**Concours canadien de mathématiques**

***Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario***

# *Concours Euclide 2007*

**le mardi 17 avril 2007**

*Solutions*

1. (a) Puisque le point $(a-1, a+1)$ est situé sur la droite d'équation $y = 2x - 3$, alors $a + 1 = 2(a-1) - 3$, ou $a + 1 = 2a - 5$, d'où $a = 6$.

(b) *Solution 1*

Pour se rendre de $P$ à $Q$, on se déplace de 3 unités vers la droite et de 4 unités vers le haut. Puisque $PQ = QR$ et que $R$ est sur le même segment de droite que $P$ et $Q$, on se déplace de la même façon pour se rendre de $Q$ à $R$.

Donc, pour se rendre de $Q(0, 4)$ à $R$, on se déplace de 3 unités vers la droite et de 4 unités vers le haut. Les coordonnées de $R$ sont donc $(3, 8)$.

*Solution 2*

La droite qui passe par les points $P(-3, 0)$ et $Q(0, 4)$ a une ordonnée à l'origine de 4 et une pente de $\dfrac{4-0}{0-(-3)}$, ou $\dfrac{4}{3}$. Son équation est donc $y = \frac{4}{3}x + 4$.

Donc $R$ a pour coordonnées $(a, \frac{4}{3}a + 4)$, $a$ étant un nombre positif quelconque.

Puisque $PQ = QR$, alors $PQ^2 = QR^2$. Donc :

$$\begin{aligned}(-3)^2 + 4^2 &= a^2 + \left(\tfrac{4}{3}a + 4 - 4\right)^2 \\ 25 &= a^2 + \tfrac{16}{9}a^2 \\ \tfrac{25}{9}a^2 &= 25 \\ a^2 &= 9\end{aligned}$$

Puisque $a$ est positif, alors $a = 3$.

Les coordonnées de $R$ sont donc $(3, \frac{4}{3}(3) + 4)$, ou $(3, 8)$.

(c) Puisque $OP = 9$, alors $P$ a pour coordonnées $(9, 0)$.

Puisque $OP = 9$ et $OA = 15$, alors d'après le théorème de Pythagore, on a $AP^2 = OA^2 - OP^2$, c'est-à-dire $AP^2 = 15^2 - 9^2$, ou $AP^2 = 144$. Donc $AP = 12$.

Puisque $P$ a pour coordonnées $(9, 0)$ et que $A$ est situé à 12 unités au-dessus de $P$, alors $A$ a pour coordonnées $(9, 12)$.

Puisque $PB = 4$, alors $B$ a pour coordonnées $(13, 0)$.

La droite qui passe par $A(9, 12)$ et $B(13, 0)$ a pour pente $\dfrac{12-0}{9-13}$, ou $-3$. Son équation est donc $y - 0 = -3(x - 13)$, ou $y = -3x + 39$.

2. (a) Puisque $\cos(\angle BAC) = \dfrac{AB}{AC}$, $\cos(\angle BAC) = \frac{5}{13}$ et $AB = 10$, alors $AC = \frac{13}{5}AB$, c'est-à-dire que $AC = 26$.

Puisque le triangle $ABC$ est rectangle en $B$ alors, d'après le théorème de Pythagore, $BC^2 = AC^2 - AB^2$, c'est-à-dire que $BC^2 = 26^2 - 10^2$, ou $BC^2 = 576$. Puisque $BC > 0$, alors $BC = 24$.

Donc $\tan(\angle ACB) = \dfrac{AB}{BC}$, d'où $\tan(\angle ACB) = \frac{10}{24}$, ou $\tan(\angle ACB) = \frac{5}{12}$.

(b) Puisque $2\sin^2 x + \cos^2 x = \frac{25}{16}$ et que $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ (d'où $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$), alors :

$$\begin{aligned} 2\sin^2 x + (1 - \sin^2 x) &= \tfrac{25}{16} \\ \sin^2 x &= \tfrac{25}{16} - 1 \\ \sin^2 x &= \tfrac{9}{16} \\ \sin x &= \pm\tfrac{3}{4} \end{aligned}$$

Puisque $0^\circ < x < 90^\circ$, alors $\sin x > 0$. Donc $\sin x = \frac{3}{4}$.

(c) Puisque le triangle $ABC$ est isocèle et rectangle, alors $\angle BAC = 45^\circ$.
De plus, $AC = \sqrt{2}AB$, d'où $AC = \sqrt{2}(2\sqrt{2})$, ou $AC = 4$.
Puisque $\angle EAB = 75^\circ$ et $\angle BAC = 45^\circ$, on a $\angle CAE = \angle EAB - \angle BAC$, d'où $\angle CAE = 30^\circ$.
Puisque le triangle $AEC$ est rectangle et qu'il admet un angle de $30^\circ$, il est donc un rectangle remarquable $30^\circ$-$60^\circ$-$90^\circ$.
Donc $EC = \frac{1}{2}AC = 2$ (puisque $EC$ est opposé à l'angle de $30^\circ$) et $AE = \frac{\sqrt{3}}{2}AC$, d'où $AE = 2\sqrt{3}$ (puisque $AE$ est opposé à l'angle de $60^\circ$).
Dans le triangle $CDE$, on a $ED = DC$ et $\angle EDC = 60^\circ$. Le triangle $CDE$ est donc équilateral. Donc $ED = CD = EC = 2$.
Le périmètre de $ABCDE$ est donc égal à $AB + BC + CD + DE + EA$, soit $2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 2 + 2 + 2\sqrt{3}$, ou $4 + 4\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$.

