Concours canadien de mathématiques

Une activité du Centre d'éducation en mathématiques et en informatique, Université de Waterloo, Waterloo, Ontario

Concours Hypatie 2006

le jeudi 20 avril 2006

Solutions

1. (a) *Solution 1*

Le 1^{er} entier impair positif est 1. Pour obtenir le 2^{e} entier impair positif, on ajoute 2 à 1, ce qui donne 3. Pour obtenir le 3^{e} entier impair positif, on ajoute 2 à 3, ou 2×2 à 1, ce qui donne 5. Cette régularité se poursuit.
Pour obtenir le 25^{e} entier impair positif, on ajoute 24×2 à 1, ce qui donne 49.
Le 25^{e} entier impair positif est donc 49.
Dans les 6 premières lignes, le nombre d'entiers est égal à $1+2+3+4+5+6$, ou 21.
Le 25^{e} entier impair positif est donc dans la ligne suivante, soit la 7^{e} ligne.

Solution 2

Le 1^{er} entier impair positif est 1. Il est 1 de moins que le 1^{er} entier pair positif, soit 2.
Le 2^{e} entier impair positif est 3. Il est 1 de moins que le 2^{e} entier pair positif, soit 4.
Cette régularité se poursuit. Le 25^{e} entier impair positif est 1 de moins que le 25^{e} entier pair positif. Il est donc 1 de moins que 25×2, c'est-à-dire 1 de moins que 50.
Le 25^{e} entier impair positif est donc 49.
Dans les 6 premières lignes, le nombre d'entiers est égal à $1+2+3+4+5+6$, ou 21.
Le 25^{e} entier impair positif est donc dans la ligne suivante, soit la 7^{e} ligne.

(b) Dans l'arrangement triangulaire, la 1^{re} ligne contient 1 entier, la 2^{e} ligne en contient 2, la 3^{e} ligne en contient 3, et ainsi de suite. Le nombre d'entiers dans les 20 premières lignes est donc égal à $1+2+3+\cdots+19+20$. Cette somme est égale à $\dfrac{20(21)}{2}$, ou 210. (On a utilisé le fait que $1+2+\cdots+(n-1)+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$).
Le 19^{e} nombre qui paraît dans la 21^{e} ligne est le $(210+19)^{\text{e}}$ entier impair positif, c'est-à-dire le 229^{e} entier impair positif.
D'après l'une ou l'autre des approches de la partie (a), cet entier est égal à $1+228(2)$ ou $229(2)-1$, c'est-à-dire à 457.

(c) Pour obtenir 1001, on doit ajouter 500×2 à 1. Donc, 1001 est le 501^{e} entier impair positif.
D'après la partie (b), les 20 premières lignes contiennent 210 entiers. Donc, le numéro de la ligne de 1001 est de beaucoup supérieur à 20.
On peut vérifier le nombre d'entiers qu'il y a dans les 30 premières lignes. Il y en a $1+2+\cdots+29+30$, c'est-à-dire $\dfrac{30(31)}{2}$, ou 465.
Dans les 31 premières lignes, il y a $465+31$, ou 496 entiers.
Puisque 1001 est le 501^{e} entier impair positif, il doit être le 5^{e} élément de la 32^{e} ligne.

2. (a) On détermine d'abord la longueur BE.
Puisque $AE = 24$ et $\angle AEB = 60^\circ$, alors $BE = 24\cos(60^\circ)$, d'où $BE = 24\left(\frac{1}{2}\right)$, ou $BE = 12$. (On aurait pu utiliser le fait que le triangle ABE est un triangle remarquable 30°-60°-90°, d'où $BE = \frac{1}{2}AE$.)
Puisque $BE = 12$ et $\angle BEC = 60^\circ$, alors $CE = 12\cos(60^\circ)$, d'où $CE = 12\left(\frac{1}{2}\right)$, ou $CE = 6$.

(b) On utilise la même stratégie que dans la partie (a) :

$$\begin{aligned} AB &= 24\sin(60^\circ) = 24\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 12\sqrt{3} \\ BC &= 12\sin(60^\circ) = 12\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 6\sqrt{3} \\ CD &= 6\sin(60^\circ) = 6\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 3\sqrt{3} \\ ED &= 6\cos(60^\circ) = 6\left(\tfrac{1}{2}\right) = 3 \end{aligned}$$

Le périmètre du quadrilatère $ABCD$ est égal à $AB + BC + CD + DA$. Puisque $DA = DE + EA$, le périmètre est égal à $12\sqrt{3} + 6\sqrt{3} + 3\sqrt{3} + 3 + 24$, ou $27 + 21\sqrt{3}$.

