**Concours canadien de mathématiques**

***Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario***

# *Concours Fermat 2007*

**(11$^{e}$ année ou Secondaire V)**

## le mardi 20 février 2007

*Solutions*

1. On a : $\dfrac{36-12}{12-4} = \dfrac{24}{8} = 3$

Réponse : (E)

2. Puisque $7x = 28$, alors $x = 4$.
Puisque $x + w = 9$ et que $x = 4$, alors $w = 5$.
Puisque $x = 4$ et que $w = 5$, alors $xw = 20$.

Réponse : (B)

3. Pour déterminer la plus grande et la plus petite fraction, on écrit toutes les fractions avec un dénominateur commun de 16, soit $\frac{12}{16}$, $\frac{14}{16}$, $\frac{13}{16}$ et $\frac{8}{16}$.
La plus grande est $\frac{14}{16}$, soit $\frac{7}{8}$, et la plus petite est $\frac{8}{16}$, soit $\frac{1}{2}$.
La différence entre la plus grande et la plus petite est égale à $\frac{14}{16} - \frac{8}{16}$, soit $\frac{6}{16}$, ou $\frac{3}{8}$.

Réponse : (A)

4. Lorsque $x = -5$, on a $-2x^2 + \dfrac{5}{x} = -2(-5)^2 + \dfrac{5}{-5}$, ce qui est égal à $-2(25) + (-1)$, ou $-51$.

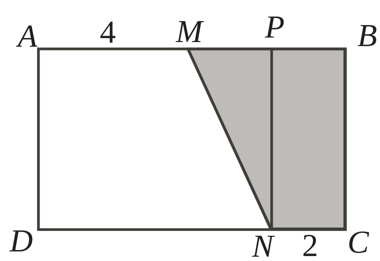
Réponse : (C)

5. On a : $1^{-2} + 2^{-1} = \dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^1} = \dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$

Réponse : (A)

6. *Solution 1*
Puisque le rectangle $ABCD$ a une aire de 40 et que $AB = 8$, alors $BC = 5$.
Donc, $MBCN$ est un trapèze ayant des bases de longueurs 2 et 4 et une hauteur de 5. Son aire est donc égale à $\frac{1}{2}(5)(4+2)$, soit 15.

*Solution 2*
Puisque le rectangle $ABCD$ a une aire de 40 et que $AB = 8$, alors $BC = 5$.
Au point $N$, on abaisse une perpendiculaire $NP$ au côté $AB$.




La figure $MBCN$ est ainsi divisée en un rectangle $PBCN$, qui a une largeur de 2 et une hauteur de 5, et un triangle $MPN$ qui a une base $MP$ de longueur 2 et une hauteur $PN$ de longueur 5.
L'aire de la figure $MBCN$ est égale à la somme de l'aire de ces parties, soit $2(5) + \frac{1}{2}(2)(5)$, soit $10 + 5$, ou 15.

Réponse : (A)

7. *Solution 1*
Puisque deux des entiers positifs ont une somme de 9, les possibilités sont 1 et 8, 2 et 7, 3 et 6, 4 et 5.
Un seul de ces choix est composé de deux diviseurs de 42, soit 2 et 7.
Puisque les trois entiers ont un produit de 42 et que deux des entiers sont 2 et 7, alors le troisième entier est 3, car $2 \times 3 \times 7 = 42$.

*Solution 2*
Voici les ensembles possibles de trois entiers positifs qui ont un produit de 42 : $\{1, 1, 42\}$, $\{1, 2, 21\}$, $\{1, 3, 14\}$, $\{1, 6, 7\}$ et $\{2, 3, 7\}$.
Un seul de ces ensembles contient deux entiers qui ont une somme de 9, soit $\{2, 3, 7\}$.
Donc, le troisième entier est 3.

Réponse : (D)

8. Supposons que Ivan a parcouru une distance de $x$ km lundi.
Donc mardi, il a parcouru $2x$ km ; mercredi, il a parcouru $x$ km ; jeudi, il a parcouru $\frac{1}{2}x$ km ; vendredi, il a parcouru $x$ km.
La distance la plus courte parcourue en une journée est celle de jeudi. Donc $\frac{1}{2}x = 5$, d'où $x = 10$.
Les distances parcourues sont donc 10 km, 20 km, 10 km, 5 km et 10 km, pour un total de 55 km.

