Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Cayley 2007

(10^{e} année ou Secondaire IV)

le mardi 20 février 2007

Solutions

1. On a : $8 + 2(3^2) = 8 + 2(9) = 8 + 18 = 26$

RÉPONSE : (A)

2. On a : $\dfrac{7+21}{14+42} = \dfrac{28}{56} = \dfrac{1}{2}$

RÉPONSE : (C)

3. Si $3x - 2x + x = 3 - 2 + 1$, alors $2x = 2$, ou $x = 1$.

RÉPONSE : (B)

4. En 3 heures, Léone gagne 24,75 \$. En une heure, elle gagne donc 24,75 \$ $\div$ 3, soit 8,25 \$.
Pendant un quart de 5 heures, Léone gagne donc $5 \times$ 8,25 \$, soit 41,25 \$.

RÉPONSE : (E)

5. $\frac{1}{4}$ de 100 est égal à $\frac{1}{4} \times 100$, soit 25.
On évalue chacun des choix de réponse :
   (A) : 20 % de 200 est égal à 0,2(200), soit 40.
   (B) : 10 % de 250 est égal à 0,1(250), soit 25.
   (C) : 15 % de 100 est égal à 15.
   (D) : 25 % de 50 est égal à 0,25(50), soit 12,5.
   (E) : 5% de 300 est égal à 0,05(300), soit 15.

Donc, la réponse est (B).
(Il n'était pas nécessaire d'évaluer (C), (D) et (E) après avoir constaté que la réponse est (B).)

RÉPONSE : (B)

6. On évalue les expressions des choix de réponse en posant $a = 2$ et $b = 5$:
(A) $\dfrac{a}{b} = \dfrac{2}{5}$ (B) $\dfrac{b}{a} = \dfrac{5}{2}$ (C) $a - b = 2 - 5 = -3$ (D) $b - a = 5 - 2 = 3$ (E) $\frac{1}{2}a = \frac{1}{2}(2) = 1$
La plus grande valeur est 3, qui provient de (D).

RÉPONSE : (D)

7. La moyenne de 6, de 9 et de 18 est égale à $\dfrac{6+9+18}{3}$, soit $\dfrac{33}{3}$, ou 11.
Donc, la moyenne de 12 et de y est égale à 11. La somme de 12 et de y est donc égale à 2(11), soit 22. Donc $y = 10$.

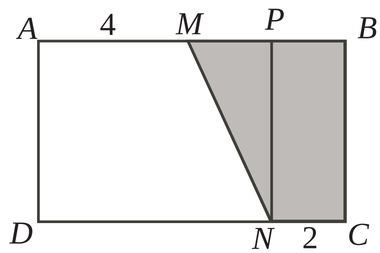
RÉPONSE : (C)

8. Dans le triangle ABC, $\angle ABC = \angle BAC$. Donc $AC = BC$.
Dans le triangle BCD, $\angle CBD = \angle CDB$. Donc $CD = BC$.
Puisque le triangle CBD a un périmètre de 19 et que $BD = 7$, alors $7 + BC + CD = 19$, d'où $2(BC) = 12$, ou $BC = 6$.
Puisque $BC = 6$, $AC = BC$ et que le triangle ABC a un périmètre de 20, alors $AB + 6 + 6 = 20$, d'où $AB = 8$.

RÉPONSE : (D)

9. *Solution 1*
Puisque le rectangle $ABCD$ a une aire de 40 et que $AB = 8$, alors $BC = 5$.
Donc, $MBCN$ est un trapèze ayant des bases de longueurs 2 et 4 et une hauteur de 5. Son aire est donc égale à $\frac{1}{2}(5)(4 + 2)$, soit 15.

Solution 2
Puisque le rectangle $ABCD$ a une aire de 40 et que $AB = 8$, alors $BC = 5$.
Au point N, on abaisse une perpendiculaire NP au côté AB.



La figure $MBCN$ est ainsi divisée en un rectangle $PBCN$, qui a une largeur de 2 et une hauteur de 5, et un triangle MPN qui a une base MP de longueur 2 et une hauteur PN de longueur 5.
L'aire de la figure $MBCN$ est égale à la somme de l'aire de ces parties, soit $2(5) + \frac{1}{2}(2)(5)$, soit $10 + 5$, ou 15.

Réponse : (A)

10. *Solution 1*
On obtient chaque terme en doublant le terme précédent et en ajoutant 4.
Puisque le premier terme est x, le deuxième terme est $2x + 4$.
Puisque le deuxième terme est $2x + 4$, le troisième terme est $2(2x + 4) + 4$, soit $4x + 12$.
Puisque le troisième terme est 52, alors $4x + 12 = 52$, d'où $4x = 40$, ou $x = 10$.

