Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Pascal 2006

(9^{e} année ou Secondaire III)

le mercredi 22 février 2006

Solutions

1. On calcule d'abord le numérateur et le dénominateur : $\dfrac{550+50}{5^2+5} = \dfrac{600}{25+5} = \dfrac{600}{30} = 20$

Réponse : (E)

2. On simplifie d'abord les expressions dans chaque racine carrée :
$\sqrt{36+64} - \sqrt{25-16} = \sqrt{100} - \sqrt{9} = 10 - 3 = 7$

Réponse : (B)

3. Les diviseurs positifs de 18 sont 1, 2, 3, 6, 9 et 18. Il y en a six.

Réponse : (D)

4. L'expression $B - 3 + A$ est égale à $(A + B) - 3$. Elle est égale à $5 - 3$, puisque $A + B = 5$. L'expression est donc égale à 2.

Réponse : (A)

5. La base du prisme a une aire de 2×4, ou 8. Le prisme a donc un volume de 8×8, ou 64. Si chaque arête du cube a une longueur de s, alors le volume du cube est égal à s^3. Donc $s^3 = 64$, d'où $s = 4$. Chaque arête du cube a une longueur de 4.

Réponse : (B)

6. Puisque Ravi a mangé $\frac{2}{5}$ de la pizza et que Helena a mangé la moitié de la quantité que Ravi a mangée, Helena a mangé la moitié de $\frac{2}{5}$ de la pizza, soit $\frac{1}{5}$ de la pizza.
Il reste donc $1 - \frac{2}{5} - \frac{1}{5}$ de la pizza, c'est-à-dire $\frac{2}{5}$ de la pizza.
Or, la fraction $\frac{2}{5}$ équivaut à 40 %. Il reste donc 40 % de la pizza complète.

Réponse : (C)

7. Puisque 1 triangle peut équilibrer 2 carrés, alors 2 triangles peuvent équilibrer 4 carrés.
Puisque 2 triangles peuvent aussi équilibrer 3 cercles, alors 3 cercles peuvent équilibrer 4 carrés.

Réponse : (E)

8. Puisque les carrés ont une aire respective de 16, 49 et 169, alors les côtés des carrés ont une longueur respective de 4, 7 et 13. En effet, $4^2 = 16$, $7^2 = 49$ et $13^2 = 169$.
Donc, la moyenne des longueurs de côté des trois carrés est égale à $\dfrac{4+7+13}{3}$, c'est-à-dire à 8.

Réponse : (A)

9. Puisque le rectangle a un périmètre de 24, il a un demi-périmètre de 12. Donc $l + 8 = 12$, d'où $l = 4$. Le rapport de la largeur à la longueur est donc égal à 4 : 8, c'est-à-dire à 1 : 2.

Réponse : (C)

10. *Solution 1*
La soustraction peut s'écrire sous forme $M4 - 3N = 16$, ou $M4 = 3N + 16$.
Pour que l'expression $3N + 16$ admette 4 comme chiffre des unités, il faut que N soit égal à 8.
Donc $M4 = 38 + 16$, c'est-dire que $M4 = 54$.
Donc, le chiffre M est un 5 et l'expression $M + N$ est égale à $5 + 8$, ou 13.

Solution 2
La soustraction peut s'écrire sous forme $M4 - 3N = 16$.
Pour que l'expression $M4 - 3N$ admette 6 comme chiffre des unités, il faut que N soit égal à 8.
Donc $M4 = 38 + 16$, c'est-dire que $M4 = 54$.
Donc, le chiffre M est un 5 et l'expression $M + N$ est égale à $5 + 8$, ou 13.

Réponse : (D)

11. On évalue chacun des choix de réponse en utilisant $x = 9$:

$$\sqrt{9} = 3 \qquad \frac{9}{2} = 4\tfrac{1}{2} \qquad 9 - 5 = 4 \qquad \frac{40}{9} = 4\tfrac{4}{9} \qquad \frac{9^2}{20} = \frac{81}{20} = 4\tfrac{1}{20}$$

Puisque $\frac{1}{2}$ est supérieur à $\frac{4}{9}$ et à $\frac{1}{20}$, l'expression $\dfrac{x}{2}$ a la plus grande valeur.

Réponse : (B)

12. Puisque le triangle a un périmètre de 36, alors $7 + (x + 4) + (2x + 1) = 36$, ou $3x + 12 = 36$. Donc $3x = 24$, ou $x = 8$.
L'expression $x + 4$ est égale à $8 + 4$, ou 12, et l'expression $2x + 1$ est égale à $2(8) + 1$, ou 17. Les côtés du triangle ont pour longueurs 7, 12 et 17. Le plus grand côté a donc une longueur de 17.