3. (a) D'après les renseignements, le premier terme de la suite est égal à 2007 et chaque autre terme peut être obtenu à partir du terme précédent.
Le deuxième terme est égal à $2^3 + 0^3 + 0^3 + 7^3$, soit $8 + 0 + 0 + 343$, ou 351.
Le troisième terme est égal à $3^3 + 5^3 + 1^3$, soit $27 + 125 + 1$, ou 153.
Le quatrième terme est égal à $1^3 + 5^3 + 3^3$, soit $1 + 125 + 27$, ou 153.
Puisqu'on a deux termes consécutifs égaux, tous les termes qui suivent sont égaux. En effet, chacun de ces termes est égal à 153 et donne 153 comme terme suivant.
Donc, le 2007$^{\text{e}}$ terme est égal à 153.

(b) Le $n^{\text{e}}$ terme de la suite A est égal à $n^2 - 10n + 70$.
La suite B, qui est arithmétique, a pour premier terme 5 et pour raison 10. Son $n^{\text{e}}$ terme est donc égal à $5 + 10(n - 1)$, ou $10n - 5$. (On voit que cette formule génère les premiers termes.)
Pour que le $n^{\text{e}}$ terme de la suite A soit égal au $n^{\text{e}}$ terme de la suite B, il faut que :

$$\begin{aligned} n^2 - 10n + 70 &= 10n - 5 \\ n^2 - 20n + 75 &= 0 \\ (n-5)(n-15) &= 0 \end{aligned}$$

Donc $n = 5$ ou $n = 15$. Les 5$^{\text{e}}$ et 15$^{\text{e}}$ termes des deux suites sont donc égaux.

4. (a) *Solution 1*

On a :

$$\begin{aligned}2+\sqrt{x-2} &= x-2\\ \sqrt{x-2} &= x-4\\ x-2 &= (x-4)^2\\ x-2 &= x^2-8x+16\\ 0 &= x^2-9x+18\\ 0 &= (x-3)(x-6)\end{aligned}$$

Donc $x=3$ ou $x=6$. On vérifie, car on a élevé chaque membre au carré, ce qui a pu introduire de nouvelles racines.

Lorsque $x=3$, le membre de gauche est égal à $2+\sqrt{1}$, ou 3, et le membre de droite est égal à 1. On rejette donc $x=3$.

Lorsque $x=6$, le membre de gauche est égal à $2+\sqrt{4}$, ou 4, et le membre de droite est égal à 4. Donc, la seule racine est 6.

*Solution 2*

Posons $u=\sqrt{x-2}$.

L'équation devient $2+u=u^2$, ou $u^2-u-2=0$, ou $(u-2)(u+1)=0$.

Donc $u=2$ ou $u=-1$.

Or, on ne peut avoir $\sqrt{x-2}=-1$ (car une racine carrée doit être non négative).

Donc $\sqrt{x-2}=2$, d'où $x-2=4$, ou $x=6$.

On peut vérifier que 6 est bien une racine.

(b) *Solution 1*

D'après la figure, la parabole a pour abscisses à l'origine 3 et $-3$.

Donc, l'équation de la parabole est de la forme $y=a(x-3)(x+3)$, $a$ étant un nombre quelconque.

Le triangle $ABC$ a une base $AB$ de longueur 6 et une hauteur correspondante $OC$ de longueur $h$, $O$ étant l'origine.

L'aire du triangle $ABC$ est égale à $\frac{1}{2}(AB)h$, ou $3h$. Or, on sait que cette aire est égale à 54. Donc $3h=54$, d'où $h=18$.

Le point $C$ a donc pour coordonnées (0,$-18$). Puisque $C$ est sur la parabole, ses coordonnées vérifient l'équation de la parabole.

Donc $-18=a(0-3)(0+3)$, d'où $-18=-9a$, ou $a=2$.

L'équation de la parabole est donc $y=2(x-3)(x+3)$, ou $y=2x^2-18$.

*Solution 2*

D'après la figure, la parabole a pour abscisses à l'origine 3 et $-3$.

Le triangle $ABC$ a une base $AB$ de longueur 6 et une hauteur correspondante $OC$ de longueur $h$, $O$ étant l'origine.

L'aire du triangle $ABC$ est égale à $\frac{1}{2}(AB)h$, ou $3h$. Or, on sait que cette aire est égale à 54. Donc $3h = 54$, d'où $h = 18$.

La parabole a donc pour sommet $C(0,-18)$. Son équation est donc de la forme $y = a(x - 0)^2 - 18$.

(Puisque les abscisses à l'origine de la parabole égalent 3 et $-3$, alors par symétrie, le sommet doit être situé sur l'axe des ordonnées. $C$ est donc le sommet.)

Puisque le point $B(3, 0)$ est sur la parabole, ses coordonnées vérifient l'équation. Donc $0 = a(3)^2 - 18$, d'où $9a = 18$, ou $a = 2$.

L'équation de la parabole est donc $y = 2x^2 - 18$.