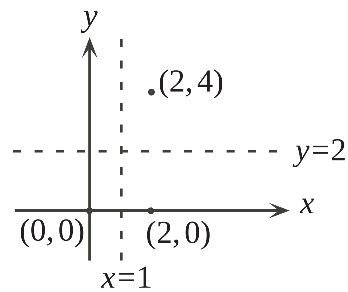
Solution 2
On obtient chaque terme en doublant le terme précédent et en ajoutant 4.
Donc, pour obtenir le terme précédent, on soustrait 4 du terme actuel, puis on divise par 2.
Puisque le troisième terme est 52, on soustrait 4 pour obtenir 48, puis on divise par 2 pour obtenir 24. Le deuxième terme est donc 24.
Puisque le deuxième terme est 24, on soustrait 4 pour obtenir 20, puis on divise par 2 pour obtenir 10. Donc, le premier terme est 10.
Donc $x = 10$.

Réponse : (D)

11. Supposons que Ivan a parcouru une distance de x km lundi.
Donc mardi, il a parcouru $2x$ km ; mercredi, il a parcouru x km ; jeudi, il a parcouru $\frac{1}{2}x$ km ; vendredi, il a parcouru x km.
La distance la plus courte parcourue en une journée est celle de jeudi. Donc $\frac{1}{2}x = 5$, d'où $x = 10$.
Les distances parcourues sont donc 10 km, 20 km, 10 km, 5 km et 10 km, pour un total de 55 km.

Réponse : (A)

12. Lorsque le point (0,0) est réfléchi par rapport à la droite d'équation $x = 1$, l'image est le point (2,0).



Lorsque le point (2,0) est réfléchi par rapport à la droite d'équation $y = 2$, l'image est le point (2,4).

Réponse : (E)

13. *Solution 1*

Puisque le rapport $AN : AC$ est égal au rapport $AP : PB$ (chacun est égal à $1 : 2$) et que l'angle A est commun aux triangles APN et ABC, alors les triangles APN et ABC sont semblables.
Puisque les longueurs de deux côtés correspondants dans ces triangles sont dans un rapport de $1 : 2$, alors les aires sont dans un rapport de $1^2 : 2^2$, soit $1 : 4$.
Donc, l'aire du triangle ABC est égale à 4×2 cm^2, soit 8 cm^2.

Solution 2

Puisque le rapport $AN : AC$ est égal au rapport $AP : PB$ (chacun est égal à $1 : 2$) et que l'angle A est commun aux triangles APN et ABC, alors les triangles APN et ABC sont semblables.
Donc $\angle ANP = \angle ACB = 90°$.
De même, les triangles PMB et ACB sont semblables, d'où $\angle PMB = \angle ACB = 90°$.
Donc $AN = NC = PM = \frac{1}{2}AC$ et $NP = CM = MB = \frac{1}{2}CB$.
Donc, les triangles PMB et ANP sont congruents. Chacun a donc une aire de 2 cm^2.
Le rectangle $NPMC$ a la même base et la même hauteur que le triangle ANP. Son aire est donc le double de celle du triangle APN, soit 4 cm^2.
Donc, l'aire du triangle ABC est égale à $(2 + 4 + 2)$ cm^2, soit 8 cm^2.

Solution 3

On joint C à P.
Puisque CP est une diagonale du rectangle, les triangles CPN et PCM sont congruents. Ils ont donc la même aire.
Puisque $AN = NC$ et que les triangles PNA et PNC ont la même hauteur, soit PN, ils ont la même aire.
De même, les triangles PMC et PMB ont la même aire.
Donc, les quatre petits triangles ont la même aire.
Puisque le triangle APN a une aire de 2 cm^2, le triangle ABC a une aire de 8 cm^2.

Réponse : (A)

14. On utilise un dénominateur commun pour simplifier le membre de gauche :
$\dfrac{3}{x-3} + \dfrac{5}{2x-6} = \dfrac{6}{2x-6} + \dfrac{5}{2x-6} = \dfrac{11}{2x-6}$.
L'équation devient $\dfrac{11}{2x-6} = \dfrac{11}{2}$, d'où $2x - 6 = 2$.