Réponse : (C)

13. *Solution 1*
Selon les renseignements donnés, $P + Q = 16$ et $P - Q = 4$.
On additionne ces équations, membre par membre, pour obtenir $P + Q + P - Q = 16 + 4$, d'où $2P = 20$, ou $P = 10$.

Solution 2
La valeur de P a été augmentée de Q pour donner 16 et elle a été diminuée de Q pour donner 4.
La différence de 12 entre ces deux réponses correspond donc à 2 fois la valeur de Q. Donc $Q = 6$.
Puisque $P + Q = 16$, on a $P + 6 = 16$, d'où $P = 10$.

Réponse : (D)

14. On utilise le dénominateur commun 12. L'équation devient $\dfrac{6}{12} + \dfrac{8}{12} + \dfrac{9}{12} + \dfrac{n}{12} = \dfrac{24}{12}$, ou $\dfrac{23 + n}{12} = \dfrac{24}{12}$. Puisque les dénominateurs sont égaux, les numérateurs doivent être égaux.
Donc $23 + n = 24$, ou $n = 1$.

Réponse : (E)

15. *Solution 1*
Puisque Jules conduit de 19 h 45 à 21 h 30, il conduit pendant 1 heure et 45 minutes, c'est-à-dire $1\frac{3}{4}$ heure, ou $\frac{7}{4}$ heure.
Puisqu'il parcourt 84 km en $\frac{7}{4}$ heure à une vitesse constante, sa vitesse est égale à $\dfrac{84}{\frac{7}{4}}$ km/h, c'est-à-dire à $84 \times \frac{4}{7}$ km/h, ou 48 km/h.

Solution 2

Puisque Jules conduit de 19 h 45 à 21 h 30, il conduit pendant 1 heure et 45 minutes, ce qui correspond à 7 quarts d'heure. Il parcourt 84 km en 7 quarts d'heure, ou 12 km par quart d'heure. Il parcourt donc 4×12 km, ou 48 km, en une heure. Sa vitesse est donc égale à 48 km/h.

Réponse : (E)

16. On place les sommes possibles dans un tableau. Les nombres de la colonne de gauche représentent les résultats possibles du 1^er^ dé, tandis que les nombres de la ligne du dessus repésentent ceux du 2^e^ dé. Par exemple, le nombre de la 4^e^ ligne, 5^e^ colonne est la somme du 4^e^ résultat du 1^er^ dé et du 5^e^ résultat du 2^e^ dé, soit $3 + 5 = 8$.

	2	2	3	3	5	8
2	4	4	5	5	7	10
2	4	4	5	5	7	10
3	5	5	6	6	8	11
3	5	5	6	6	8	11
5	7	7	8	8	10	13
8	10	10	11	11	13	16

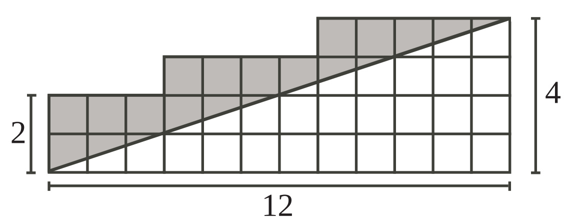
Les sommes possibles sont 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 13 et 16. Il y en a neuf.
(On aurait pu raccourcir en omettant les répétitions de 2 et de 3. De plus, on aurait pu s'en tenir aux sommes sur la diagonale et au-dessus de celle-ci à cause de la symétrie des résultats.)

Réponse : (D)

17. Puisque le triangle ADE est isocèle, alors $\angle AED = \angle EAD = 70°$.
Puisque la somme de la mesure des angles du triangle ADE est égale à $180°$,
alors $\angle ADE = 180° - 2(70°)$, c'est-à-dire que $\angle ADE = 40°$.
Puisque $\angle DEC = 2(\angle ADE)$, alors $\angle DEC = 2(40°)$, ou $\angle DEC = 80°$.
Puisque AEB est un segment de droite, $\angle CEB = 180° - 80° - 70°$, d'où $\angle CEB = 30°$.
Puisque le triangle EBC est isocèle, alors $\angle ECB = \angle EBC$. Dans le triangle EBC, on a donc $30° + 2(\angle EBC) = 180°$, d'où $2(\angle EBC) = 150°$, ou $\angle EBC = 75°$.