5. (a) Puisque $\dfrac{72^\circ}{360^\circ} = \dfrac{1}{5}$, la longueur de l'arc du secteur est égale à $\dfrac{1}{5}$ de la circonférence d'un cercle de rayon 5.

La longueur de l'arc est donc égale à $\frac{1}{5}(2\pi(5))$, ou $2\pi$.

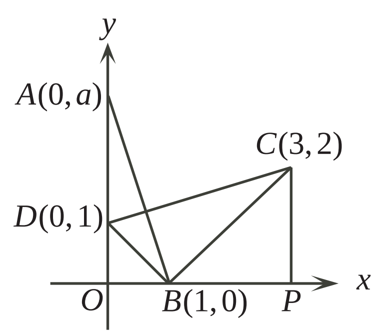
Le périmètre du secteur est donc égal à $5 + 5 + 2\pi$, ou $10 + 2\pi$.

(b) Puisque le triangle $AOB$ est rectangle en $O$, son aire est égale à $\frac{1}{2}(AO)(OB)$, soit $\frac{1}{2}a(1)$, ou $\frac{1}{2}a$.

On doit ensuite déterminer l'aire du triangle $BCD$.

<u>1re approche : À partir de l'aire d'un trapèze</u>

Au point $C$, on abaisse une perpendiculaire $CP$ à l'axe des abscisses. On a $P(3, 0)$.




Donc, $DOPC$ est un trapèze ayant pour bases $DO$ de longueur 1 et $PC$ de longueur 2. Sa hauteur $OP$ (qui est bien perpendiculaire aux bases) a une longueur de 3.

L'aire du trapèze est égale à $\frac{1}{2}(DO + PC)(OP)$, soit $\frac{1}{2}(1 + 2)(3)$, ou $\frac{9}{2}$.

Or, l'aire du triangle $BCD$ est égale à l'aire du trapèze $DOPC$ moins l'aire des triangles $DOB$ et $BPC$.

Le triangle $DOB$ est rectangle en $O$. Son aire est égale à $\frac{1}{2}(DO)(OB)$, soit $\frac{1}{2}(1)(1)$, ou $\frac{1}{2}$.

Le triangle $BPC$ est rectangle en $P$. Son aire est égale à $\frac{1}{2}(BP)(PC)$, soit $\frac{1}{2}(2)(2)$, ou 2.

Donc, l'aire du triangle $DBC$ est égale à $\frac{9}{2} - \frac{1}{2} - 2$, ou 2.

(Pour calculer l'aire du triangle $DBC$, on aurait pu, au point $C$, abaisser une perpendiculaire $CQ$ à l'axe des ordonnées de manière à créer un rectangle $QOPC$.)

2ᵉ approche : On utilise le fait que le triangle $DBC$ est rectangle.

La pente du segment $DB$ est égale à $\dfrac{1-0}{0-1}$, ou $-1$.

La pente du segment $BC$ est égale à $\dfrac{2-0}{3-1}$, ou 1.

Puisque le produit de ces pentes est égal à $-1$, alors $DB$ et $BC$ sont perpendiculaires.

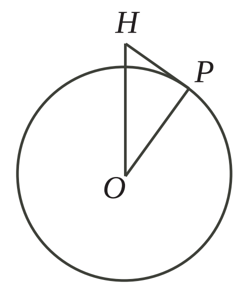
L'aire du triangle $DBC$ est égale à $\frac{1}{2}(DB)(BC)$.

Or $DB = \sqrt{(1-0)^2 + (0-1)^2}$, ou $\sqrt{2}$, et $BC = \sqrt{(3-1)^2 + (2-0)^2}$, ou $\sqrt{8}$.

Donc, l'aire du triangle $DBC$ est égale à $\frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{8}$, ou 2.

Puisque l'aire du triangle $AOB$ est égale à celle du triangle $DBC$, alors $\frac{1}{2}a = 2$, d'où $a = 4$.

6. (a) Soit $O$ le centre de la planète, $H$ l'habitacle de l'hélicoptère de notre héros hardi et $P$ le point le plus éloigné que le Petit Prince puisse voir sur la surface de la planète.




$HP$ est tangent à la surface de la planète (autrement le Petit Prince pourrait voir plus loin). Donc le rayon $OP$ est perpendiculaire à la tangente $HP$.

On sait que $OP = 24$ km.

Puisque l'hélicoptère plane à une hauteur de 2 km, alors $OH = 26$ km $(24 + 2)$.

Donc $HP^2 = OH^2 - OP^2$, c'est-à-dire que $HP^2 = 26^2 - 24^2$, ou $HP^2 = 100$. Donc $HP = 10$ km.

Le Petit Prince peut donc voir à une distance de 10 km.

(b) Puisqu'on connaît la mesure de l'angle $ADB$, on peut déterminer les distances $AD$ et $BD$, puis utiliser la loi du cosinus pour déterminer la distance $AB$.

Dans le triangle $DBE$, $\angle DBE = 180° - 20° - 70°$, ou $\angle DBE = 90°$. Le triangle $DBE$ est rectangle et on a donc $BD = 100\cos(20°)$, ou $BD \approx 93{,}969$.

Dans le triangle $DAC$, $\angle DAC = 180° - 50° - 45°$, ou $\angle DAC = 85°$.