Réponse : (A)

9. Puisque $\dfrac{1}{x+3} = 2$, alors l'inverse du membre de gauche est égal à l'inverse du membre de droite.
Donc $x + 3 = \frac{1}{2}$.
Puisque $x + 3 = \frac{1}{2}$, alors $x + 5 = \frac{1}{2} + 2$, c'est-à-dire que $x + 5 = \frac{5}{2}$.
Puisque $x + 5 = \frac{5}{2}$, alors $\dfrac{1}{x+5} = \dfrac{2}{5}$.
(Remarquer qu'on n'a pas déterminé la valeur de $x$.)

Réponse : (C)

10. Les deux premiers disques DVD ont coûté 20 \$ chacun et le troisième a coûté 10 \$. Philippa a donc acheté 3 disques au prix total de 50 \$.
Puisque 50 \$ correspond au prix régulier de $2\frac{1}{2}$ disques, elle reçoit 3 disques pour le prix régulier de $2\frac{1}{2}$, ce qui est équivalent à 6 disques pour le prix de 5.

Réponse : (E)

11. Lorsqu'on présente cinq nombres en ordre ascendant, la médiane des nombres est le nombre du milieu, soit $x$.
Puisque la médiane est égale à 7, alors $x = 7$.
Les nombres, dans l'ordre, sont donc 2, 5, 7, 10 et $y$.
Puisque les cinq nombres ont une moyenne de 8, ils ont une somme de $5 \times 8$, soit 40.
Donc $2 + 5 + 7 + 10 + y = 40$, ou $24 + y = 40$, d'où $y = 16$.

Réponse : (A)

12. Puisque $\angle QSR = \angle QRS$, alors le triangle $QSR$ est isocèle. Donc $QS = QR$, d'où $QS = x$.
Puisque $\angle SPQ = 90°$ et que $\angle PQS = 60°$, alors $\angle PSQ = 30°$. Le triangle $PQS$ est donc un triangle remarquable 30°-60°-90°.
D'après le rapport des longueurs de côtés d'un tel triangle, $QS = 2PQ$ .
Donc $x = QS = 2(10)$, ou $x = 20$.

Réponse : (B)

13. *Solution 1*
Si on tient compte des nombres manquants, on a $M + N + P + Q + R = 1 + 4 + 5 + 6 + 7$, ou $M + N + P + Q + R = 23$.
Pour déterminer la valeur de $M + N + P + Q$, il faut déterminer la valeur de $R$ et la soustraire de 23.
$R$ ne peut être égal à 1, car $0 + 1 = 1$ et 1 n'est pas premier. (Si $R$ était égal à 1, la somme des deux nombres aux extrémités d'une arête ne serait pas un nombre premier.)
$R$ ne peut être égal à 4, car $0 + 4 = 4$ et 4 n'est pas premier.
$R$ ne peut être égal à 6, car $0 + 6 = 6$ et 6 n'est pas premier.
$R$ ne peut être égal à 7, car $2 + 7 = 9$ et 9 n'est pas premier.
Par élimination, on a $R = 5$. Donc $M + N + P + Q = 23 - 5$, ou $M + N + P + Q = 18$.
(Dans la Solution 2, on verra que les autres nombres peuvent être placés de manière à satisfaire à la condition.)

*Solution 2*
Les nombres 1, 4, 5, 6 et 7 n'ont pas été placés.
Puisque $Q + 3$ doit être un nombre premier, alors $Q$ doit être égal à 4 (puisque $1 + 3$, $5 + 3$, $6 + 3$ et $7 + 3$ ne sont pas premiers).
Puisque $M + 0$ et $M + 4$ doivent tous deux être premiers, alors $M$ doit être égal à 7 (puisque $1 + 0$, $5 + 4$ et $6 + 4$ ne sont pas premiers).
Puisque $P + 2$ et $P + 4$ doivent tous deux être premiers, alors $P$ doit être égal à 1 (puisque $5 + 4$ et $6 + 2$ ne sont pas premiers).
Puisque $N + 7$ et $N + 1$ doivent tous deux être premiers, alors $N$ doit être égal à 6 (puisque $5 + 7$ n'est pas premier).
On peut vérifier que si $R = 5$, il satisfait à la condition.
Donc $M + N + P + Q = 23 - 5$, ou $M + N + P + Q = 18$.