Réponse : (A)

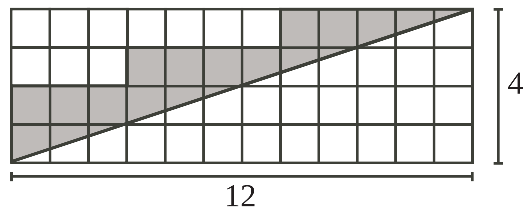
18. *Solution 1*
Le quadrillage a une aire de 38. (On peu compter les carrés un par un, ou diviser le quadrillage pour former un rectangle 3 sur 2, un rectangle 4 sur 3 et un rectangle 5 sur 4.)



L'aire de la région ombrée est égale à l'aire du quadrillage moins l'aire du triangle non ombré. Ce triangle rectangle a une base de 12 et une hauteur de 4. Son aire est égale à $\frac{1}{2}(12)(4)$, ou 24. L'aire de la région ombrée est égale à $38 - 24$, ou 14.

Solution 2

On ajoute des carrés non ombrés pour compléter un rectangle ayant une base de 12 et une hauteur de 4. Son aire est égale à 4(12), ou 48.



On a ajouté 10 carrés non ombrés dont l'aire totale est de 10. L'aire du triangle sous la diagonale est égale à la moitié de l'aire du rectangle, c'est-à-dire à la moitié de 48, ou 24.
L'aire de la région ombrée est égale à l'aire du rectangle moins l'aire de la région non ombrée, soit $48 - 24 - 10$, ou 14.

Réponse : (C)

19. *Solution 1*

Soit n, $n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$, $n+5$, $n+6$, $n+7$, $n+8$ et $n+9$ les dix entiers consécutifs.
Donc $S = n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+(n+4)+(n+5)+(n+6)+(n+7)+(n+8)+(n+9)$, c'est-à-dire que $S = 10n + 45$, et $T = 10n$.
On a donc $S - T = (10n + 45) - 10n$, d'où $S - T = 45$.

Solution 2

Puisque la question et les choix de réponse indiquent que la réponse est la même, peu importe les entiers consécutifs choisis, on calcule la valeur de $S - T$ pour les entiers de 1 à 10.
On a $S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$, d'où $S = 55$ et $T = 10(1)$, ou $T = 10$.
Donc $S - T = 45$.

Réponse : (A)

20. Soit y la largeur de chacun des rectangles identiques.
Puisque $PQ = 3y$, $RS = 2x$ et $PQ = RS$ (car $PQRS$ est un rectangle), alors $2x = 3y$, d'où $y = \frac{2}{3}x$.
Puisque l'aire du grand rectangle est égale à 4000, chacun des 5 petits rectangles a une aire de 800. Or, l'aire de chaque petit rectangle est égale à $x\left(\frac{2}{3}x\right)$, c'est-à-dire à $\frac{2}{3}x^2$.
Donc $\frac{2}{3}x^2 = 800$, d'où $2x^2 = 2400$, ou $x^2 = 1200$. Donc $x \approx 34,6$. Le choix de réponse le plus près est 35.

Réponse : (A)

21. *Solution 1*

D'après la 3^e ligne du tableau, $(m + 8) + (4 + n) = 6$, ou $m + n + 12 = 6$, d'où $m + n = -6$.
La somme des neuf nombres du tableau est égale à $m+4+m+4+8+n+8+n+m+8+4+n+6$.
Cette expression est égale à $3(m + n) + 42$, c'est-à-dire à $3(-6) + 42$, ou 24

Solution 2

D'après les choix de réponse, la somme ne dépend pas de la valeur des variables. Posons $m = 0$.

Le tableau devient

0	4	4
8	n	$8+n$
8	$4+n$	6

.

D'après la 3e ligne du tableau, $8 + (4 + n) = 6$, ou $n + 12 = 6$, d'où $n = -6$.

Le tableau devient donc

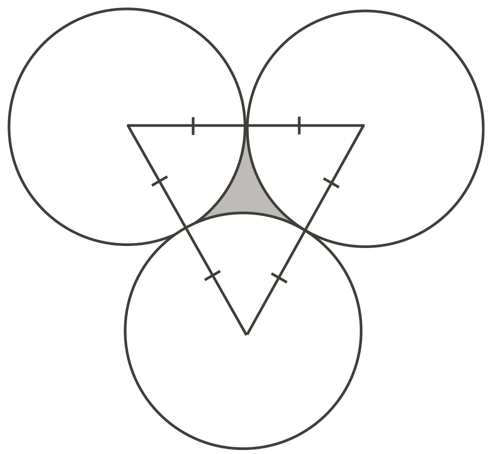
0	4	4
8	-6	2
8	-2	6

.

