Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Fryer 2007

le mercredi 18 avril 2007

Solutions

1. (a) Puisque le rectangle 3 a 4 rangées de carreaux, le rectangle 4 a 5 rangées.
Puisque le rectangle 3 a 7 colonnes de carreaux, le rectangle 4 a 9 colonnes.
Le nombre de carreaux du rectangle 4 est égal à 5×9, ou 45.

(b) Puisque le rectangle 4 a 5 rangées, il a une hauteur de 5.
Puisqu'il a 9 colonnes, il a une longueur de 9.
Son périmètre est donc égal à $2(5) + 2(9)$, ou 28.

(c) Puisque le rectangle 4 a 5 rangées de carreaux, le nombre de rangées du rectangle 7 est égal à $5 + 3$, ou 8.
Puisque le rectangle 4 a 9 colonnes, le nombre de colonnes du rectangle 7 est égal à $9+2(3)$, ou 15.
Le rectangle 7 a donc une hauteur de 8 et une longueur de 15. Son pérmiètre est égal à $2(8) + 2(15)$, ou 46.

(d) *Solution 1*
On procède par tâtonnements.
Le rectangle 7 mesure 8 sur 15. Son périmètre est égal à $2(8) + 2(15)$, ou 46.
On considère un plus grand rectangle.
Dans le rectangle 17, le nombre de rangées est égal à $8 + 10$, ou 18, et le nombre de colonnes est égal à $15 + 2(10)$, ou 35. Il mesure donc 18 sur 35 et son périmètre est égal à $2(18) + 2(35)$, ou 106.
On considère un rectangle encore plus grand.
Dans le rectangle 27, le nombre de rangées est égal à $18 + 10$, ou 28, et le nombre de colonnes est égal à $35 + 2(10)$, ou 55. Il mesure donc 28 sur 55 et son périmètre est égal à $2(28) + 2(55)$, ou 166. C'est proche !
Le rectangle 28 a 29 rangées et 57 colonnes. Son périmètre est égal à $2(29)+2(57)$, ou 172.
Le rectangle 29 a 30 rangées et 59 colonnes. Son périmètre est égal à $2(30)+2(59)$, ou 178.
Donc $n = 29$.
(Il s'agit de la seule réponse, car plus on avance dans la suite, plus le périmètre augmente.)

Solution 2
Le rectangle 7 mesure 8 sur 15. Son périmètre est égal à $2(8) + 2(15)$, ou 46.
Lorsqu'on passe au rectangle 8, la hauteur augmente de 1 et la longueur augmente de 2.
Le périmètre augmente donc de $2(1) + 2(2)$, ou 6.
À chaque nouveau rectangle, la même situation se produit.
Or $178 - 46 = 132$ et $132 = 22(6)$. Pour passer d'un périmètre de 46 à un périmètre de 178, il faut donc avancer 22 fois à partir du rectangle 7. On arrive donc au rectangle 29.
Donc, le rectangle 29 a un périmètre de 178. Donc $n = 29$.

Solution 3
Le rectangle 1 a une rangée de plus que son numéro. À chaque étape, le nombre de rangées augmente de 1. Donc, le rectangle n a $n + 1$ rangées.
Le rectangle 1 a 3 colonnes (ce qui est 1 de plus que le double de son numéro). À chaque étape, le nombre de colonnes augmente de 2. Donc, le rectangle n a $2n + 1$ colonnes.
Le périmètre du rectangle n est donc égal à $2(n + 1) + 2(2n + 1)$, soit $2n + 2 + 4n + 2$, ou $6n + 4$.
Pour obtenir un périmètre de 178, on doit avoir $6n + 4 = 178$, d'où $6n = 174$, ou $n = 29$.
Donc, le rectangle 29 a un périmètre de 178.

2. (a) Le nombre de billets que Jamil a achetés est égal à $5 + 2 + 3$, ou 10.

Le coût total des billets est égal à $5(25\ \$) + 2(10\ \$) + 3(5\ \$)$, ou 160 \$.

Le coût moyen des billets est donc égal à $\dfrac{160\ \$}{10}$, ou 16 \$.