Réponse : (A)

15. Puisque les triangles ABC et PQR sont équilatéraux, $\angle ABC = \angle ACB = \angle RPQ = 60°$.
Donc $\angle YBP = 180° - 65° - 60°$, ou $\angle YBP = 55°$. De plus, $\angle YPB = 180° - 75° - 60°$, ou $\angle YPB = 45°$.
Dans le triangle BYP, $\angle BYP = 180° - \angle YBP - \angle YPB$, d'où $\angle BYP = 180° - 55° - 45°$, ou $\angle BYP = 80°$.
Puisque $\angle XYC = \angle YBP$, alors $\angle XYC = 80°$.
Dans le triangle CXY, $\angle CXY = 180° - 60° - 80°$, ou $\angle CXY = 40°$.

Réponse : (C)

16. Puisque 60 % des 10 000 étudiants sont inscrits dans un programme de lettres, 6000 étudiants sont en lettres et 4000 étudiants sont en sciences.
Puisque 40 % des étudiants inscrits en sciences sont des hommes, cela correspond à 0,4(4000) hommes. Il y a donc 1600 hommes en sciences.
Puisque la moitié des 10 000 étudiants sont des hommes, il y a 5000 hommes inscrits à l'université.
Le nombre d'hommes en lettres est donc égal à $5000 - 1600$, ou 3400.
Le nombre de femmes en lettres est égal à $6000 - 3400$, ou 2600. Donc, le pourcentage des étudiants en lettres qui sont des femmes est égal à $\frac{2600}{6000} \times 100\,\%$, soit environ 43,33 %.

Réponse : (E)

17. On remarque que peu importe le nombre de Héros présents, tous les quatre répondront toujours « Un Héro » lorsqu'on leur demande « Êtes-vous un Héro ou un Vilain ? ». (En effet, les Héros diront la vérité et répondront « Un Héro » et les Vilains mentiront et répondront « Un Héro ».)
Lorsqu'on leur demande « La personne à votre droite est-elle un Héro ou un Vilain ? », chacun répond « Un Vilain ». Donc, chaque Héro doit avoir un Vilain à sa droite (sinon il aurait répondu « Un Héro ») et chaque Vilain doit avoir un Héro à sa droite (sinon il aurait un Vilain à sa droite et aurait répondu « Un Héro »).
Donc, les Héros et les Vilains doivent alterner autour de la table. Il y a donc 2 Héros à la table. (Il est bon de vérifier que si 2 Héros et 2 Vilains alternent autour de la table, on recevra bien ces réponses aux questions.)

Réponse : (C)

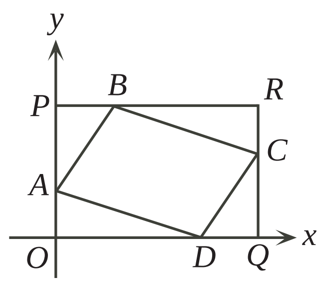
18. *Solution 1*
Soit x le nombre total de boules dans le sac.
Il y a donc $\frac{1}{3}x$ boules rouges et $\frac{2}{7}x$ boules bleues dans le sac.
Le nombre de boules vertes est donc égal à $x - \frac{1}{3}x - \frac{2}{7}x$, c'est-à-dire à $\frac{21}{21}x - \frac{7}{21}x - \frac{6}{21}x$, ou $\frac{8}{21}x$.
Or, on sait que le nombre de boules vertes est égal à $2 \times \frac{2}{7}x - 8$.
Donc $\frac{8}{21}x = 2 \times \left(\frac{2}{7}x\right) - 8$, c'est-à-dire $\frac{8}{21}x = \frac{12}{21}x - 8$, d'où $\frac{4}{21}x = 8$, ou $x = 42$.
Puisque $x = 42$, le nombre de boules vertes est égal à $\frac{8}{21}x$, c'est-à-dire à $\frac{8}{21}(42)$, ou 16.

Solution 2
On suppose qu'il y a 21 boules dans le sac. (On choisit 21, car dans le problème, on parle d'une fraction ayant un dénominateur de 3 et d'une autre ayant un dénominateur de 7.)
Puisque $\frac{1}{3}$ des boules sont rouges, il y a 7 boules rouges dans le sac.
Puisque $\frac{2}{7}$ des boules sont bleues, il y a 6 boules bleues dans le sac.
Le nombre de boules vertes dans le sac est donc égal à $21-7-6$, soit 8. Or, ce nombre correspond à seulement 4 de moins que deux fois le nombre de boules bleues. Donc, il ne peut pas y avoir 21 boules dans le sac.

Pour corriger la situation, on vérifie ce qui arrive si on double le nombre de billes dans le sac. S'il y a 42 boules dans le sac, il y a 14 boules rouges et 12 boules bleues. Donc, il y a 16 boules vertes, ce qui est 8 de moins que deux fois le nombre de boules bleues.
Le nombre de boules vertes est donc égal à 16.

