Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Euclide

le mardi 17 avril 2007

Avec la contribution de:

University of Waterloo

Great-West, compagnie d'assurance vie

London Life

Canada-Vie

LA PARFAITE ALLIANCE COMMUNAUTAIRE[MC]

Sybase

iAnywhere Solutions

Samson Bélair Deloitte & Touche Comptables agréés

Maplesoft

Avec la participation de:

Canadian Institute of Actuaries / Institut canadien des actuaires

Durée : 2 heures et demie

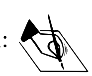
L'utilisation de la calculatrice est permise, pourvu que celle-ci ne soit pas programmable et qu'elle n'ait pas de capacité graphique.

Ne pas ouvrir ce cahier avant le signal. Le concours est composé de 10 questions valant 10 points chacune. Les parties de chaque question peuvent être de deux types. Les parties à **RÉPONSE COURTE** valent 2 points chacune (questions 1 et 2) ou 3 points chacune (questions 3 à 7). Les parties **À DÉVELOPPEMENT** valent le reste des 10 points pour la question.

Directives pour les questions à RÉPONSES COURTES

1. Les parties à **RÉPONSES COURTES** sont indiquées comme ceci:  .
2. **Écrire la réponse dans la case appropriée du cahier-réponse.** Le maximum des points est accordé à une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. Une partie des points sera accordée **pour du travail pertinent** inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse.

Directives pour les questions À DÉVELOPPEMENT

1. Les questions **À DÉVELOPPEMENT** sont indiquées comme ceci:  .
2. **Les solutions complètes doivent être écrites aux endroits appropriés du cahier-réponse.** Le brouillon doit être fait ailleurs. Si le cahier est rempli, le surveillant ou la surveillante distribuera des feuilles lignées. Insérer ces feuilles dans le cahier-réponse. Soyez prudent en inscrivant votre nom sur chaque feuille insérée.
3. Des points sont accordés pour les solutions complètes, ainsi que pour la clarté et le style de la présentation. Une solution correcte, mais mal présentée, ne méritera pas le maximum de points.

Remarque : À la fin du concours, insérer la feuille de renseignements à l'intérieur du cahier-réponse.

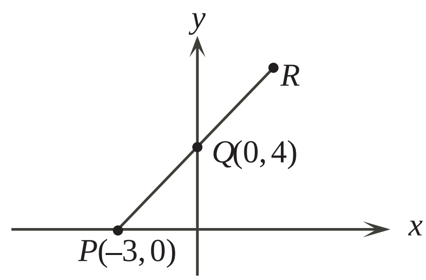
Le nom de quelques-uns des candidats ayant obtenu les meilleurs résultats sera publié dans les Résultats du concours Euclide sur notre site web à http://www.cemc.uwaterloo.ca.

REMARQUES

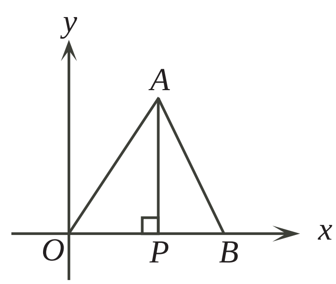
1. Bien lire les directives sur la page couverture de ce cahier.
2. Écrire toutes les réponses dans le cahier-réponse fourni à cet effet.
3. Pour une question accompagnée de « », le maximum des points est accordé à une réponse correcte placée dans la case appropriée du cahier-réponse. **Si une réponse est incorrecte, une partie des points peut être accordée pour du travail pertinent** inscrit dans l'espace fourni à cet effet dans le cahier-réponse. On encourage fortement les candidates et les candidats à montrer leur travail.
4. Sauf indication contraire, les réponses et les calculs devraient être exprimés au moyen de valeurs exactes, telles que 4π, $2+\sqrt{7}$, etc.

1. (a) Le point $(a-1, a+1)$ est situé sur la droite d'équation $y = 2x - 3$. Quelle est la valeur de a ?

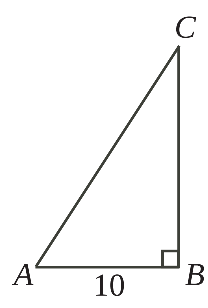
   (b) Dans la figure ci-contre, un segment de droite passe par les points P, Q et R. Si $PQ = QR$, quelles sont les coordonnées de R ?



   (c) Dans la figure ci-contre, $OA = 15$, $OP = 9$ et $PB = 4$. Déterminer l'équation de la droite qui passe par les points A et B. Expliquer sa démarche.

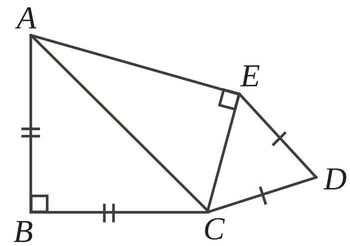


2. (a) Le triangle ABC est rectangle en B et $AB = 10$. Si $\cos(\angle BAC) = \frac{5}{13}$, quelle est la valeur de $\tan(\angle ACB)$?