La somme des neuf nombres du tableau est égale à $0+4+4+8+(-6)+2+8+(-2)+6$, ou 24.

Réponse : (E)

22. On joint le centre de chaque cercle aux deux autres centres.
Puisque chaque cercle touche les deux autres, chaque segment passe par un point de contact de deux cercles. Chaque segment a donc la même longueur que deux rayons. Les trois segments sont donc congrus.



Ils forment donc un triangle équilatéral dont chaque angle mesure $60°$.
Or, la région ombrée est limitée par trois arcs, chacun provenant d'un des cercles. Le périmètre de la région ombrée est donc égal à la somme des longueurs d'arcs. Chaque extrémité d'un arc est un point de contact de deux cercles.
D'après le triangle équilatéral, chaque arc a un angle de $60°$. Puisque $\dfrac{60°}{360°} = \dfrac{1}{6}$, chaque arc a une longueur égale à $\frac{1}{6}$ de la circonférence d'un cercle, c'est-à-dire à $\frac{1}{6}(36)$, ou 6.
Le périmètre de la région ombrée est donc égal à 3(6), ou 18.

Réponse : (A)

23. *Solution 1*
On considère qu'au départ, Anne a A disques et Benoît en a B.
Si Anne donne 6 disques à Benoît, elle a maintenant $A-6$ disques et Benoît en a $B+6$. D'après l'énoncé, on a $B + 6 = 2(A - 6)$.
Par contre, si Anne reçoit 6 disques de Benoît, elle a maintenant $A + 6$ disques et Benoît en a $B - 6$. D'après l'énoncé, on a $A + 6 = B - 6$.
D'après la 1re équation, $B = 2A - 18$; d'après la 2e équation, $B = A + 12$.
Donc $2A - 18 = A + 12$, d'où $A = 30$. Puisque $B = A + 12$, alors $B = 42$.
Anne et Benoît ont donc un total de $(30 + 42)$ disques, ou 72 disques.

Solution 2
On sait que si Anne reçoit 6 disques de Benoît, les deux auront le même nombre de disques. Benoît a donc 12 disques de plus qu'Anne.
Supposons que Anne a A disques au départ. Benoît en a donc $A + 12$.
Si Anne donne 6 disques à Benoît, elle a maintenant $A-6$ disques et Benoît en a $A+18$. D'après l'énoncé, on a $2(A - 6) = A + 18$, d'où $A = 30$. Anne a donc 30 disques et Benoît en a 12 de plus, soit 42.
Anne et Benoît ont donc un total de $(30 + 42)$ disques, ou 72 disques.

Réponse : (C)

24. *Solution 1*
Supposons que Igor enlève un nombre de billes du sac et que les billes qui restent dans le sac ne satisfont pas à la condition donnée. Quel est le nombre maximal de billes qui peuvent rester ?
Pour ne pas satisfaire à la condition donnée, ou bien il n'y a pas au moins quatre billes d'une couleur (et il y a alors au plus 9 billes dans le sac, soit 3 billes de chaque couleur) ou bien il y a au moins 4 billes d'une couleur et il n'y a pas 3 billes de chaque autre couleur.
Dans ce dernier cas, on pourrait avoir autant de billes que possible d'une couleur (soit 8 billes jaunes) et 2 billes de chaque autre couleur pour un total de 12 billes qui restent dans le sac.
Donc, si Igor enlève 8 billes ou plus, les boules qui restent dans le sac ne satisfont pas à la condition donnée.
Par contre, si Igor enlève 7 billes ou moins, les billes qui restent satisfont à la condition donnée.
La plus grande valeur possible de N est 7.

Solution 2
Puisqu'on cherche la plus grande valeur possible de N, on commence par le plus grand nombre parmi les choix de répones et on élimine les choix jusqu'à ce que l'on obtienne la bonne réponse.
Si Igor a enlevé 10 billes, il peut avoir enlevé 5 billes rouges et 5 billes noires, laissant 8 billes jaunes, 2 billes rouges et 0 bille noire dans le sac, ce qui ne satisfait pas à la condition donnée.
Donc, la réponse n'est pas 10.
Si Igor a enlevé 9 billes, il peut avoir enlevé 5 billes rouges et 4 billes noires, laissant 8 billes jaunes, 2 billes rouges et 1 bille noire dans le sac, ce qui ne satisfait pas à la condition donnée.
Donc, la réponse n'est pas 9.
Si Igor a enlevé 8 billes, il peut avoir enlevé 5 billes rouges et 3 billes noires, laissant 8 billes jaunes, 2 billes rouges et 2 billes noires dans le sac, ce qui ne satisfait pas à la condition donnée.
Donc, la réponse n'est pas 8.