D'après la loi des sinus, $\dfrac{AD}{\sin(50°)} = \dfrac{CD}{\sin(85°)}$. Donc $AD = \dfrac{150\sin(50°)}{\sin(85°)}$, ou $AD \approx 115{,}346$.

D'après la loi du cosinus dans le triangle $ABD$, on a :

$$\begin{aligned} AB^2 &= AD^2 + BD^2 - 2(AD)(BD)\cos(\angle ADB) \\ AB^2 &\approx (115{,}346)^2 + (93{,}969)^2 - 2(115{,}346)(93{,}969)\cos(35^\circ) \\ AB^2 &\approx 4377{,}379 \\ AB &\approx 66{,}16 \end{aligned}$$

Donc, la distance de $A$ à $B$ est d'environ 66 m.

7. (a) On utilise les lois des logarithmes :

$$\begin{aligned} (\sqrt{x})^{\log_{10} x} &= 100 \\ \log_{10}\left((\sqrt{x})^{\log_{10} x}\right) &= \log_{10} 100 \\ (\log_{10} x)(\log_{10} \sqrt{x}) &= 2 \\ (\log_{10} x)(\log_{10} x^{\frac{1}{2}}) &= 2 \\ (\log_{10} x)(\tfrac{1}{2}\log_{10} x) &= 2 \\ (\log_{10} x)^2 &= 4 \\ \log_{10} x &= \pm 2 \\ x &= 10^{\pm 2} \end{aligned}$$

Donc $x = 100$ ou $x = \frac{1}{100}$.
(On peut vérifier en reportant chaque valeur dans l'équation initiale.)

(b) *Solution 1*

On peut supposer, sans perte de généralité, que le carré $ABCD$ a des côtés de longueur 1.
Soit $BF = a$ et $\angle CFB = \theta$.
Puisque le triangle $CBF$ est rectangle en $B$, alors $\angle BCF = 90^\circ - \theta$.
Puisque $GCF$ est une droite, alors $\angle GCD = 180^\circ - 90^\circ - (90^\circ - \theta)$, ou $\angle GCD = \theta$.
Puisque les triangles $GDC$ et $CBF$ sont rectangles et qu'ils ont chacun un angle $\theta$, ils sont semblables.
Donc $\dfrac{GD}{DC} = \dfrac{BC}{BF}$, ou $\dfrac{GD}{1} = \dfrac{1}{a}$, d'où $GD = \dfrac{1}{a}$.
Donc $AF = AB + BF$, ou $AF = 1 + a$, et $AG = AD + DG$, ou $AG = 1 + \dfrac{1}{a} = \dfrac{a+1}{a}$.
Donc $\dfrac{1}{AF} + \dfrac{1}{AG} = \dfrac{1}{1+a} + \dfrac{a}{a+1}$, c'est-à-dire que $\dfrac{1}{AF} + \dfrac{1}{AG} = \dfrac{a+1}{a+1} = 1$.
Donc $\dfrac{1}{AF} + \dfrac{1}{AG} = \dfrac{1}{AB}$.

*Solution 2*

On ajoute un repère cartésien de manière que $A$ soit à l'origine, que $AF$ soit sur la partie positive de l'axe des abscisses, que $AG$ soit sur la partie positive de l'axe des ordonnées et que $B$ ait pour coordonnées $(1,0)$. Donc $C$ a pour coordonnées $(1,1)$.

Soit $m$ la pente de la droite qui passe par les points $G$ et $F$.
Puisque cette droite passe par le point (1,1), elle a pour équation $y - 1 = m(x - 1)$, ou $y = mx + (1 - m)$.
L'ordonnée à l'origine de la droite est égale à $1-m$. Donc, $G$ a pour coordonnées $(0, 1-m)$.
L'abscisse à l'origine de la droite est égale à $\frac{m-1}{m}$. Donc, $F$ a pour coordonnées $\left(\frac{m-1}{m}, 0\right)$.
(On sait que $m \neq 0$, car la droite ne peut être horizontale.)
Donc :

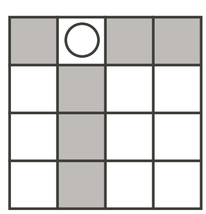
$$\frac{1}{AF} + \frac{1}{AG} = \frac{m}{m-1} + \frac{1}{1-m} = \frac{m}{m-1} + \frac{-1}{m-1} = \frac{m-1}{m-1} = 1 = \frac{1}{AB}$$

*Solution 3*
On joint les points $A$ et $C$.
On sait que la somme de l'aire des triangles $GCA$ et $FCA$ est égale à l'aire du triangle $GAF$.
L'aire du triangle $GCA$ est égale à $\frac{1}{2}(AG)(DC)$ (on prend $AG$ pour base et $DC$ est perpendiculaire à $AG$).
De même, l'aire du triangle $FCA$ est égale à $\frac{1}{2}(AF)(CB)$.
De plus, l'aire du triangle $GAF$ est égale à $\frac{1}{2}(AG)(AF)$.
On a donc :

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}(AG)(DC) + \tfrac{1}{2}(AF)(CB) &= \tfrac{1}{2}(AG)(AF) \\ \frac{(AG)(DC)}{(AG)(AF)(AB)} + \frac{(AF)(CB)}{(AG)(AF)(AB)} &= \frac{(AG)(AF)}{(AG)(AF)(AB)} \\ \frac{1}{AF} + \frac{1}{AG} &= \frac{1}{AB} \end{aligned}$$

puisque $AB = DC = CB$.