(c) L'aire du quadrilatère $ABCD$ est égale à la somme de l'aire des triangles ABE, BCE et CDE. Donc :

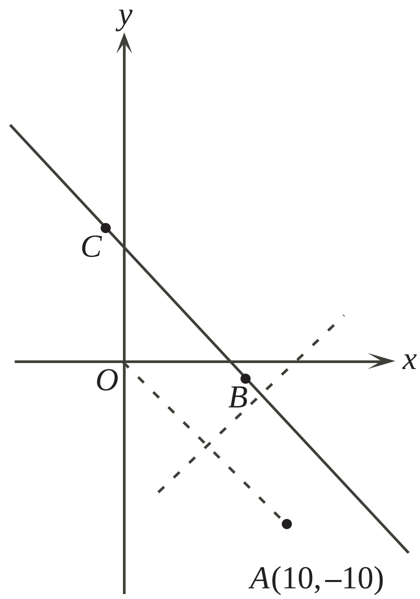
$$\begin{aligned} \text{Aire} &= \tfrac{1}{2}(BE)(BA) + \tfrac{1}{2}(CE)(BC) + \tfrac{1}{2}(DE)(DC) \\ &= \tfrac{1}{2}(12)(12\sqrt{3}) + \tfrac{1}{2}(6)(6\sqrt{3}) + \tfrac{1}{2}(3)(3\sqrt{3}) \\ &= 72\sqrt{3} + 18\sqrt{3} + \tfrac{9}{2}\sqrt{3} \\ &= \tfrac{189}{2}\sqrt{3} \end{aligned}$$

3. (a) Puisque la droite passe par les points B et C, sa pente est égale à $\dfrac{-1-7}{7-(-1)}$, ou -1.
Puisque $(7, -1)$ est sur la droite, l'équation est $y - (-1) = -1(x - 7)$, ou $y = -x + 6$.

(b) *Solution 1*
Soit p l'abscisse de P. Puisque P est sur d, ses coordonnées vérifient l'équation $y = -x+6$.
Son ordonnée est donc égale à $-p + 6$ et ses coordonnées sont $(p, -p + 6)$.
Puisque A a pour coordonnées $(10, -10)$, alors $PA = \sqrt{(p-10)^2 + (-p+16)^2}$.
Puisque O a pour coordonnées $(0, 0)$, alors $PO = \sqrt{p^2 + (-p+6)^2}$.
On veut que $PA = PO$, d'où $PA^2 = PO^2$. Donc :

$$\begin{aligned} (p-10)^2 + (-p+16)^2 &= p^2 + (-p+6)^2 \\ p^2 - 20p + 100 + p^2 - 32p + 256 &= p^2 + p^2 - 12p + 36 \\ 320 &= 40p \\ p &= 8 \end{aligned}$$

Les coordonnées de P sont $(8, -2)$.

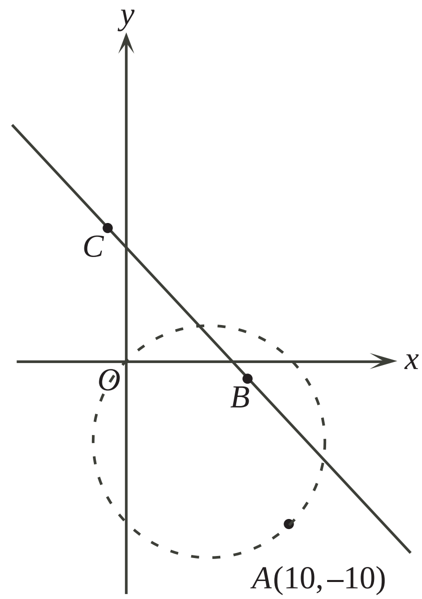


Solution 2
Puisque P doit être équidistant de A et de O, il doit être situé sur la médiatrice de AO. Puisque A et O ont pour coordonnées respectives $(10, -10)$ et $(0, 0)$, alors la pente de AO est égale à -1. La médiatrice de AO, qui lui est perpendiculaire, a donc une pente de 1. Elle passe par le milieu $(5, -5)$ de AO.
L'équation de la médiatrice est donc $y - (-5) = x - 5$, ou $y = x - 10$.
P est le point d'intersection de la droite d, d'équation $y = -x+6$, et de la droite d'équation $y = x - 10$. Au point P, on a donc $-x + 6 = x - 10$, d'où $2x = 16$, ou $x = 8$.
Les coordonnées de P sont $(8, -2)$.

