + c = 66$.
Or, chaque membre de gauche est composé du coût d'une cerise et soit du coût d'une banane, soit du coût d'un avocat. Puisque $66 - 62 = 4$, on voit qu'une banane coûte 4 cents de plus qu'un avocat.
(On aurait pu soustraire les équations, membre par membre, pour obtenir $b - a = 4$.)
Il y a donc une différence de 4 cents entre le prix d'un avocat et celui d'une banane. La banane coûte plus cher.

(b) *Solution 1*
Soit m le coût d'une mangue en cents, n le coût d'une nectarine en cents et p le coût d'une poire en cents.
D'après les renseignements donnés, $m + n = 60$, $p + n = 60$ et $m + p = 68$.
D'après les deux premières équations, m et p doivent être égaux (car $m = 60 - n$ et $p = 60 - n$).
On reporte $m = p$ dans la troisième équation pour obtenir $2p = 68$, ou $p = 34$. Une poire coûte donc 34 cents.

Solution 2
Soit m le coût d'une mangue en cents, n le coût d'une nectarine en cents et p le coût d'une poire en cents.
D'après les renseignements donnés, $m + n = 60$, $p + n = 60$ et $m + p = 68$.
On additionne les deuxième et troisième équations, membre par membre, pour obtenir $2p + m + n = 60 + 68$, ou $2p + m + n = 128$.
Puisque $m + n = 60$ (d'après la première équation), alors $2p + 60 = 128$, d'où $2p = 68$, ou $p = 34$. Une poire coûte donc 34 cents.

Solution 3
Soit m le coût d'une mangue en cents, n le coût d'une nectarine en cents et p le coût d'une poire en cents.
D'après les renseignements donnés, $m + n = 60$, $p + n = 60$ et $m + p = 68$.
On additionne les trois équations, membre par membre, pour obtenir $2m + 2n + 2p = 188$.
On divise chaque membre par 2 pour obtenir $m + n + p = 94$.
Puisque $m + n = 60$ et $m + n + p = 94$, alors $p = 94 - 60$, ou $p = 34$.
Une poire coûte donc 34 cents.

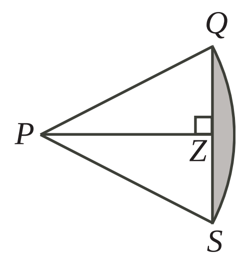
(c) Soit m le coût d'une mandarine en cents, c le coût d'un citron en cents et p le coût d'un pamplemousse en cents.
D'après les renseignements donnés, $m + c = 60$, $m - p = 6$ et $p + m + c = 94$.
On reporte la première équation dans la troisième pour obtenir $p + 60 = 94$, d'où $p = 34$.
Puisque $p = 34$ et $m - p = 6$, alors $m = 34 + 6$, d'où $m = 40$.
Puisque $m = 40$ et $m + c = 60$, alors $c = 20$. Un citron coûte donc 20 cents.
(Il y a plusieurs autres façons de combiner les équations pour obtenir $c = 20$.)

2. (a) Puisque le secteur a un rayon de 12, on a $OA = OB = 12$.
Puisque l'angle du secteur mesure 60° et que $\dfrac{60^\circ}{360^\circ} = \dfrac{1}{6}$, alors le secteur est $\frac{1}{6}$ d'un disque.
La longueur de l'arc AB est donc $\frac{1}{6}$ de la circonférence d'un cercle de rayon 12. Elle est donc égale à $\frac{1}{6}(2\pi(12))$, ou 4π.
Le périmètre du secteur est donc égal à $12 + 12 + 4\pi$, ou $24 + 4\pi$.

(b) Chacun des secteurs ABD et BDC est un sixième d'un disque de rayon 12. Chacun a donc une aire égale à un sixième de l'aire d'un disque de rayon 12.
Chacun a donc une aire égale à $\frac{1}{6}(\pi(12^2))$, soit $\frac{1}{6}(144\pi)$, ou 24π.
L'aire de la figure $ABCD$ est égale à $2(24\pi)$, ou 48π.

(c) Puisque OY est le rayon du secteur de centre O, alors $OY = 12$.
Pour déterminer la longueur XY, il faut déterminer la longueur OX.
Puisque $OA = OB$, le triangle OAB est isocèle.
Puisque $\angle OAB = 60^\circ$, alors $\angle OBA = 60^\circ$ et le triangle OAB est équilatéral.
Puisque $\angle AXO = 90^\circ$, alors $\angle AOX = 180^\circ - 60^\circ - 90^\circ$, d'où $\angle AOX = 30^\circ$. Le triangle OAX est donc un triangle remarquable 30°-60°-90°.
Puisque $OA = 12$, alors $AX = \frac{1}{2}OA$, et $OX = \sqrt{3}AX$, d'où $AX = 6$ et $OX = 6\sqrt{3}$.
Donc $XY = OY - OX$, ou $XY = 12 - 6\sqrt{3}$, ou $XY \approx 1{,}61$.