(b) Puisque Michel achète 8 billets au coût moyen de 12 \$, le coût total des billets est de 8×12 \$, ou 96 \$.
Il achète ensuite 5 billets platine qu'il paie 5×25 \$, ou 125 \$.
En tout, Michel a payé $96\ \$ + 125\ \$$, ou 221 \$ pour 13 billets.
Le coût moyen de tous les billets qu'il a achetés est égal à $\dfrac{221\ \$}{13}$, ou 17 \$.

(c) *Solution 1*
Ophélie a d'abord acheté 10 billets au coût moyen de 14 \$. Ils ont donc coûté 10×14 \$, ou 140 \$ en tout.
Elle achète ensuite n billets platine qui coûtent $25n$ dollars.
En tout, elle a dépensé $140 + 25n$ dollars pour $10 + n$ billets.
Or, on sait que le coût moyen de tous ces billets est de 20 \$. Donc :

$$\begin{aligned}
\frac{140+25n}{10+n} &= 20 \\
140+25n &= 20(10+n) \\
140+25n &= 200+20n \\
5n &= 60 \\
n &= 12
\end{aligned}$$

Après les 10 premiers billets, Ophélie a acheté 12 billets platine.

Solution 2
Le coût moyen des 10 premiers billets est 6 \$ de moins que le coût moyen final de 20 \$.
En tout, elle a déboursé 10×6 \$, ou 60 \$ de moins pour ces billets que si elle les avait payés à un coût moyen de 20 \$.
Pour obtenir un coût moyen de 20 \$, à la fin, elle doit donc payer 60 \$ de plus, pour les nouveaux billets platine, que le coût moyen de 20 \$.
Or, chaque billet platine coûte 5 \$ de plus que le coût moyen de 20 \$. Le nombre de billets platine qu'elle doit acheter est donc égal à $60\ \$ \div 5\ \$$, ou 12.

3. (a) Le nombre $992\,466\,1A6$ est divisible par 8 si $1A6$ est divisible par 8.
On vérifie tous les cas possibles à la main ou à l'aide d'une calculette :

106 n'est pas divisible par 8 ; 116 non plus ; 126 non plus ;
136 est divisible par 8 ;
146 n'est pas divisible par 8 ; 156 non plus ; 166 non plus ;
176 est divisible par 8 ;
186 n'est pas divisible par 8 ; 196 non plus.

Les valeurs possibles de A sont 3 et 7.

(b) Le nombre $D\,767\,E89$ est divisible par 9 si $D + 7 + 6 + 7 + E + 8 + 9$, ou $37 + D + E$, est divisible par 9.
Puisque D et E sont des chiffres de 0 à 9, alors $D + E$ a une valeur de 0 à 18.
Donc, $37 + D + E$ a une valeur de 37 à 55.
Les nombres de 37 à 55 qui sont divisibles par 9 sont 45 et 54.
Si $37 + D + E = 45$, alors $D + E = 8$.

Si $37 + D + E = 54$, alors $D + E = 17$.
Les valeurs possibles de $D + E$ sont 8 et 17.