   (b) Sachant que $0° < x < 90°$ et que $2\sin^2 x + \cos^2 x = \frac{25}{16}$, quelle est la valeur de $\sin x$?

(c) Dans la figure ci-contre, $AB = BC = 2\sqrt{2}$, $CD = DE$, $\angle CDE = 60°$ et $\angle EAB = 75°$. Déterminer le périmètre de la figure $ABCDE$. Expliquer sa démarche.

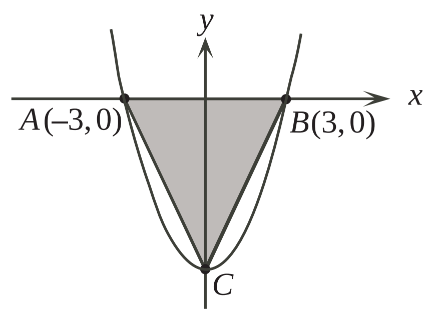


3. (a) Le premier terme d'une suite est égal à 2007. Chaque terme, à partir du deuxième, est égal à la somme des cubes des chiffres du terme précédent. Quel est le 2007[e] terme ?

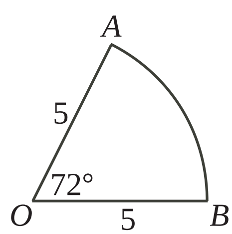
(b) Le n^{e} terme de la suite A est égal à $n^2 - 10n + 70$.
(Les trois premiers termes de la suite A sont 61, 54 et 49.)
La suite B est une suite arithmétique dont le premier terme est égal à 5 et la raison est égale à 10.
(Les trois premiers termes de la suite B sont 5, 15 et 25.)
Déterminer toutes les valeurs de n pour lesquelles le n^{e} terme de la suite A est égal au n^{e} terme de la suite B. Expliquer sa démarche.

4. (a) Déterminer toutes les valeurs de x pour lesquelles $2 + \sqrt{x-2} = x - 2$.

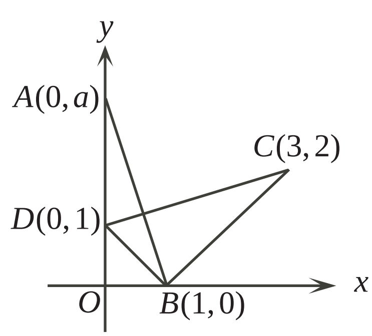
(b) Dans la figure ci-contre, la parabole coupe l'axe des abscisses aux points $A(-3, 0)$ et $B(3, 0)$ et son sommet C est situé en dessous de l'axe des abscisses. Le triangle ABC a une aire de 54. Déterminer l'équation de la parabole. Expliquer sa démarche.



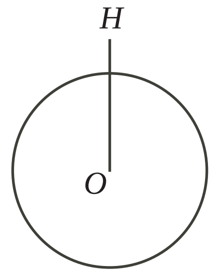
5. (a) Quel est le périmètre du secteur circulaire ci-contre de centre O et de rayon 5 ?



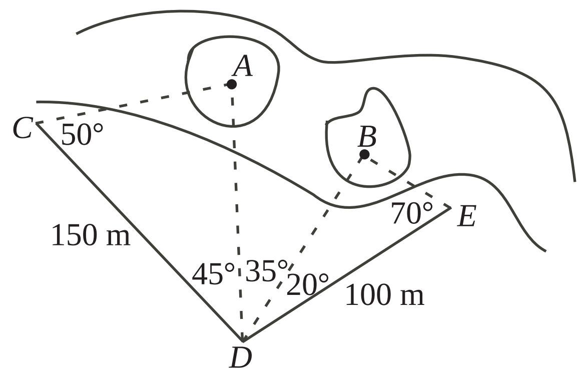
(b) Dans la figure ci-contre, le point $A(0, a)$ est situé sur l'axe des ordonnées au-dessus du point D. Sachant que les triangles AOB et BCD ont la même aire, déterminer la valeur de a. Expliquer sa démarche.



6. (a) Le Petit Prince habite une planète de forme sphérique de centre O qui a un rayon de 24 km. Dans son hélicoptère (H), il plane à une hauteur de 2 km au-dessus d'un point fixe. De cette position, dans son hélicoptère, quelle est la distance, en kilométres, jusqu'au point le plus éloigné qu'il puisse voir sur la surface de la planète ?

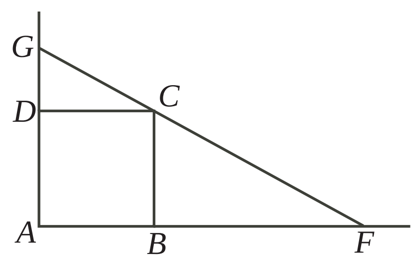


(b) Dans la figure ci-contre, les points A et B sont sur des îles situées dans une rivière pleine de chèvres enragées. Déterminer, au mètre près, la distance de A à B. (Heureusement que quelqu'un a pris la peine de mesurer les angles indiqués, ainsi que les longueurs CD et DE.)