Réponse : (C)

14. Lorsqu'on augmente de 25 % la valeur de $a$, on obtient 1,25$a$, ou $\frac{5}{4}a$.
On veut donc que $\frac{5}{4}a > 5b$, c'est-à-dire que $5a > 20b$, ou $a > 4b$.
On cherche les plus petites valeurs positives de $a$ et de $b$ qui vérifient cette inégalité. (Si $a$ et $b$ sont aussi petits que possible, alors leur somme $a + b$ sera aussi petite que possible.)
Puisque $b$ est un entier strictement positif, alors $4b \geq 4$. Puisque $a > 4b$, alors $a > 4$.
Donc, la plus petite valeur possible de $a$ est 5, lorsque $b = 1$.
Puisque $b$ ne peut prendre une valeur plus petite que 1, alors $a$ ne peut pas prendre une valeur plus petite que 5.
Donc, la valeur minimale possible de $a + b$ est $5 + 1$, ou 6.

Réponse : (B)

15. *Solution 1*

Soit $pqr$ l'expression de $x$ en chiffres.
Puisque les chiffres de $x$ sont pairs, alors $p$ peut égaler 2, 4, 6 ou 8, tandis que $q$ et $r$ peuvent égaler 0, 2, 4, 6 ou 8.
Lorsque $x$ est multiplié par 2, chacun de ses chiffres est multiplié par 2 et il peut y avoir des retenues.
Or $2 \times 0 = 0$, $2 \times 2 = 4$, $2 \times 4 = 8$, $2 \times 6 = 12$ et $2 \times 8 = 16$.
Lorsqu'on calcule $2x$, chacun des chiffres de $x$ produit un chiffre pair et une retenue de 0 ou 1.
Avec une retenue de 0, cela ne change pas la parité du chiffre suivant de $2x$, à la gauche.
Avec une retenue de 1, le chiffre suivant de $2x$, sur la gauche, verra sa parité changée de pair à impair. (Remarquer que deux retenues de suite ne peuvent former une retenue supérieure à 1.)
Donc, $x$ ne peut avoir un chiffre égal à 6 ou à 8, sinon $2x$ aura certainement un chiffre impair.
De plus, les chiffres 0, 2 et 4 peuvent paraître dans n'importe quelle position de $x$, à l'exception du 0 qui ne peut paraître dans la position des centaines. Ils produiront des chiffres pairs dans $2x$.
Donc, $p$ peut prendre 2 valeurs. Pour chacune, $q$ peut prendre 3 valeurs. Pour chacun de ces cas, $r$ peut prendre 3 valeurs. Le nombre de valeurs possibles de $x$ est donc égal à $2 \times 3 \times 3$, soit 18.

*Solution 2*

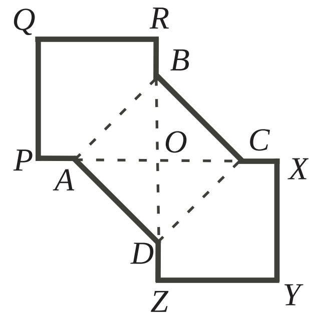
Soit $pqr$ l'expression de $x$ en chiffres. Donc $x = 100p + 10q + r$.
Puisque les chiffres de $x$ sont pairs, $p$ peut égaler 2, 4, 6 ou 8, tandis que $q$ et $r$ peuvent chacun égaler 0, 2, 4, 6 ou 8.
Lorsque $x$ est multiplié par 2, chacun de ses chiffres est multiplié par 2 et il peut y avoir des retenues.
Or $2 \times 0 = 0$, $2 \times 2 = 4$, $2 \times 4 = 8$, $2 \times 6 = 12$ et $2 \times 8 = 16$.
Soit $2p = 10A + a$, $2q = 10B + b$ et $2r = 10C + c$, $A, a, B, b, C, c$ étant des chiffres de manière que $A$, $B$ et $C$ égalent chacun 0 ou 1 et $a$, $b$ et $c$ soient tous pairs.
Donc :

$$\begin{aligned}
2x &= 2(100p + 10q + r) \\
&= 100(2p) + 10(2q) + 2r \\
&= 100(10A + a) + 10(10B + b) + 10C + c \\
&= 1000A + 100a + 100B + 10b + 10C + c \\
&= 1000A + 100(a + B) + 10(b + C) + c
\end{aligned}$$