(c) *Solution 1*
Puisque Q est situé sur la droite d, ses coordonnées ont la forme $(q, -q+6)$, comme dans la partie (b).
Pour que l'angle OQA mesure 90°, il faut que la pente de OQ et celle de QA aient un produit de -1. Or, la pente de OQ est égale à $\frac{-q+6}{q}$. La pente de QA est égale à $\frac{-q+6-(-10)}{q-10}$, ou $\frac{-q+16}{q-10}$. On a donc :

$$\begin{aligned}
\frac{-q+6}{q} \cdot \frac{-q+16}{q-10} &= -1 \\
(-q+6)(-q+16) &= -q(q-10) \\
q^2 - 22q + 96 &= -q^2 + 10q \\
2q^2 - 32q + 96 &= 0 \\
q^2 - 16q + 48 &= 0 \\
(q-4)(q-12) &= 0
\end{aligned}$$

Donc, $q = 4$ ou $q = 12$ et les coordonnées de Q sont $(4, 2)$ ou $(12, -6)$.



Solution 2
Pour que l'angle OQA mesure 90°, il faut que Q soit situé sur le cercle de diamètre OA.
Le centre de ce cercle a pour centre le milieu M du diamètre OA, soit $(5, -5)$.
Le rayon de ce cercle est égal à OM, soit $\sqrt{5^2 + (-5)^2}$, ou $\sqrt{50}$.
Le cercle a donc pour équation $(x-5)^2 + (y+5)^2 = 50$.
Les points Q que l'on cherche sont situés sur le cercle et sur la droite d d'équation $y = -x + 6$. Ce sont des points d'intersection. Donc à ces points, on a :

$$\begin{aligned} (x-5)^2 + (-x+6+5)^2 &= 50 \\ x^2 - 10x + 25 + x^2 - 22x + 121 &= 50 \\ 2x^2 - 32x + 96 &= 0 \\ x^2 - 16x + 48 &= 0 \\ (x-4)(x-12) &= 0 \end{aligned}$$

Donc, $x = 4$ ou $x = 12$ et les coordonnées de Q sont $(4, 2)$ ou $(12, -6)$.

4. (a) Soit p un nombre premier. Les diviseurs positifs de p sont 1 et p. Donc $\sigma(p) = 1 + p$.
Donc :

$$I(p) = \frac{1+p}{p} = \frac{1}{p} + 1 \leq \tfrac{1}{2} + 1 = \tfrac{3}{2}$$

puisque $p \geq 2$.

(b) *Solution 1*
Soit p un nombre premier impair et k un entier strictement positif. On a $p \geq 3$.
Les diviseurs premiers de p^k sont 1, p, p^2, …, p^{k-1}, p^k. Donc :

$$I(p^k) = \frac{1 + p + p^2 + \cdots + p^k}{p^k} = \frac{1}{p^k}\left(\frac{1(p^{k+1}-1)}{p-1}\right) = \frac{p^{k+1}-1}{p^{k+1}-p^k}$$

Donc :

$$\begin{array}{rrcl} & I(p^k) & < & 2 \\ \iff & \dfrac{p^{k+1}-1}{p^{k+1}-p^k} & < & 2 \\ \iff & p^{k+1}-1 & < & 2(p^{k+1}-p^k) \\ \iff & 0 & < & p^{k+1}-2p^k+1 \\ \iff & 0 & < & p^k(p-2)+1 \end{array}$$

Or, cette dernière inégalité est vraie puisque $p \geq 3$.

Solution 2
Soit p un nombre premier impair et k un entier strictement positif. On a $p \geq 3$.
Les diviseurs premiers de p^k sont 1, p, p^2, …, p^{k-1}, p^k. Donc :

$$\begin{array}{rcll} I(p^k) & = & \dfrac{p^k+p^{k-1}+\cdots+p+1}{p^k} & \\ & = & 1+\dfrac{1}{p}+\cdots+\dfrac{1}{p^{k-1}}+\dfrac{1}{p^k} & \\ & = & \dfrac{1\left(1-\left(\dfrac{1}{p}\right)^{k+1}\right)}{1-\dfrac{1}{p}} & \text{(somme d'une série géométrique)} \\ & < & \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{p}} & \\ & = & \dfrac{p}{p-1} & \\ & = & 1+\dfrac{1}{p-1} & \\ & \leq & 1+\dfrac{1}{2} & \\ & < & 2 & \end{array}$$

(c) Puisque p est un nombre premier, les diviseurs positifs de p^2 sont 1, p et p^2. Donc $I(p^2) = \dfrac{1+p+p^2}{p^2}$. Puisque q est un nombre premier, $I(q) = \dfrac{1+q}{q}$, comme dans la partie (a).
Puisque p et q sont des nombres premiers, les diviseurs positifs de p^2q sont 1, p, p^2, q, pq

et p^2q. Donc :

$$\begin{aligned} I(p^2q) &= \frac{1+p+p^2+q+pq+p^2q}{p^2q} \\ &= \frac{(1+p+p^2)+q(1+p+p^2)}{p^2q} \\ &= \frac{(1+p+p^2)(1+q)}{p^2q} \\ &= \frac{1+p+p^2}{p^2}\cdot\frac{1+q}{q} \\ &= I(p^2)I(q) \end{aligned}$$