(c) Le nombre $5\,41G\,507\,2H6$ est divisible par 72 s'il est divisible par 8 et par 9.
On vérifie d'abord la divisibilité par 8, ce qui établira un petit nombre de valeurs de H.
Le nombre $5\,41G\,507\,2H6$ est divisible par 8 si $2H6$ est divisible par 8.
On procède comme dans la partie (a) et on établit que $2H6$ est divisible par 8 lorsque $H = 1{,}5{,}9$ (c'est-à-dire que 216, 256 et 296 sont divisibles par 8, tandis que 206, 226, 236, 246, 266, 276 et 286 ne le sont pas).
Pour chaque valeur possible de H, on doit déterminer les valeurs de G pour lesquelles le nombre $5\,41G\,507\,2H6$ est divisible par 9.
On considère d'abord $H = 1$. Quelles sont les valeurs de G pour lesquelles le nombre $5\,41G\,507\,216$ est divisible par 9 ?
Il faut que $5 + 4 + 1 + G + 5 + 0 + 7 + 2 + 1 + 6$, ou $31 + G$, soit divisible par 9.
Puisque G prend des valeurs de 0 à 9, alors $31 + G$ a une valeur de 31 à 40. Pour être divisible par 9, elle doit donc être égale à 36. Donc $G = 5$.
On considère ensuite $H = 5$. Quelles sont les valeurs de G pour lesquelles le nombre $5\,41G\,507\,256$ est divisible par 9 ?
Il faut que $5 + 4 + 1 + G + 5 + 0 + 7 + 2 + 5 + 6$, ou $35 + G$, soit divisible par 9.
Puisque G prend des valeurs de 0 à 9, alors $35 + G$ a une valeur de 31 à 40. Pour être divisible par 9, elle doit donc être égale à 36. Donc $G = 1$.
On considère enfin $H = 9$. Quelles sont les valeurs de G pour lesquelles le nombre $5\,41G\,507\,296$ est divisible par 9 ?
il faut que $5 + 4 + 1 + G + 5 + 0 + 7 + 2 + 9 + 6$, ou $39 + G$, soit divisible par 9.
Puisque G prend des valeurs de 0 à 9, alors $39 + G$ a une valeur de 39 à 48. Pour être divisible par 9, elle doit donc être égale à 45. Donc $G = 6$.
Les valeurs possibles de G et de H sont $H = 1$ et $G = 5$, $H = 5$ et $G = 1$, $H = 9$ et $G = 6$.
(On aurait pu combiner l'analyse des trois cas.)

4. (a) *Solution 1*
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle XYZ, $YZ^2 = YX^2 + XZ^2$, c'est-à-dire que $YZ^2 = 60^2 + 80^2$, d'où $YZ^2 = 10\,000$. Donc $YZ = 100$.
(On aurait pu déterminer la longueur YZ sans utiliser le théorème de Pythagore en remarquant que le triangle XYZ est rectangle en X, que $XY = 60 = 3(20)$ et que $XZ = 80 = 4(20)$. Le triangle XYZ est donc semblable au triangle remarquable 3-4-5, d'où $YZ = 5(20) = 100$.)
Puisque le triangle YXZ est rectangle en X, son aire est égale à $\frac{1}{2}(60)(80)$, ou 2400.
Puisque XW est perpendiculaire à YZ, l'aire du triangle YXZ est aussi égale à $\frac{1}{2}(100)(XW)$, ou $50XW$.
Donc $50XW = 2400$, d'où $XW = 48$.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle XWZ, $WZ^2 = 80^2 - 48^2$, d'où $WZ^2 = 4096$.
Donc $WZ = 64$.

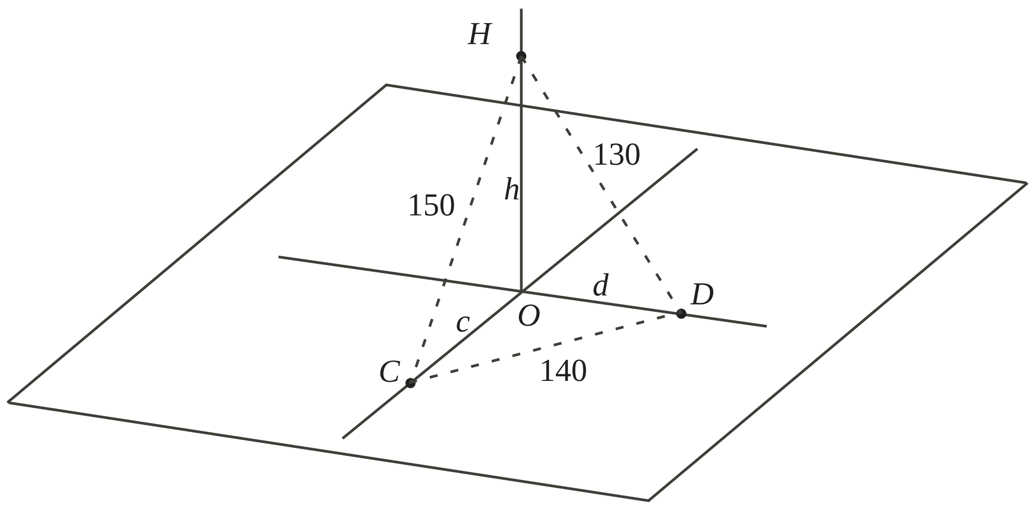
Solution 2
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle XYZ, $YZ^2 = YX^2 + XZ^2$, c'est-à-dire que $YZ^2 = 60^2 + 80^2$, d'où $YZ^2 = 10\,000$. Donc $YZ = 100$.
Soit $WZ = a$. Donc $YW = 100 - a$.
Soit $XW = h$.