Puisque $a$, $b$ et $c$ ont chacun une valeur maximale de 8 et que $A$, $B$ et $C$ ont chacun une valeur maximale de 1, alors $a + B$ et $b + C$ ont chacun une valeur maximale de 9. Donc $A$, $a + B$, $b + C$ et $c$ sont des nombres de 1 chiffre.
Pour que tous les chiffres de $2x$ soient pairs, il faut que $A$ soit pair (et donc égal à 0), que $c$ soit pair (il l'est) et que $a + B$ et $b + C$ soient tous deux pairs.
Puisque $a$ et $b$ sont pairs, il faut donc que $B$ et $C$ soient pairs, c'est-à-dire qu'ils égalent 0.
Puisque $A$, $B$ et $C$ égalent tous 0, alors aucun des chiffres $p$, $q$ ou $r$ ne peut égaler 6 ou 8. Chacun peut donc égaler 0, 2 ou 4 (avec $p \neq 0$).
Donc, $p$ peut prendre 2 valeurs. Pour chacune, $q$ peut prendre 3 valeurs. Pour chacun de ces cas, $r$ peut prendre 3 valeurs. Le nombre de valeurs possibles de $x$ est donc égal à $2 \times 3 \times 3$, soit 18.

Réponse : (B)

16. On nomme les autres sommets de la figure.




Puisque chacun des carrés a des côtés de longueur 3, alors

$$PQ = QR = BC = XY = YZ = DA = 3$$

Le périmètre de la figure est donc égal à $18 + AP + RB + CX + ZD$.
Puisque $O$ est le centre du carré $ABCD$, alors $OA = OB = OC = OD$.
Puisque $OP = OR = OX = OZ$, alors $AP = RB = CX = ZD$.
Le périmètre est donc égal à $18 + 4AP$.
Puisque $O$ est le centre du carré $ABCD$, alors $OA = OB$ et $\angle AOB = 90°$. Le triangle $AOB$ est donc isocèle rectangle. Ses angles mesurent donc $45°$, $45°$ et $90°$.
Donc $AO = \dfrac{AB}{\sqrt{2}}$, c'est-à-dire que $AO = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$, ou $AO = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. Donc $AP = OP - AO$, d'où $AP = 3 - \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.
Le périmètre est donc égal à $18 + 4\left(3 - \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)$, soit $18 + 12 - 6\sqrt{2}$, ou $30 - 6\sqrt{2}$, ou environ 21,515.

Réponse : (A)

17. *Solution 1*
Puisque $AB = BC$, alors $B$ est situé sur la médiatrice du segment $AC$.
Puisque $A$ et $C$ ont pour coordonnés respectives $(2, 2)$ et $(8, 4)$, le milieu du segment $AC$ a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}(2 + 8), \frac{1}{2}(4 + 2)\right)$, soit $(5, 3)$. La pente de $AC$ est égale à $\dfrac{4-2}{8-2}$, soit $\dfrac{1}{3}$.
La médiatrice a donc une pente de $-3$ (l'opposé de l'inverse de $\frac{1}{3}$) et elle passe au point $(5, 3)$.
Son équation est donc $y - 3 = -3(x - 5)$, ou $y = -3x + 18$.
Pour obtenir l'abscisse à l'origine de cette droite, on pose $y = 0$ et on obtient $x = 6$.
Puisque $B$ est le point où la médiatrice de $AC$ coupe l'axe des abscisses, alors l'abscisse de $B$ est égale à 6.
(On peut vérifier que si $B$ a pour coordonnées $(6, 0)$, alors $AB$ est perpendiculaire à $BC$.)

*Solution 2*
Puisque le triangle $ABC$ est isocèle et rectangle, alors $\angle ABC = 90°$ et $AB$ est perpendiculaire à $BC$.
Soit $(b, 0)$ les coordonnées de $B$.
La pente de $AB$ est donc égale à $\dfrac{2-0}{2-b}$ et celle de $BC$ est égale à $\dfrac{4-0}{8-b}$.
Puisque $AB$ est perpendiculaire à $BC$, la pente de l'une est l'opposé de l'inverse de la pente de

l'autre. Donc :

$$\begin{aligned}
\frac{2}{2-b} &= -\frac{8-b}{4} \\
-8 &= (2-b)(8-b) \\
-8 &= b^2-10b+16 \\
b^2-10b+24 &= 0 \\
(b-4)(b-6) &= 0
\end{aligned}$$

Donc $b=4$ ou $b=6$.
On doit vérifier laquelle de ces valeurs de $b$ nous donne $AB=BC$ (on a déjà traité de la perpendicularité).
Si $b=4$, alors $AB=\sqrt{(4-2)^2+(0-2)^2}$, ou $AB=\sqrt{8}$, et $BC=\sqrt{(8-4)^2+(4-0)^2}$, ou $BC=\sqrt{32}$. Donc $AB\neq BC$.
L'abscisse de $B$ donc être égale à 6.
(On peut vérifier que dans ce cas, $AB$ est bien égal à $BC$.)