Réponse : (B)

19. Au point B, on trace une droite horizontale qui coupe l'axe des ordonnées en P. Au point C, on trace une droite verticale qui coupe l'axe des abscisses en Q. Soit R le point d'intersection de ces droites.



Puisque B a une ordonnée de 3, alors P a pour coordonnées $(0,3)$. Puisque C a une abscisse de 5, alors Q a pour coordonnées $(5,0)$. Donc, R a pour coordonnées $(5,3)$.
D'après ces coordonnées, on a $OA = 1$, $AP = 2$, $PB = 1$, $BR = 4$, $RC = 1$, $CQ = 2$, $QD = 1$ et $DO = 4$.
L'aire du quadrilatère $ABCD$ est égale à l'aire du rectangle $PRQO$ moins l'aire des triangles APB, BRC, CQD et DOA.
Le rectangle $PRQO$ a une aire de 3×5, soit 15.
Les triangles APB et CQD ont une base respective, PB et QD, de longueur 1 et une hauteur respective, AP et CQ, de longueur 2. Donc, chacun a une aire de $\frac{1}{2}(1)(2)$, soit 1.
Les triangles BRC et DOA ont une base respective, BR et DO, de longueur 4 et un hauteur respective, CR et AO, de longueur 1. Donc, chacun a une aire de $\frac{1}{2}(4)(1)$, soit 2.
L'aire du quadrilatère $ABCD$ est égale à $15 - 1 - 1 - 2 - 2$, ou 9.
(On aurait pu remarquer que $ABCD$ est un parallélogramme. Donc, si on trace la diagonale AC, on obtient deux parties ayant la même aire. Au point C, si on abaisse une perpendiculaire CQ à l'axe des abscisses, on obtient un trapèze $ACQO$. On peut calculer son aire et en soustraire l'aire de deux triangles pour obtenir l'aire de la moitié du quadrilatère $ABCD$.)

Réponse : (A)

20. Puisque $3(n^{2007}) < 3^{4015}$, alors $n^{2007} < \dfrac{3^{4015}}{3}$, d'où $n^{2007} < 3^{4014}$.
Or $3^{4014} = (3^2)^{2007} = 9^{2007}$. On a donc $n^{2007} < 9^{2007}$.
Donc $n < 9$. Le plus grand entier n qui vérifie l'inéquation est $n = 8$.

Réponse : (D)

21. Puisque T a joué 5 parties, elle a rencontré chaque autre équipe, soit P, Q, R, S et W.
Puisque P a joué une partie et qu'elle a rencontré T, alors P a seulement joué cette partie.
Puisque S a joué 4 parties et qu'elle n'a pas rencontré P, alors S doit avoir rencontré chacune des 4 autres équipes, soit Q, R, T et W.
Puisque Q a joué 2 parties et qu'elle a rencontré T et S, alors Q a seulement joué ces parties.
Puisque R a joué 3 parties, qu'elle a rencontré T et S, mais qu'elle n'a pas rencontré P ou Q, alors R doit avoir rencontré W.

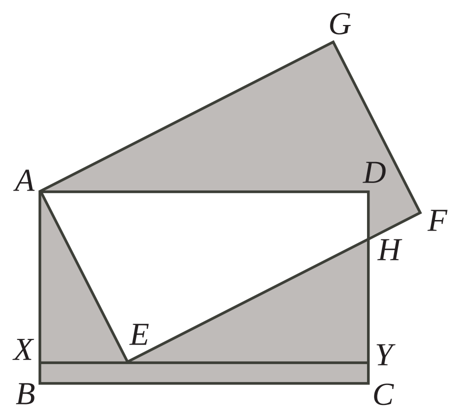
Donc, W a rencontré T, S et R. Elle a donc joué 3 parties. (Puisqu'on a tenu compte de tous les adversaires possibles de W, alors W n'a joué aucune autre partie.)

Réponse : (C)

22. Soit n le premier entier de cette liste.
Les entiers suivants sont donc $n+3$, $n+6$, $n+9$ et $n+12$.
Puisque le cinquième nombre est un multiple du premier, alors $\dfrac{n+12}{n}$ est un entier.
Or $\dfrac{n+12}{n} = \dfrac{n}{n} + \dfrac{12}{n} = 1 + \dfrac{12}{n}$.
Donc $1 + \dfrac{12}{n}$ est un entier. Donc $\dfrac{12}{n}$ est un entier, c'est-à-dire que n est un diviseur positif de 12.
Les diviseurs positifs de 12 sont 1, 2, 3, 4, 6 et 12. Il y a donc 6 valeurs possibles de n. Il y a donc 6 listes différentes possibles.
(On peut vérifier que chacune des valeurs de n produit une liste particulière et que chacune vérifie la propriété exigée.)