8. (a) On place les pièces de monnaie une à la fois.
On place d'abord une pièce au hasard dans une case du quadrillage.
Il reste 15 cases dans lesquelles on peut placer la 2e pièce ; or, 6 de ces 15 cases sont dans la même ligne ou dans la même colonne que la 1re pièce. On peut donc placer la 2e pièce dans une de 9 cases.



Donc, la probabilité pour que les deux pièces ne soient pas dans la même ligne, ni dans la même colonne est égale à $\frac{9}{15}$, ou $\frac{3}{5}$.
Il reste 14 cases dans lesquelles on peut placer la 3e pièce ; or, 6 de ces 14 cases sont dans

la même ligne ou dans la même colonne que la $1^{\text{re}}$ pièce et 4 autres de ces cases sont dans la même ligne ou la même colonne que la $2^{\text{e}}$ pièce. Donc, la probabilité pour que la troisième pièce soit placée dans une ligne différente et dans une colonne différente que les deux premières pièces est égale à $\frac{4}{14}$, ou $\frac{2}{7}$.

Donc, la probabilité pour que les trois pièces soient dans des lignes différentes et des colonnes différentes est égale à $\frac{3}{5} \times \frac{2}{7}$, ou $\frac{6}{35}$.

(b) Soit $AB = c$, $AC = b$ et $BC = a$.

Puisque $DG$ est parallèle à $AC$, $\angle BDG = \angle BAC$ et $\angle DGB = \angle ACB$. Donc, le triangle $DGB$ est semblable au triangle $ACB$.

De même, les triangles $AED$ et $ECF$ sont semblables au triangle $ABC$.

Soit $DB = kc$ $(0 < k < 1)$.

Donc, le rapport des longueurs des côtés du triangle $DGB$ à celles des côtés correspondants du triangle $ACB$ est égal à $k : 1$. Donc $BG = ka$ et $DG = kb$.

De plus, le rapport de l'aire des triangles est égal à $k^2 : 1$. Puisque l'aire du triangle $ACB$ est égale à 1, l'aire du triangle $DGB$ est égale à $k^2$.

Puisque $AB = c$ et $DB = kc$, alors $AD = (1-k)c$. En utilisant les triangles semblables, comme ci-haut, on a $DE = (1-k)a$ et $AE = (1-k)b$. De plus, l'aire du triangle $ADE$ est égale à $(1-k)^2$.

Puisque $AC = b$ et $AE = (1-k)b$, alors $EC = kb$. En utilisant les triangles semblables, on a $EF = kc$ et $FC = ka$. De plus, l'aire du triangle $ECF$ est égale à $k^2$.

Or, l'aire du trapèze $DEFG$ est égale à l'aire du grand triangle moins celle des trois petits triangles. Elle est donc égale à $1 - k^2 - k^2 - (1-k)^2$, ou $2k - 3k^2$.

Par définition, on sait que $k \geq 0$. Puisque le point $G$ est situé à la gauche du point $F$, alors $BG + FC \leq BC$, d'où $ka + ka \leq a$, c'est-à dire que $2ka \leq a$, ou $k \leq \frac{1}{2}$.

Soit $f(k) = 2k - 3k^2$. Puisque la courbe représentative de la fonction $f$ est une parabole ouverte vers le bas, la valeur maximale de $f$ est obtenue au sommet de la parabole. L'abscisse du sommet est égale à $-\frac{2}{2(-3)}$, ou $\frac{1}{3}$. Cette valeur est située dans l'intervalle où $k$ est définie, soit $0 \leq k \leq \frac{1}{2}$. Or, $f(\frac{1}{3}) = \frac{2}{3} - 3(\frac{1}{9})$, ou $f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$.

Donc, l'aire maximale du trapèze est égale à $\frac{1}{3}$.

9. (a) Le sommet de la $1^{\text{re}}$ parabole a pour abscisse $-\frac{1}{2}b$.

Puisque chaque parabole passe au point $P$, alors :

$$\begin{aligned}
f\left(-\tfrac{1}{2}b\right) &= g\left(-\tfrac{1}{2}b\right) \\
\tfrac{1}{4}b^2 + b(-\tfrac{1}{2}b) + c &= -\tfrac{1}{4}b^2 + d(-\tfrac{1}{2}b) + e \\
\tfrac{1}{4}b^2 - \tfrac{1}{2}b^2 + c &= -\tfrac{1}{4}b^2 - \tfrac{1}{2}bd + e \\
\tfrac{1}{2}bd &= e - c \\
bd &= 2(e-c)
\end{aligned}$$

(On obtient le même résultat en employant l'abscisse du sommet de la $2^{\text{e}}$ parabole.)

(b) *Solution 1*

Le sommet $P$ de la $1^{\text{re}}$ parabole a pour abscisse $-\frac{1}{2}b$. Son ordonnée est donc égale à $f(-\frac{1}{2}b)$, soit $\frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{2}b^2 + c$, ou $-\frac{1}{4}b^2 + c$.

Le sommet $Q$ de la $2^{\text{e}}$ parabole a pour abscisse $\frac{1}{2}d$. Son ordonnée est donc égale à $g(\frac{1}{2}d)$, soit $-\frac{1}{4}d^2 + \frac{1}{2}d^2 + c$, ou $\frac{1}{4}d^2 + e$.