*Solution 3*
Pour se rendre de $A$ à $C$, on se déplace de 6 unités vers la droite et de 2 unités vers le haut.
Supposons que pour se rendre de $A$ à $B$, on se déplace de $p$ unités vers la droite et de $q$ vers le bas, $p,q>0$.
Puisque $BC$ est perpendiculaire à $AB$ et que les deux segments ont la même longueur, alors pour se rendre de $B$ à $C$, il faut se déplacer de $q$ unités vers la droite et de $p$ unités vers le haut. (On peut le vérifier en portant attention à la pente de $AB$ et à celle de $BC$.)
Donc, pour se rendre de $A$ à $C$ en passant par $B$, on se déplace de $p+q$ unités vers la droite et de $q-p$ unités vers le haut. Or, ce résultat est le même que si on se rendait directement de $C$ à $A$. Donc $p+q=6$ et $q-p=2$.
Puisque $p+q=6$ et $q-p=2$, alors $2q=8$ (on a additionné les équations, membre par membre), d'où $q=4$ et $p=2$.
Puisque $A$ a pour coordonnées $(2,2)$, alors $B$ a pour coordonnées $(6,0)$ et ce point est bien situé sur l'axe des abscisses.

Réponse : (D)

18. Supposons que Katrina et Alphonse ont chacun $n$ pommes au départ.
Après que Katrina a donné 12 pommes à Alphonse, elle a $n-12$ pommes et Alphonse en a $n+12$.
Après que Katrina a donné la moitié des pommes qui lui restaient (soit $\frac{1}{2}(n-12)$ pommes) à Alphonse, il lui reste $\frac{1}{2}(n-12)$ pommes, soit $\frac{1}{2}n-6$ pommes, tandis qu'Alphonse a $n+12+\frac{1}{2}(n-12)$ pommes, soit $\frac{3}{2}n+6$ pommes.
Puisque Alphonse a maintenant quatre fois autant de pommes que Katrina, alors $4(\frac{1}{2}n-6)=\frac{3}{2}n+6$, c'est-à-dire que $2n-24=\frac{3}{2}n+6$, d'où $\frac{1}{2}n=30$, ou $n=60$.
Katrina a présentement $\frac{1}{2}(60-12)$ pommes, soit 24 pommes.

Réponse : (B)

19. On utilise l'*inégalité du triangle*, qui affirme que dans un triangle, la longueur d'un côté doit être inférieure à la somme des longueurs des deux autres côtés. (Par exemple, dans le triangle $ABC$, on a $AC < AB + BC$, d'où $AC < 19$.) L'inégalité du triangle est une façon d'exprimer que le plus court chemin entre deux points est la ligne droite et que si on prend un détour en passant par un autre point, le trajet est plus long.
Dans le triangle $ABC$, on a $AC < AB + BC$, d'où $AC < 19$.
Dans le triangle $ACD$, on a $DC < DA + AC$, c'est-à-dire $19 < 5 + AC$, ou $AC > 14$.
Parmi les choix de réponse, seul 15 est situé entre 14 et 19. Donc, la réponse doit être 15. (On peut vérifier que si $AC = 15$, il est possible de construire chaque triangle.)

Réponse : (D)

20. *Solution 1*
On peut choisir une parabole particulière qui a les mêmes caractéristiques, soit la parabole d'équation $y = -(x + 2)(x - 1)$, ou $y = -x^2 - x + 2$. Elle a une ordonnée à l'origine positive ; elle est orientée vers le bas ; son abscisse à l'origine négative est plus éloignée de l'origine que ne l'est son abscisse à l'origine positive.
Pour cette parabole, on a $a = -1$, $b = -1$, $c = 2$.
Pour ces valeurs, seul le choix $c - a$ est positif.
Donc, la réponse doit être $c - a$.