Réponse : (D)

23. Puisque la région non ombrée, soit $AEHD$, se retrouve à l'intérieur de chaque rectangle et que les deux rectangles ont la même aire, alors les deux régions ombrées ont la même aire.
Au point E, on trace une droite horizontale qui coupe les côtés AB et HC aux points respectifs X et Y.



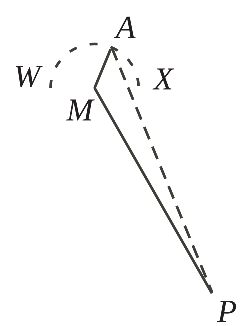
Puisque $\angle BAE = 30^\circ$, le triangle AEX est un triangle remarquable 30°-60°-90°. Puisque $AE = 12$, alors $EX = \frac{1}{2}AE$ et $AX = \sqrt{3}EX$, d'où $EX = 6$ et $AX = 6\sqrt{3}$.
L'aire du triangle EXA est donc égale à $\frac{1}{2}(6)(6\sqrt{3})$, soit $18\sqrt{3}$.
Puisque $AB = 12$ et que $AX = 6\sqrt{3}$, alors $XB = 12 - 6\sqrt{3}$.
Le rectangle $BXYC$ a donc une hauteur de $12 - 6\sqrt{3}$ et une base de 18. Il a donc une aire de $18(12 - 6\sqrt{3})$, ou $216 - 108\sqrt{3}$.
Puisque $XY = BC = 18$ et que $EX = 6$, alors $EY = 12$.
Puisque $\angle AEB = 60^\circ$ et que $\angle AEH = 90^\circ$, alors $\angle HEY = 30^\circ$.
Le triangle EHY est donc un triangle remarquable $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$. Puisque $EY = 12$, alors $HY = \dfrac{12}{\sqrt{3}}$, ou $HY = 4\sqrt{3}$.
Le triangle EHY a donc une aire de $\frac{1}{2}(12)(4\sqrt{3})$, ou $24\sqrt{3}$.
L'aire totale de la région $AEHCB$ est donc égale à $18\sqrt{3} + (216 - 108\sqrt{3}) + 24\sqrt{3}$, ou $216 - 66\sqrt{3}$.
L'aire totale des régions ombrées est donc égale à $2(216 - 66\sqrt{3})$, ou $432 - 132\sqrt{3}$, soit environ 203,369.

Réponse : (C)

24. Pour former une telle collection, on commence par inclure des entiers supérieurs à 1 dont le produit est égal à 2007. Ensuite, on ajoutera autant de 1 qu'il faut pour que la somme soit égale à 2007.
Pour faire en sorte que n soit aussi petit que possible, on veut que le nombre de 1 soit aussi petit que possible. On veut donc que les entiers choisis initialement, qui ont un produit de 2007, soient aussi grands que possible.
Pour trouver des entiers qui ont un produit de 2007, on détermine les diviseurs de 2007.
On a $2007 = 3 \times 669 = 3 \times 3 \times 223$ et 223 est un nombre premier. On peut le vérifier en vérifiant qu'il n'est pas divisible par les nombres premiers de 2 à 23.
Les collections possibles d'entiers supérieurs à 1 qui ont un produit de 2007 sont $\{3, 669\}$, $\{3, 3, 223\}$ et $\{9, 223\}$.
La collection ayant la plus grande somme est $\{3, 669\}$, avec une somme de 672. Pour obtenir une somme de 2007, il faut ajouter $2007 - 672$, soit 1335 fois le nombre 1. La collection contient donc $(1335 + 2)$ entiers, soit 1337 entiers.
La plus petite valeur possible de n est 1337.

Réponse : (B)

25. Puisque $\angle WAX = 90°$, quelle que soit la position du carré $ABCD$, alors A est toujours situé sur le demi-cercle de diamètre WX.
Le centre de ce demi-cercle est le milieu M de WX.
Pour se rendre de P à M, sur la figure, on monte de 4 et on parcourt 3 unités vers la gauche (puisque $WX = 2$). Donc $PM^2 = 3^2 + 4^2$, d'où $PM = 5$.
Puisque $WX = 2$ le demi-cercle de diamètre WX a un rayon de 1. Donc $AM = 1$.
On a donc $AM = 1$ et $MP = 5$.



La longueur maximale possible de AP est égale à $5 + 1$, soit 6, lorsque les points A, M et P sont alignés.

Réponse : (E)