La droite qui passe par les points $P$ et $Q$ a donc pour pente :

$$\begin{aligned}
\frac{(-\frac{1}{4}b^2 + c) - (\frac{1}{4}d^2 + e)}{-\frac{1}{2}b - \frac{1}{2}d} &= \frac{-\frac{1}{4}(b^2 + d^2) - (e - c)}{-\frac{1}{2}b - \frac{1}{2}d} \\
&= \frac{-\frac{1}{4}(b^2 + d^2) - \frac{1}{2}bd}{-\frac{1}{2}b - \frac{1}{2}d} \\
&= \frac{-\frac{1}{4}(b^2 + 2bd + d^2)}{-\frac{1}{2}(b + d)} \\
&= \tfrac{1}{2}(b + d)
\end{aligned}$$

Son équation est donc :

$$\begin{aligned}
y &= \tfrac{1}{2}(b + d)(x - (-\tfrac{1}{2}b)) + (-\tfrac{1}{4}b^2 + c) \\
&= \tfrac{1}{2}(b + d)x + \tfrac{1}{4}b^2 + \tfrac{1}{4}bd - \tfrac{1}{4}b^2 + c \\
&= \tfrac{1}{2}(b + d)x + \tfrac{1}{4}bd + c \\
&= \tfrac{1}{2}(b + d)x + \tfrac{1}{2}(e - c) + c \\
&= \tfrac{1}{2}(b + d)x + \tfrac{1}{2}(e + c)
\end{aligned}$$

L'ordonnée à l'origine de la droite est donc égale à $\frac{1}{2}(e + c)$.

*Solution 2*

Les paraboles ont pour équation respective $y = x^2 + bx + c$ et $y = -x^2 + dx + e$.

Aux points d'intersection, pour une même valeur de $x$, on a une même valeur de $y$.

On peut donc additionner les deux équations, membre par membre, pour obtenir $2y = (b + d)x + (c + e)$, ou $y = \frac{1}{2}(b + d)x + \frac{1}{2}(c + e)$.

Cette dernière équation est l'équation d'une droite.

Les coordonnées des points $P$ et $Q$, qui vérifient l'équation de chaque parabole, doivent donc vérifier l'équation de cette droite.

Il s'agit donc de la droite qui passe par $P$ et $Q$.

La droite qui passe par les points $P$ et $Q$ a donc pour pente $\frac{1}{2}(b + d)$ et pour ordonnée à l'origine $\frac{1}{2}(c + e)$.

10. (a) Puisque le cercle et les demi-droites $XY$ et $XZ$ sont fixes, alors $XY + XZ$ est fixe.

Puisque les tangentes $VT$ et $VY$ sont issues du même point $V$, alors $VT = VY$.

Puisque les tangentes $WT$ et $WZ$ sont issues du même point $W$, alors $WT = WZ$.

Le périmètre du triangle $VXW$ est donc égal à :

$$\begin{aligned} XV + XW + VW &= XV + XW + VT + WT \\ &= XV + XW + VY + WZ \\ &= XV + VY + XW + WZ \\ &= XY + XZ \end{aligned}$$

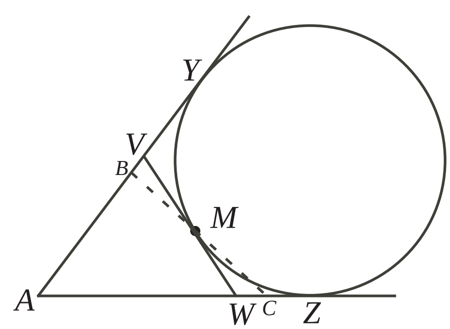
D'après le premier énoncé, le périmètre est constant.

Donc, le périmètre du triangle $VXW$ est toujours égal à $XY + XZ$ et cette quantité est indépendante de la position de $T$.

(b) *Solution 1*

Il est possible de tracer un cercle qui est tangent aux demi-droites $AB$ et $AC$, qui passe par le point $M$ et dont le centre est situé à l'extérieur du triangle $ABC$. (On peut s'en convaincre en imaginant un cercle qui est tangent aux deux demi-droites et que l'on déplace en faisant bouger son centre sur la bissectrice de l'angle $BAC$, à l'extérieur du triangle $ABC$, tout en s'assurant que le cercle soit agrandi ou diminué de manière à demeurer tangent aux deux demi-droites, jusqu'à ce que le cercle passe par $M$.) Soit $Y$ et $Z$ les points de contact respectifs du cercle et des demi-droites $AB$ et $AC$.

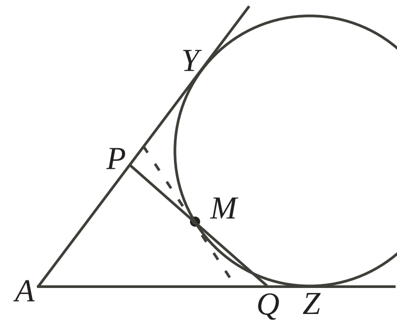
Au point $M$, on trace une tangente au cercle. La tangente coupe la demi-droite $AB$ en $V$ et la demi-droite $AC$ en $W$.