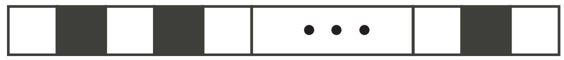
(d) Par symétrie, la ligne verticale sépare la région ombrée en deux parties égales.
On considère la partie droite de la région ombrée, ainsi que le triangle de gauche.



L'aire de cette partie ombrée est égale à l'aire du secteur PQS moins celle du triangle PQS.
L'aire du secteur PQS est égale à 24π selon la partie (b).
D'après la partie (c), le triangle PQS est équilatéral. Donc $QS = 12$.
Au point P, on abaisse une perpendiculaire PZ à QS.
D'après la partie (c), $PZ = 6\sqrt{3}$.
Le triangle PQS a donc une base QS de longueur 12 et une hauteur correspondante PZ de longueur $6\sqrt{3}$.
L'aire du triangle PQS est donc égale à $\frac{1}{2}(12)(6\sqrt{3})$, ou $36\sqrt{3}$.
L'aire de la partie droite de la région ombrée est égale à $24\pi - 36\sqrt{3}$. Donc l'aire de la partie ombrée au complet est égale à $2(24\pi - 36\sqrt{3})$, ou $48\pi - 72\sqrt{3}$, soit environ 26,1.

3. (a) Les cubes 1 sur 1 sur 1 qui ont au moins deux faces peintes sont ceux qui contiennent les arêtes du grand cube. Ceci inclut les petits cubes dans les coins du grand cube.
Le grand cube a 12 arêtes qui contiennent chacun 3 petits cubes qui ne forment pas des coins. De plus, il a 8 sommets et donc 8 coins.
Le nombre de petits cubes qui ont au moins deux faces peintes est donc égal à $3 \times 12 + 8$, ou 44.

(b) i. Les petits cubes qui ont exactement deux faces blanches sont situés sur des arêtes du grand cube et pas dans les coins.
Chacune des 12 arêtes du grand cube compte $2k + 1$ petits cubes.
Les « cubes blancs » que l'on veut compter (c'est-à-dire ceux qui ont deux faces blanches) sont ceux qui ne sont pas situés dans les coins.
On considère une rangée de cubes le long d'une arête.



Si on enlève un des $2k + 1$ cubes à une des extrémités, la moitié des cubes qui restent (c'est-à-dire k des cubes qui restent) sont blancs et un seul est situé à une extrémité.
Il y a donc $k-1$ cubes blancs dans cette rangée qui ont exactement deux faces blanches.
Puisque le grand cube a 12 arêtes, le nombre total de petits cubes qui ont exactement deux faces blanches est égal à $12(k - 1)$, ou $12k - 12$.

ii. Les cubes qui ont au moins deux faces blanches sont ceux de la partie (i) qui ont exactement deux faces blanches, ainsi que les 8 cubes, dans les coins du grand cube, qui ont trois faces blanches.
Le nombre de cubes qui ont au moins deux faces blanches est donc égal à $12k - 12 + 8$, ou $12k - 4$.
On cherche donc une valeur de k pour laquelle $12k - 4$ est égal à 2006.
Si $12k - 4 = 2006$, alors $12k = 2010$, ou $k = 167{,}5$. Cette valeur n'est pas un entier.
Il n'y a donc aucune valeur de k pour laquelle il y a 2006 petits cubes qui ont au moins deux faces blanches.

4. (a) Supposons qu'on utilise x tiges jaunes et y tiges vertes.
On veut donc que $5x + 3y = 62$, ou $3y = 62 - 5x$, x et y étant des entiers non négatifs.
On peut considérer les diverses valeurs possibles de x et vérifier si y est un entier. On utilise un tableau :

x	$62 - 5x$	Es-ce que $62 - 5x$ est divisible par 3 ?	y
0	62	Non	
1	57	Oui	19
2	52	Non	
3	47	Non	
4	42	Oui	14
5	37	Non	
6	32	Non	
7	27	Oui	9
8	22	Non	
9	17	Non	
10	12	Oui	4
11	7	Non	
12	2	Non	

Il y a donc 4 façons de choisir un ensemble de tiges jaunes et vertes, soit 1 jaune et 19 vertes, 4 jaunes et 14 vertes, 7 jaunes et 9 vertes, 10 jaunes et 4 vertes.