*Solution 2*
Puisque la parabole est orientée vers le bas, on a $a < 0$. Donc, le choix (A) est éliminé. Puisque l'expression $ab^2$ a une valeur négative, le choix (C) est éliminé.
L'ordonnée à l'origine de la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ est $c$. (On l'obtient en posant $x = 0$.) Puisque l'ordonnée à l'origine est positive dans la figure, alors $c > 0$.
Puisque $a$ est négatif, alors $c - a$ est positif. Cette expression doit être la réponse, puisqu'un seul des choix est correct.
(On peut vérifier que $b$ doit être négatif, puisque $a$ est négatif et que le sommet est situé à la gauche de l'axe des ordonnées. Donc $bc$ et $b - c$ doivent être négatifs.)

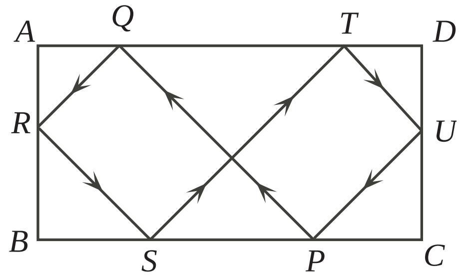
Réponse : (E)

21. Puisque $m$ est le troisième nombre, alors les cinq entiers sont, dans l'ordre, $m - 2$, $m - 1$, $m$, $m + 1$ et $m + 2$.
La somme des cinq nombres est donc égale à $(m - 2) + (m - 1) + m + (m + 1) + (m + 2)$, ou $5m$.
La somme des trois nombres au milieu est égale à $(m - 1) + m + (m + 1)$, ou $3m$.
On cherche donc la plus petite valeur de $m$ pour laquelle $3m$ est un carré parfait et $5m$ est un cube parfait.
On considère écrire $m$, $3m$ et $5m$ en factorisation première.
Pour que $3m$ soit un carré parfait, chacun des nombres premiers dans sa factorisation première doit paraître un nombre pair de fois. Donc, le nombre premier 3 doit paraître un nombre impair de fois dans la factorisation première de $m$.
Pour que $5m$ soit un cube parfait, chacun des nombres premiers dans sa factorisation première doit paraître un nombre de fois qui est un multiple de 3. Donc, dans la factorisation première de $m$, le nombre premier 5 doit paraître un nombre de fois qui est 1 de moins qu'un multiple de 3.
Les nombres premiers 3 et 5 sont donc facteurs premiers de $m$, Pour minimiser la valeur de $m$, aucun autre nombre premier ne doit paraître dans sa factorisation première.
Pour que $3m$ soit un carré parfait, 5 doit paraître un nombre pair de fois dans $3m$.

Pour que $5m$ soit un cube parfait, le nombre de fois que 5 paraît dans $5m$ est un multiple de 3. Donc, $m$ est un nombre qui comporte un nombre impair de facteurs 3 et un nombre pair de facteurs 5 (puisque c'est le cas de $3m$) ; en même temps, le nombre de facteurs 3 est un multiple de 3 (puisque c'est le cas de $5m$) et le nombre de facteurs 5 est 1 de moins qu'un multiple de 3. Pour minimiser la valeur de $m$, $m$ doit comporter le moins de facteurs 3 et 5 possible, soit trois 3 et deux 5. Donc $m = 3^3 5^2$, ou $m = 675$.

Réponse : (D)

22. Soit $A$, $B$, $C$ et $D$ les sommets du rectangle et soit $P$, $Q$, $R$, $S$, $T$ et $U$ les points, dans l'ordre, où la balle frappe les bords de la table.

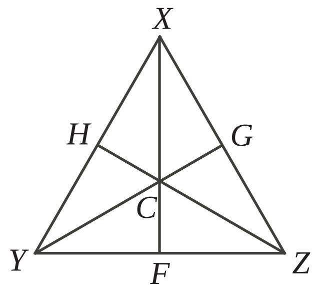



Chacun des segments du trajet de la balle forme un angle de 45° avec le bord de la table.
Donc $PQ = \sqrt{2}AB$. De même, $QR = \sqrt{2}AR$ et $RS = \sqrt{2}RB$. Donc $QR + RS = \sqrt{2}(AR + RB)$, ou $QR + RS = \sqrt{2}AB$.
De la même manière, $ST = \sqrt{2}CD$ et $TU + UP = \sqrt{2}CD$.
Puisque $AB = CD$, alors $PQ + QR + RS + ST + TU + UP = 4\sqrt{2}AB$.
Or, on sait que la balle parcourt une distance totale de 7 m. Donc $AB = \frac{7}{4\sqrt{2}}$ m.