On démontrera que le triangle $AVW$ est le triangle qui a le plus petit périmètre parmi les triangles ayant pour sommet $A$, un sommet situé sur la demi-droite $AB$, un sommet situé sur la demi-droite $AC$ et dont un côté passe par $M$.

D'après la partie (a), on sait que le périmètre du triangle $AVW$ est égal à $AY + AZ$.

On considère un autre triangle $APQ$ obtenu en traçant une autre droite qui passe par $M$. Cette droite $PMQ$ ne peut être elle aussi tangente au cercle. Elle doit donc couper le cercle en deux endroits, soit en $M$ et un autre point).




Or, il existe un autre cercle qui est tangent à cette droite ainsi qu'aux demi-droites $AB$ et $AC$ aux points respectifs $Y'$ et $Z'$, soit le cercle exinscrit au triangle $APQ$ dans l'angle $A$. Puisque $PMQ$ coupe le cercle initial en deux points, le nouveau cercle est formé en faisant glisser le cercle initial vers la droite, tout en l'agrandissant pour qu'il demeure tangent aux deux demi-droites. Donc, $Y'$ et $Z'$ seront plus éloignés, sur les demi-droites $AB$ et $AC$, que $Y$ et $Z$.
Le périmètre du triangle $APQ$ est égal à $AY' + AZ'$, selon la partie (a).
Puisque $AY' + AZ' > AY + AZ$, le périmètre du triangle $APQ$ est plus grand que celui du triangle $AVW$.
Donc, le périmètre est un minimum lorsque le point $M$ est tangent au cercle.

Il reste à déterminer le périmètre du triangle $AVW$. Il suffit de déterminer la longueur de $AZ$. En effet, puisque le pérmiètre du triangle $AVW$ est égal à $AY+AZ$ et que $AY = AZ$, le périmètre du triangle $AVW$ est égal à deux fois la longueur $AZ$.
On calcule d'abord la mesure de l'angle $VAW$ (ou $BAC$) en utilisant la loi du cosinus :

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2(AB)(AC)\cos(\angle BAC) \\ 14^2 &= 10^2 + 16^2 - 2(10)(16)\cos(\angle BAC) \\ 196 &= 356 - 320\cos(\angle BAC) \\ 320\cos(\angle BAC) &= 160 \\ \cos(\angle BAC) &= \tfrac{1}{2} \\ \angle BAC &= 60^\circ \end{aligned}$$

On place la figure dans un plan cartésien de manière que $A$ soit à l'origine $(0, 0)$ et que $AC$ soit situé sur la partie positive de l'axe des abscisses. $C$ a donc pour coordonnées $(16, 0)$. Puisque $\angle BAC = 60^\circ$ et que $AB = 10$, alors $B$ a pour coordonnées $(10\cos(60^\circ), 10\sin(60^\circ))$, ou $(5, 5\sqrt{3})$.
Puisque $M$ est le milieu du segment $BC$, il a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}(5+16), \frac{1}{2}(5\sqrt{3}+0)\right)$, ou $\left(\frac{21}{2}, \frac{5}{2}\sqrt{3}\right)$.
Soit $O$ le centre du cercle qui est tangent aux demi-droites $AB$ et $AC$, qui passe par $M$ et dont le centre est situé à l'extérieur du triangle $ABC$. Soit $r$ son rayon.
Puisque le cercle est tangent aux demi-droites $AB$ et $AC$, le centre du cercle est situé sur la bissectrice de l'angle $BAC$. Il est donc situé sur la droite qui passe à l'origine et

qui forme un angle de 30° avec la partie positive de l'axe des abscisses. La pente de cette droite est donc égale à $\tan(30°)$, ou $\frac{1}{\sqrt{3}}$.
Le centre $O$ a donc une ordonnée égale à $r$, puisque le rayon de $O$ à $AZ$ est perpendiculaire à l'axe des abscisses. Donc, $O$ a pour coordonnées $(\sqrt{3}r, r)$ et $Z$ a pour coordonnées $(\sqrt{3}r, 0)$.
Le périmètre du triangle en question est égal à $2AZ$, ou $2\sqrt{3}r$.
Puisque le cercle a pour centre $(\sqrt{3}r, r)$ et pour rayon $r$, son équation est
$(x - \sqrt{3}r)^2 + (y - r)^2 = r^2$.
Puisque $M$ est situé sur le cercle, ses coordonnées vérifient l'équation, ce qui nous donne une équation en $r$ :

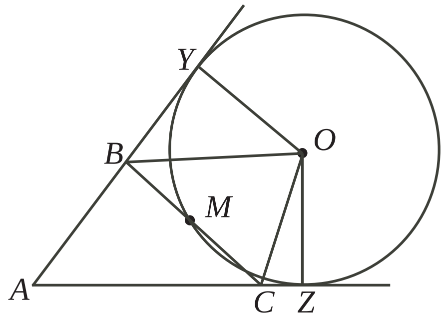
$$\begin{aligned}
\left(\tfrac{21}{2} - \sqrt{3}r\right)^2 + \left(\tfrac{5}{2}\sqrt{3} - r\right)^2 &= r^2 \\
\tfrac{441}{4} - 21\sqrt{3}r + 3r^2 + \tfrac{75}{4} - 5\sqrt{3}r + r^2 &= r^2 \\
3r^2 - 26\sqrt{3}r + 129 &= 0 \\
(\sqrt{3}r)^2 - 2(13)(\sqrt{3}r) + 169 - 40 &= 0 \\
(\sqrt{3}r - 13)^2 &= 40 \\
\sqrt{3}r - 13 &= \pm 2\sqrt{10} \\
r &= \frac{13 \pm 2\sqrt{10}}{\sqrt{3}} \\
r &= \frac{13\sqrt{3} \pm 2\sqrt{30}}{3}
\end{aligned}$$