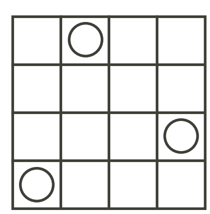


7. (a) Déterminer toutes les valeurs de x pour lesquelles $(\sqrt{x})^{\log_{10} x} = 100$.

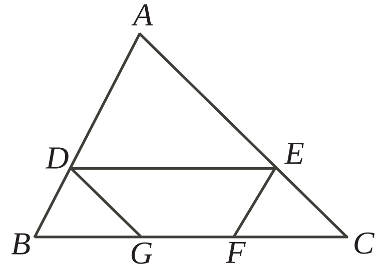
(b) Dans la figure ci-contre, le segment de droite FCG passe par le sommet C du carré $ABCD$. Le point F est situé sur le prolongement du côté AB et le point G est situé sur le prolongement du côté AD. Démontrer que $\dfrac{1}{AB} = \dfrac{1}{AF} + \dfrac{1}{AG}$.



8. (a) On a placé trois pièces de monnaie, au hasard, sur trois cases différentes du quadrillage 4×4 ci-contre. Déterminer la probabilité pour qu'il n'y ait pas deux pièces dans la même ligne, ni dans la même colonne.



(b) Dans la figure ci-contre, le triangle ABC a une aire de 1. Le trapèze $DEFG$ a été construit comme suit : G est situé à la gauche de F sur BC, DE est parallèle à BC, EF est parallèle à AB et DG est parallèle à AC. Déterminer la plus grande aire possible du trapèze $DEFG$.

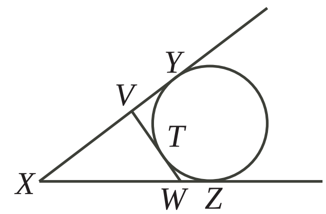


9. La parabole d'équation $y = f(x) = x^2 + bx + c$ a pour sommet P et la parabole d'équation $y = g(x) = -x^2 + dx + e$ a pour sommet Q, P et Q étant des points distincts. De plus, les paraboles se coupent aux points P et Q.

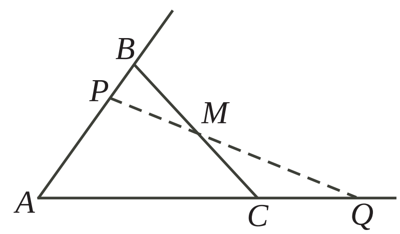
(a) Démontrer que $2(e - c) = bd$.

(b) Démontrer que la droite qui passe par les points P et Q a une pente de $\frac{1}{2}(b + d)$ et une ordonnée à l'origine de $\frac{1}{2}(c + e)$.

10. (a) Dans la figure ci-contre, le cercle est tangent à la demi-droite XY en Y et à la demi-droite XZ en Z. Un point T est choisi sur le petit arc YZ et une tangente au cercle est construite au point T. Elle coupe le segment XY en V et le segment XZ en W. Démontrer que le périmètre du triangle VXW est indépendant de la position du point T.



(b) Dans la figure ci-contre, $AB = 10$, $BC = 14$, $AC = 16$ et M est le milieu du segment BC. Au point M, on peut tracer plus d'une droite. Chacune coupera la demi-droite AB en un point P et la demi-droite AC en un point Q. Déterminer le plus petit périmètre possible du triangle APQ. Justifier sa démarche.



Concours canadien de mathématiques

Pour les élèves...

Merci d'avoir participé au concours Euclide de 2007!
En 2006, plus de 15 000 élèves à travers le monde se sont inscrits au concours Euclide.

Si vous terminez l'école secondaire, nous vous souhaitons bonne chance.
Si vous retournerez à l'école secondaire l'an prochain, encouragez votre enseignant à vous inscrire au Défi ouvert canadien de mathématiques qui aura lieu fin novembre.

Visitez notre site Web au www.cemc.uwaterloo.ca pour
- **plus d'information à propos du Défi ouvert canadien de mathématiques**
- **des copies gratuites des concours précédents**
- **des ateliers pour vous aider à vous préparer aux concours futurs**
- **de l'information au sujet de nos publications qui visent l'enrichissement en mathématiques et la préparation aux concours**
- **de l'information concernant les carrières en mathématiques**

Pour les enseignants...

Visitez notre site Web au www.cemc.uwaterloo.ca pour
- **obtenir des renseignements concernant les concours de 2007/2008**
- **vous renseigner sur des ateliers et des ressources disponibles aux enseignants**
- **trouver les résultats de votre école**