De plus, $PQ = \sqrt{2} \times$ la distance horizontale de $P$ à $Q$, $QR = \sqrt{2}QA$ et $PU = \sqrt{2}PC$.
Donc $PQ + QR + PU = \sqrt{2}AD$ (puisque $QA$ plus $PC$ plus la distance horizontale de $P$ à $Q$ est égal à la longueur du rectangle).
De même, $RS + ST + TU = \sqrt{2}BC = \sqrt{2}AD$.
Donc $PQ + QR + RS + ST + TU + UP = 2\sqrt{2}AD$, d'où $AD = \frac{7}{2\sqrt{2}}$ m.
Le périmètre de la table est donc égal à $2AD + 2AB$, soit $\left(\frac{7}{\sqrt{2}} + \frac{7}{2\sqrt{2}}\right)$ m, ou environ 7,425 m.
Parmi les choix, la meilleure approximation est 7,5 m.

Réponse : (B)

23. Puisque chaque fil a la même longueur et puisque la distance verticale de $O$ à chacun des points $M$, $N$ et $P$ est la même, alors $OX = OY = OZ$.
Soit $x = OX = OY = OZ$.
Puisque chaque fil a une longueur de 100, alors $XM = YN = ZP = 100 - x$.
Donc, le point $M$ est à une distance de $100 - x$ au-dessous de $X$. Puisque $M$ est à une distance de 90 du plafond, donc la distance de $X$ au plafond (c'est-à-dire la distance entre le triangle et le plafond) est égale à $90 - (100 - x)$, ou $x - 10$.
Soit $C$ le centre du triangle $XYZ$.
Par symétrie, $O$ est directement au-dessus de $C$ et on a donc $OC = x - 10$.
On a aussi $OX = x$.
D'après le théorème de Pythagore dans le triangle $OXC$, $OX^2 = OC^2 + XC^2$.
Pour continuer, on a besoin de la longueur $XC$.
On trace les hauteurs $XF$, $YG$ et $ZH$. On sait que $C$ est le point d'intersection des hauteurs $XF$, $YG$ et $ZH$.




Puisque le triangle $XYZ$ est équilatéral, $H$ est le milieu du côté $XY$ et $XF$ est la bissectrice de l'angle $ZXY$.
Puisque $XY = 60$, alors $XH = 30$ et $\angle CXH = 30^\circ$.
Le triangle $CXH$ est un triangle remarquable 30°-60°-90°. Donc $CX = \frac{2}{\sqrt{3}}XH$, c'est-à-dire que $CX = \frac{2}{\sqrt{3}}(30)$, ou $\frac{60\sqrt{3}}{3}$, ou $CX = 20\sqrt{3}$.
Puisque $OX^2 = OC^2 + XC^2$, alors :

$$\begin{aligned} x^2 &= (x-10)^2 + (20\sqrt{3})^2 \\ x^2 &= x^2 - 20x + 100 + 1200 \\ 20x &= 1300 \\ x &= 65 \end{aligned}$$

La distance verticale entre le triangle et le plafond est donc égale à $x - 10$, soit 55 cm.

Réponse : (D)

24. Soit $b$ l'ordonnée à l'origine de la droite, $b > 0$.
Puisque la droite a une pente de 1, son abscisse à l'origine est égale à $-b$. $P$ a donc pour coordonnées $(-b, 0)$.
Puisque $P$, $Q$ et $R$ sont alignés et que $PQ = QR$, alors le déplacement horizontal de $P$ à $Q$ est égal au déplacement horizontal de $Q$ à $R$. Donc, la différence des abscisses de $Q$ et de $P$ est égale à celle de $R$ et de $Q$.
Puisque la droite a une pente de 1 et une ordonnée à l'origine de $b$, elle a pour équation $y = x+b$.
On peut déterminer l'abscisse de $Q$ et de $R$ en déterminant les points d'intersection de la parabole d'équation $y = x^2$ et de la droite d'équation $y = x+b$. À ces points, pour une même valeur de $x$, on a une même valeur de $y$ dans les deux équations. On a donc :

$$\begin{aligned} x^2 &= x + b \\ x^2 - x - b &= 0 \\ x &= \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(1)(-b)}}{2} \qquad \text{(d'après la formule)} \\ x &= \frac{1 \pm \sqrt{1+4b}}{2} \end{aligned}$$

D'après la figure, l'abscisse de $Q$ est égale à $\dfrac{1-\sqrt{1+4b}}{2}$ et celle de $R$ est égale à $\dfrac{1+\sqrt{1+4b}}{2}$.