(d) On présente d'abord quelques propriétés de $I(n)$:

- D'après la partie (b), si n est un nombre premier, alors $I(n) < 2$. Alors, pour déterminer un entier n pour lequel $I(n) > 2$, il faut chercher parmi les nombres composés.
- Soit $n = {p_1}^{e_1}{p_2}^{e_2}\cdots{p_m}^{e_m}$, chaque p_i étant un nombre premier distinct et chaque e_i étant un entier strictement positif. En prolongeant le résultat de la partie (c), on obtient $I(n) = I({p_1}^{e_1})I({p_2}^{e_2})\cdots I({p_m}^{e_m})$.
- Soit p et q deux nombres premiers. Si $p < q$, alors $I(p^k) > I(q^k)$.
  En effet, on a $I(p^k) = \dfrac{p^k+p^{k-1}+\cdots+p+1}{p^k} = 1+\dfrac{1}{p}+\cdots+\dfrac{1}{p^{k-1}}+\dfrac{1}{p^k}$. De même, $I(q^k) = 1+\dfrac{1}{q}+\cdots+\dfrac{1}{q^{k-1}}+\dfrac{1}{q^k}$. Puisque $p < q$, alors $\dfrac{1}{p} > \dfrac{1}{q}$, $\dfrac{1}{p^2} > \dfrac{1}{q^2}$, etc. Donc $I(p^k) > I(q^k)$.
- D'après la propriété précédente, il est préférable d'utiliser des petits facteurs premiers pour faire augmenter la valeur de $I(n)$. Ainsi, étant donné une valeur de n et la valeur correspondante de $I(n)$, on peut obtenir un nombre m, de manière que $I(m) > I(n)$, en choisissant la factorisation première de n puis en remplaçant certains facteurs premiers par des facteurs premiers inférieurs pour former m. (Par exemple, si $n = 5^2 7^3 11$, on choisit $m = 5^2 3^3 7$ pour obtenir $I(m) > I(n)$.)
- D'après la partie (b), $I(p^k) < \dfrac{p}{p-1}$. Donc $I(3^a) < \frac{3}{2}$ et $I(5^b) < \frac{5}{4}$.
  On a donc $I(3^a5^b) = I(3^a)I(5^b) < \frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4} = \frac{15}{8} < 2$.
- D'après les deux propriétés précédentes, il est impossible d'obtenir $I(n) > 2$ si n est le produit de deux nombres premiers distincts. Donc, n doit admettre au moins trois facteurs premiers distincts.

On considère les entiers n de la forme $3^a5^b7^c$ et on tente de déterminer des valeurs de a, de b et de c de manière que $I(n) > 2$:

a	b	c	n	$I(n)$
1	1	1	105	$I(n) = I(3)I(5)I(7) = \frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{8}{7} = \frac{64}{35} < 2$
2	1	1	315	$I(n) = I(3^2)I(5)I(7) = \frac{13}{9}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{8}{7} = \frac{208}{105} < 2$
3	1	1	945	$I(n) = I(3^3)I(5)I(7) = \frac{40}{27}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{8}{7} = \frac{128}{63} > 2$

Donc $I(945) > 2$.

Pourquoi $n = 945$ est-il le plus petit entier impair positif pour lequel $I(n) > 2$?

- On remarque que tout entier impair positif qui admet quatre facteurs premiers distincts doit être supérieur ou égal à $3(5)(7)(11)$, c'est-à-dire 1155. Puisque ce nombre est supérieur à 945, on peut s'en tenir aux entiers qui admettent trois facteurs premiers distincts.

- D'après la troisième propriété, on peut aussi s'en tenir aux facteurs premiers 3, 5 et 7.
- De plus, il suffit de considérer les factorisations premières de la forme $3^{e_1} \cdot 5^{e_2} \cdot 7^{e_3}$, où $e_1 \geq e_2 \geq e_3$. En effet, si on avait $e_i < e_j$, il suffirait d'interchanger ces deux exposants pour obtenir un entier plus petit. (Par exemple, $3^2 5^3 7$ est plus grand que $3^3 5^2 7$.)
- D'après le point précédent, on peut voir, d'après le tableau, qu'il n'y a aucune valeur de n inférieure à 945 que l'on peut vérifier.

Donc, $n = 945$ est le plus petit entier impair positif pour lequel $I(n) > 2$.