(b) Les tiges vertes ont une longueur de 3 cm, les tiges jaunes ont une longueur de 5 cm, les tiges noires ont une longueur de 7 cm et les tiges bleues ont une longueur de 9 cm.
Si on utilise a tiges vertes et b tiges bleues, alors le poteau a une longueur de $3a + 9b$ cm, ce qui est divisible par 3.

Puisque 62 n'est pas divisible par 3, il est impossible de former un poteau de 62 cm en n'employant que des tiges vertes et bleues.
(On peut vérifier que tout autre choix nous permet de former un poteau de 62 cm : 19 tiges vertes et 1 tige jaune, 16 vertes et 2 noires, 11 jaunes et 1 noire, 7 jaunes et 3 bleues, 5 noires et 3 bleues.)

(c) Puisqu'on utilise au moins 81 tiges de chacune de ces quatre couleurs, supposons qu'on utilise $81 + a$ tiges vertes, $81 + b$ tiges roses, $81 + c$ tiges grises et $81 + d$ tiges bleues, a, b, c et d étant des entiers non négatifs.
Pour obtenir un poteau de 2007 cm, il faut que :

$$\begin{aligned} 3(81 + a) + 4(81 + b) + 8(81 + c) + 9(81 + d) &= 2007 \\ 3a + 4b + 8c + 9d + 81(3 + 4 + 8 + 9) &= 2007 \\ 3a + 4b + 8c + 9d &= 2007 - 1944 \\ 3a + 4b + 8c + 9d &= 63 \end{aligned}$$

On cherche le nombre de solutions entières non négatives de cette dernière équation.
On regroupe les termes du membre de gauche sous la forme $3(a + 3d) + 4(b + 2c)$ et on pose $x = a + 3d$ et $y = b + 2c$. L'équation devient $3x + 4y = 63$, x et y étant des entiers non négatifs.
Les solutions (x,y) de l'équation sont $(1, 15), (5, 12), (9, 9), (13, 6), (17, 3)$ et $(21, 0)$.
Si $x = a + 3d = 1$, alors $(a, d) = (1, 0)$. Il y a une valeur possible de a et de d.
Si $x = a + 3d = 5$, alors (a, d) peut égaler $(5, 0)$ ou $(2, 1)$. Il y a 2 valeurs possibles.
Si $x = a + 3d = 9$, alors (a, d) peut égaler $(9, 0), (6, 1), (3, 2)$ ou $(0, 3)$. Il y a 4 valeurs possibles.
Si $x = a + 3d = 13$, alors (a, d) peut égaler $(13, 0), (10, 1), (7, 2), (4, 3)$ ou $(1, 4)$. Il y a 5 valeurs possibles.
Si $x = a + 3d = 17$, alors (a, d) peut égaler $(17, 0), (14, 1), (11, 2), (8, 3), (5, 4)$ ou $(2, 5)$. Il y a 6 valeurs possibles.
Si $x = a + 3d = 21$, alors (a, d) peut égaler $(21, 0), (18, 1), (15, 2), (12, 3), (9, 4), (6, 5), (3, 6)$ ou $(0, 7)$. Il y a 8 valeurs possibles.
De même, si on laisse $y = b + 2c$ égaler successivement 15, 12, 9, 6, 3 et 0, on obtient respectivement 8, 7, 5, 4, 2 et 1 valeurs possibles de b et de c.

On considère maintenant ces valeurs possibles comme un tout.
Si $x = 1$ et $y = 15$, il y a 1 valeur possible de a et de d et 8 valeurs possibles de b et de c. Le nombre de valeurs possibles de a, b, c et d est donc égal à 1×8, ou 8.
Si $x = 5$ et $y = 12$, il y a 2 valeurs possibles de a et de d et pour chacune d'elles, il y a 7 valeurs possibles de b et de c. Le nombre de valeurs possibles de a, b, c et d est donc égal à 2×7, ou 14.
De la même manière, pour les autres valeurs de x et de y, les nombres de valeurs possibles de a, b, c et d égalent respectivement $4 \times 5 = 20$, $5 \times 4 = 20$, $6 \times 2 = 12$ et $8 \times 1 = 8$.
En tout, le nombre de valeurs possibles de a, b, c et d est égal à $8 + 14 + 20 + 20 + 12 + 8$, ou 82. Il y a donc 82 façons de choisir un ensemble de tiges.