(Pour résoudre l'équation, on aurait pu utiliser la formule au lieu de compléter le carré.)
On choisit $r = \dfrac{13\sqrt{3} + 2\sqrt{30}}{3}$, puisqu'on cherche le plus grand des deux cercles qui passent par $M$ et qui sont tangents aux deux demi-droites. (Le plus petit des deux cercles est inscrit dans le triangle $ABC$, tandis que le plus grand est exinscrit.)
Le plus petit périmètre possible est donc égal à $2\sqrt{3}r$, c'est-à-dire à $\dfrac{26(3) + 4\sqrt{90}}{3}$, ou $26 + 4\sqrt{10}$.

*Solution 2*
Comme dans la Solution 1, on démontre que le plus petit périmètre possible du triangle $APQ$ est égal à $AY + AZ$.
On cherche ensuite à déterminer la longueur $AY$.
Comme dans la Solution 1, on peut démontrer que $\angle YAZ = 60°$.
Soit $O$ le centre du cercle qui est tangent aux demi-droites $AB$ et $AC$, qui passe par $M$ et dont le centre est situé à l'extérieur du triangle $ABC$. Soit $r$ son rayon.
Puisque le cercle est tangent à $AY$ et à $AZ$ aux points respectifs $Y$ et $Z$, alors $OY$ est perpendiculaire à $AY$ et $OZ$ est perpendiculaire à $AZ$.
Le segment qui joint $O$ à $A$ est sur la bissectrice de l'angle $YAZ$ (puisque le cercle est tangent à $AY$ et à $AZ$). Donc $\angle YAO = 30°$.

Donc $AY = \sqrt{3}(YO)$, d'où $AY = \sqrt{3}r$. De plus, $AZ = AY = \sqrt{3}r$.

On joint ensuite $O$ à $B$ et à $C$.




Puisque $AB = 10$, alors $BY = AY - AB$, ou $BY = \sqrt{3}r - 10$.

Puisque $AC = 10$, alors $CZ = AZ - AC$, ou $CZ = \sqrt{3}r - 16$.

Puisque le triangle $OBY$ est rectangle en $Y$, alors :

$$OB^2 = BY^2 + OY^2 = (\sqrt{3}r - 10)^2 + r^2$$

Puisque le triangle $OCZ$ est rectangle en $Z$, alors :

$$OC^2 = CZ^2 + OZ^2 = (\sqrt{3}r - 16)^2 + r^2$$

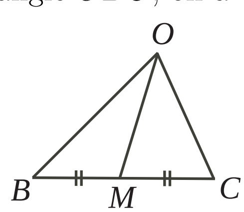
Puisque $BM = MC$, dans le triangle $OBC$, alors $OB^2 + OC^2 = 2BM^2 + 2OM^2$. (On le démontre quelques lignes plus loin, à la fin de la solution.)

Donc :

$$\begin{aligned}
(\sqrt{3}r - 10)^2 + r^2 + (\sqrt{3}r - 16)^2 + r^2 &= 2(7^2) + 2r^2 \\
3r^2 - 20\sqrt{3}r + 100 + r^2 + 3r^2 - 32\sqrt{3}r + 256 + r^2 &= 98 + 2r^2 \\
6r^2 - 52\sqrt{3}r + 258 &= 0 \\
3r^2 - 26\sqrt{3}r + 129 &= 0
\end{aligned}$$

Comme dans la Solution 1, $r = \dfrac{13\sqrt{3} + 2\sqrt{30}}{3}$. Le plus périmètre possible est donc égal à $2\sqrt{3}r$, c'est-à-dire à $\dfrac{26(3) + 4\sqrt{90}}{3}$, ou $26 + 4\sqrt{10}$.

Il reste à démontrer que dans le triangle $OBC$, on a $OB^2 + OC^2 = 2BM^2 + 2OM^2$.




D'après la loi du cosinus dans le triangle $OBM$ :

$$OB^2 = OM^2 + BM^2 - 2(OM)(BM)\cos(\angle OMB)$$

D'après la loi du cosinus dans le triangle $OCM$ :

$$OC^2 = OM^2 + CM^2 - 2(OM)(CM)\cos(\angle OMC)$$

Or $BM = CM$ et $\angle OMC = 180^\circ - \angle OMB$, d'où $\cos(\angle OMC) = -\cos(\angle OMB)$.
Les deux équations deviennent :

$$\begin{aligned} OB^2 &= OM^2 + BM^2 - 2(OM)(BM)\cos(\angle OMB) \\ OC^2 &= OM^2 + BM^2 + 2(OM)(BM)\cos(\angle OMB) \end{aligned}$$

On les additionne, membre par membre, pour obtenir $OB^2 + OC^2 = 2OM^2 + 2BM^2$, ce qu'il fallait démontrer.
(On remarque que ce résultat est vrai pour la médiane de n'importe quel triangle.)