D'après le théorème de Pythagore dans le triangle XWY, $(100-a)^2+h^2=60^2$.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle XWZ, $a^2+h^2=80^2$.
On soustrait la première équation de la deuxième, membre par membre, pour obtenir :

$$\begin{aligned} a^2-(100-a)^2 &= 80^2-60^2 \\ a^2-(10000-200a+a^2) &= 6400-3600 \\ 200a-10000 &= 2800 \\ 200a &= 12800 \\ a &= 64 \end{aligned}$$

Donc $WZ=64$.

(b) Soit $OC=c$, $OD=d$ et $OH=h$.



Puisque OH est perpendiculaire au champ, alors OH est perpendiculaire à OC et à OD.
Puisque OD est orienté vers l'est et que OC est orienté vers le sud, alors OD est perpendiculaire à OC.
Or $HC=150$. D'après le théorème de Pythagore dans le triangle HOC, $h^2+c^2=150^2$.
De la même manière, on a $HD=130$ et $CD=140$, d'où $h^2+d^2=130^2$ et $c^2+d^2=140^2$.
On additionne ces deux dernières équations, membre par membre, pour obtenir

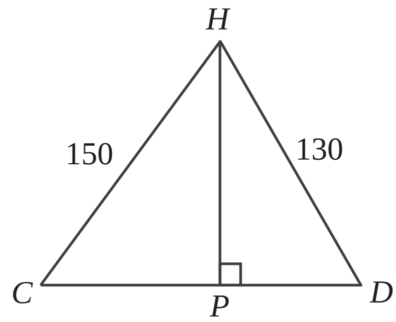
$$2h^2+c^2+d^2=150^2+130^2$$

Puisque $c^2+d^2=140^2$, alors :

$$\begin{aligned} 2h^2+140^2 &= 150^2+130^2 \\ 2h^2 &= 150^2+130^2-140^2 \\ 2h^2 &= 19800 \\ h^2 &= 9900 \\ h &= \sqrt{9900}=30\sqrt{11} \end{aligned}$$

La hauteur de la montgolfière est de $30\sqrt{11}$ m, soit environ 99,5 m.

(c) Pour épargner le plus de corde, il faut que HP ait une longueur minimale.
Or, HP a une longueur minimale lorsqu'elle est perpendiculaire à CD.



(Cette figure nous permet de constater que si on fait glisser P du pied de la perpendiculaire, HP est allongé.)
Dans cette figure, on a $HC = 150$, $HD = 130$ et $CD = 140$.
Soit $HP = x$ et $PD = a$. Donc $CP = 140 - a$.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle HPC, $x^2 + (140 - a)^2 = 150^2$.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle HPD, $x^2 + a^2 = 130^2$.
On soustrait la deuxième équation de la première, membre par membre, pour obtenir :

$$\begin{aligned}
(140 - a)^2 - a^2 &= 150^2 - 130^2 \\
(19600 - 280a + a^2) - a^2 &= 5600 \\
19600 - 280a &= 5600 \\
280a &= 14000 \\
a &= 50
\end{aligned}$$

Donc $x^2 + 90^2 = 150^2$, c'est-à-dire que $x^2 = 150^2 - 90^2$, d'où $x^2 = 14400$. Donc $x = 120$.
La longueur de corde la plus courte est de 120 m. La longueur de corde épargnée est de 130 m + 150 m − 120 m, ou 160 m .