On a donc :

$$\begin{aligned}
\frac{1-\sqrt{1+4b}}{2}-(-b) &= \frac{1+\sqrt{1+4b}}{2}-\frac{1-\sqrt{1+4b}}{2} \\
\frac{1-\sqrt{1+4b}}{2}+b &= \sqrt{1+4b} \\
1-\sqrt{1+4b}+2b &= 2\sqrt{1+4b} \\
1+2b &= 3\sqrt{1+4b} \\
(1+2b)^2 &= (3\sqrt{1+4b})^2 \\
1+4b+4b^2 &= 9(1+4b) \\
4b^2-32b-8 &= 0 \\
b^2-8b-2 &= 0 \\
b &= \frac{8\pm\sqrt{8^2-4(1)(-2)}}{2} \\
b &= \frac{8\pm\sqrt{72}}{2} \\
b &= 4\pm 3\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Puisque $b > 0$, alors $b = 4 + 3\sqrt{2}$, soit $b \approx 8{,}243$.
(Dans ce problème, il est possible de déterminer la réponse, parmi les choix, en traçant une figure à l'échelle.)

Réponse : (C)

25. On place les $n + r$ boules en choisissant une boule au hasard, en la plaçant dans la première position, en choisissant une deuxième boule au hasard, en la plaçant dans la dernière position, puis en choisissant les autres boules au hasard et en les plaçant l'une à la suite de l'autre.
On calcule la probabilité pour que les deux extrémités soient noires. La probabilité pour que la première boule soit noire est égale à $\frac{n}{n+r}$. Il reste alors $n+r-1$ boules dont $n-1$ sont noires. La probabilité de choisir une deuxième boule noire est donc égale à $\frac{n-1}{n+r-1}$. Les autres boules peuvent être choisies de n'importe quelle façon. La probabilité de choisir deux boules noires pour les extrémités est donc égale à $\frac{n}{n+r}\cdot\frac{n-1}{n+r-1}$.
De la même manière, la probabilité pour que les deux extrémités soient rouges est égale à $\frac{r}{n+r}\cdot\frac{r-1}{n+r-1}$.
Donc, la probabilité pour que la première boule et la dernière boule aient la même couleur est égale à

$$\frac{n}{n+r}\cdot\frac{n-1}{n+r-1}+\frac{r}{n+r}\cdot\frac{r-1}{n+r-1}$$

et on veut que cette expression soit égale à $\frac{1}{2}$.

Donc :

$$\begin{aligned}
\frac{n}{n+r}\cdot\frac{n-1}{n+r-1}+\frac{r}{n+r}\cdot\frac{r-1}{n+r-1} &= \frac{1}{2}\\
n(n-1)+r(r-1) &= \frac{1}{2}(n+r)(n+r-1)\\
2n^2-2n+2r^2-2r &= n^2+r^2+2nr-n-r\\
n^2-2nr+r^2 &= n+r\\
(r-n)^2 &= n+r
\end{aligned}$$

Soit $r-n=k$. (Puisque $r\geq n$, alors $k\geq 0$.)
Donc $n+r=k^2$.
On additionne ces deux équations, membre par membre, pour obtenir $2r=k^2+k$.
Donc $r=\frac{1}{2}(k^2+k)=\frac{1}{2}k(k+1)$.
On soustrait ces deux mêmes équations, membre par membre, pour obtenir $2n=k^2-k$. Donc $n=\frac{1}{2}k(k-1)$. (On voit donc que $r$ et $n$ sont des nombres triangulaires consécutifs.)
Puisque $n\geq 4$, alors $k(k-1)\geq 8$, d'où $k\geq 4$.
(Si $k=3$, le membre de gauche de l'inéquation, qui augmente en même temps que $k$, est égal à 6 ; si $k=4$, le membre de gauche est égal à 12.)
Puisque $r\leq 2007$, alors $k(k+1)\leq 4014$, d'où $k\leq 62$.
(Si $k=63$, le membre de gauche de l'inéquation, qui augmente en même temps que $k$, est égal à 4032 ; si $k=62$, le membre de gauche est égal à 3906.)
Donc $4\leq k\leq 62$. Le nombre de valeurs possibles de $k$ est donc égal à $62-4+1$, ou 59.
Il y a donc 59 couples $(n,r)$ possibles.

Réponse : (E)