La réponse est-elle 7 ?
Il y a 20 billes au départ. Si on en enlève 7, il en reste 13 dans le sac.
Puisqu'il reste 13 billes, il ne peut y en avoir 4 ou moins de chacune des trois couleurs (sinon il y aurait au plus 12 billes dans le sac). Il y a donc au moins 5 billes d'une couleur dans le sac.
Peut-il y avoir 2 billes ou moins de chacune des deux autres couleurs ? Si oui, il doit y avoir au moins 9 billes de la première couleur pour qu'il reste 13 billes dans le sac. Or, il y avait un maximum de 8 billes d'une même couleur au départ. Donc, il doit y avoir au moins 3 billes d'une des deux autres couleurs.
Donc, si on enlève 7 billes, il reste au moins 5 billes d'une couleur et 3 billes d'une autre couleur.
En choisissant $N = 7$, les billes qui restent dans le sac satisfont à la condition donnée.
La plus grande valeur possible de N est donc 7.

Réponse : (B)

25. On décrit les chiffres des deux nombres en partant de la gauche. Par exemple, « le 1er chiffre » est le premier chiffre à gauche.

Si le 1er chiffre de Jean est 1, alors le nombre de Judith commence par 112.
Si le 1er chiffre de Jean est 2, alors le nombre de Judith commence par 111.
Dans les deux cas, le nombre de Judith commence par 1. Puisque les 2187 premiers chiffres de chaque nombre sont les mêmes, le nombre de Jean commence par 1.

Puisque le nombre de Jean commence par 1, celui de Judith commence par 112 et celui de Jean doit donc commencer par 112.
Puisque le nombre de Jean commence par 112, celui de Judith commence par 112112111 et celui de Jean doit donc commencer par 112112111.
À chaque fois qu'on répète l'argument, la longueur de la séquence est multipliée par 3.
On répète donc jusqu'à ce qu'on obtienne les 2187 (c.-à-d. les 3^7) chiffres du nombre de Jean.

On tient compte de certains renseignements dans un tableau. Dans la colonne *Étape*, on indique le nombre de fois que l'argument a été utilisé. On constate que si une séquence se termine par 1, la séquence suivante se termine par 2, puisque le 1 devient 112. De même, si une séquence se termine par 2, la séquence suivante se termine par 1, puisque le 2 devient 111. De plus, puisque chaque 1 devient 112 et que chaque 2 devient 111, le nombre de 2 d'une séquence est égal au nombre de 1 de la séquence précédente. De même, le nombre de 1 d'une séquence est égal à 2 fois le nombre de 1 de la séquence précédente plus 3 fois le nombre de 2 de la séquence précédente. (On aurait pu s'y prendre d'une autre façon et déterminer le nombre de 1 en soustrayant le nombre de 2 de la longueur de la séquence.)

Étape	Longueur	Nbre de 1	Nbre de 2	Se termine par
0	1	1	0	1
1	3	2	1	2
2	9	7	2	1
3	27	20	7	2
4	81	61	20	1
5	243	182	61	2
6	729	547	182	1
7	2187	1640	547	2

Comment peut-on obtenir cinq 1 consécutifs (c.-à-d. 11111) à l'étape 7 ?
Il ne peut jamais y avoir deux 2 consécutifs dans une séquence, car chaque 2 paraît à la fin d'un bloc de trois chiffres.
Donc, on ne peut pas obtenir 111111 à partir de deux 2 consécutifs dans la séquence précédente.
Donc, 11111 doit provenir de 21 dans la séquence précédente.
À l'étape 7, 11111 se produit à chaque fois que l'on trouve 21 à l'étape 6. Or, chaque 2 de l'étape 6 est suivi d'un 1 (puisque la séquence de l'étape 6 ne se termine pas par 2). Donc, 11111 se produit à l'étape 7 à chaque fois que l'on trouve un 2 à l'étape 6.
On retrouve donc 182 fois cinq 1 consécutifs dans les 2187 chiffres du nombre de Jean.

Réponse : (A)